Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

11. Übungsblatt

1. Für eine kompakte Riemannsche Fläche Σ studiere die Gradabbildung

$$\deg : \mathrm{Div}(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum_i a_i[P_i] \longmapsto \sum_i a_i$$

nach [Hu, S.85f]. Überlege Dir insbesondere, dass $\deg(D) = 0$, falls D ein Hauptdivisor ist. Gilt die Umkehrung?

2. Sei Σ eine kompakte Riemannsche Fläche und $x_0 \in \Sigma$. Die Abbildung

$$\varphi : \Sigma \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Sigma), \quad x \longmapsto \mathcal{O}(x - x_0)$$

heißt *Abel-Jacobi-Abbildung* mit Basispunkt x_0. Überzeuge Dich nach [Hu, Proposition 2.3.34] von der Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) φ is nicht injektiv.
(ii) $\Sigma \simeq \mathbb{P}^1$
(iii) Es existieren zwei Punkte $x_1, x_2 \in \Sigma$ mit $\mathcal{O}(x_1 - x_2) \simeq \mathcal{O}$.

3. Für $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$ bezeichne $F_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ den induzierten Isomorphismus.
Zeige: $\quad F_A^*(\omega_{\mathrm{FS}}) = \omega_{\mathrm{FS}} \quad \Longleftrightarrow \quad A \in U(n+1).$

4. Zeige: $\displaystyle\int_{\mathbb{P}^n} \omega_{\mathrm{FS}} = 1.$