Komplexe Geometrie
WS 08/09

Prof. Dr. Bernd Siebert

# 10. Übungsblatt

1. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für einen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ in $\mathfrak{Ab}(X)$ bezeichne $f_*\varphi : f_*\mathcal{G} \to f_*\mathcal{H}$ die induzierte Abbildung der Bildgarben. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{W}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{W}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{W}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

die kanonische welke Auflösung von $\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$. Definiere die *$k$-te höhere direkte Bildgarbe* von $\mathcal{F}$ durch

$$R^k f_*\mathcal{F} := \operatorname{kern}(f_*\varphi^k)/\operatorname{im}(f_*\varphi^{k-1}).$$

Zeige: $R^k f_*\mathcal{F}$ ist kanonisch isomorph zur Garbe assoziiert zur Prägarbe

$$Y \supset U \longmapsto H^k(f^{-1}(U), \mathcal{F}).$$

2. Sei $L$ das tautologische Bündel über dem $\mathbb{P}^1$. Für eine projektive Gerade $G \subset \mathbb{P}^n$ beschreibe $T_{\mathbb{P}^n}|_G$ durch einen Kozykel, und zeige damit $\det\big(T_{\mathbb{P}^n}|_G\big) \simeq L^{n+1}$.

3. Sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $k$. Jedes $f \in \mathcal{I}_Y(U)$, $U \subset X$ offen, definiert einen Morphismus

$$N_{Y/X}|_U \longmapsto \underline{\mathbb{C}}, \qquad \sum_i a_i \partial_{z_i} \longmapsto \sum_i a_i \partial_{z_i} f$$

des Normalenbündels in das triviale Geradenbündel über $U$. Zeige, dass diese Abbildung einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \longrightarrow \mathcal{O}(N^*_{Y/X})$$

von $\mathcal{O}_Y$-Modulgarben induziert.

4. Sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\xi_i \in H^1(\mathfrak{U}_i, \mathcal{O}_X^*)$ für offene Überdeckungen $\mathfrak{U}_i$ , $i = 1, 2$. Beweise die Aussage aus 6.7 der Vorlesung, dass die zugehörigen Geradenbündel $L_{\xi_1}$ und $L_{\xi_2}$ genau dann isomorph sind, wenn es eine gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ gibt mit $\xi_1 = \xi_2$ in $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^*)$.