Komplexe Geometrie | Prof. Dr. Bernd Siebert
WS 08/09

2. Übungsblatt

1. Diskutiere die Eindeutigkeit der Zerlegung im Weierstraßschen Vorbereitungsatz.

2. Zerlege $f(z_1, z_2) = z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$ gemäß dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz.

3. Sei $U \subset \mathbb{C}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{C}^n$ holomorph mit $Df|_P$ von maximalem Rang für ein $P \in U$.

a) (*Holomorphe Submersionen*) Sei $m \geq n$, das heißt $Df|_P$ surjektiv.

Zeige: Es gibt eine biholomorphe Abbildung $\Phi : V \longrightarrow U'$, $U' \subset U$ eine offene Umgebung von P und $V \subset \mathbb{C}^m$, mit

$$(f \circ \Phi)(z_1, \ldots, z_m) = (z_1, \ldots, z_n).$$

(Interpretation: Ist Df surjektiv, so ist f in geeigneten Koordinaten eine lineare Projektion.)

b) (*Holomorphe Immersionen*) Sei $m \leq n$, das heißt $Df|_P$ injektiv.

Zeige: Es gibt eine biholomorphe Abbildung $\Psi : V \longrightarrow V'$, $V \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung von $f(P)$ und $V' \subset \mathbb{C}^n$, mit

$$(\Psi \circ f)(z_1, \ldots, z_m) = (z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots, 0).$$

(Interpretation: Ist Df injektiv, so ist f in geeigneten Koordinaten die Inklusion eines linearen Unterraums.)

4. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}(U)$. Zeige, dass $U \setminus Z(f) \subset U$ zusammenhängend und dicht ist. [Hu, Ex. 1.1.8]

5. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ offen. Zeige, dass der Ring $K(U)$ der meromorphen Funktionen auf U genau dann ein Körper ist, wenn U zusammenhängend ist. [Hu, Ex. 1.1.9]
(Erinnerung: Ein topologischer Raum X heißt zusamemenhängend, wenn jede Zerlegung $X = U \cup V$ in disjunkte offene Mengen trivial ist, das heißt $U = X$ oder $V = X$.)

6. In einem Buch zur (Linearen) Algebra (z.B. von Th. Bröcker) vollziehe den Beweis der Faktorialität von $\mathbb{Z}$ und $k[x]$ nach.

(Aufgaben 1 und 2 besprechen wir am Montag, 3.11., die übrigen Aufgaben eine Woche später.)