Die Existenz einer Hermite-Einstein-Metrik auf einem stabilen Vektorraumbündel

Diplomarbeit[4]

vorgelegt von

Bernd Siebert

aus

Berlin-Wilmersdorf

angefertigt

im Mathematischen Institut

der Georg-August-Universität zu Göttingen

1989

Einleitung

Die Kobayashi-Hitchin-Vermutung behauptet, daß ein irreduzibles Vektorraumbündel über einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit genau dann stabil ist, wenn es eine Hermite-Einstein-Metrik zuläßt. Donaldson bewies diese Vermutung für den Fall projektiver Flächen [Donaldson 1], später für projektive Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension [Donaldson 3]. Hermite-Einstein-Metriken lassen sich differentialgeometrisch in vielfacher Weise interpretieren, etwa über kompakten Kähler-Flächen als Metriken, deren Krümmung eine harmonische Spur und einen anti-selbstdualen spurfreien Anteil haben [Itoh/Nakajima, Proposition 1.10]. Diese Beziehung wurde von Donaldson ausgenutzt, um seine berühmt gewordenen differentialtopologischen Invarianten, die aus einem Modulraum anti-selbstdualer Zusammenhänge konstruiert werden, für die Dolgachev-Fläche zu berechnen — mit Mitteln der algebraischen Geometrie [Donaldson 2]! Mit ähnlichen Methoden wurde auch die Differentialtopologie anderer komplexer Flächen untersucht. Unter anderem konnte gezeigt werden, daß die einer Enriques-Fläche zugrundeliegende reelle 4-Mannigfaltigkeit unendlich viele verschiedene differenzierbare Strukturen besitzt [Okonek].
Eine weitere Anwendung ergibt sich aus der Beobachtung, daß Vektorraumbündel mit verschwindender erster und zweiter Chernklasse genau dann eine Hermite-Einstein-Metrik besitzen, wenn sie flach sind. Flache Vektorraumbündel dagegen werden durch unitäre Darstellungen der Fundamentalgruppe gegeben, so daß der Modulraum stabiler Vektorraumbündel mit $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ mit einem Raum von Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen identifiziert werden kann. Diese Räume stehen im Zentrum der Untersuchung gewisser Homologie-Sphären. Auch hier läßt sich ein topologisches Problem mit algebro-geometrischen Methoden behandeln, siehe [Bauer/Okonek].

Im folgenden wird der schwierigere Teil der Kobayashi-Hitchin-Vermutung, nämlich die Existenz einer Hermite-Einstein-Metrik auf einem stabilen Vektorraumbündel, bewiesen, wobei ich mich eng an den Beweis von K. Uhlenbeck und S.-T. Yau [Uhlenbeck/Yau] halte. Über diesen Beweis schrieb Donaldson: "Their proof is probably the most natural and displays clearly the role of stability. However it uses rather sophisticated analysis." [Donaldson 3, Introduction]. Ich hoffe, die Anforderungen an die reelle Analysis etwas gemindert, Natürlichkeit und Klarheit des Beweises jedoch bewahrt zu haben ...

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Kapitel 1 hat zweifache Funktion. Zum einen werden die verwendeten Konventionen festgelegt und an ständig wiederkehrende Sätze und Definitionen erinnert, um den Gang des Beweises nicht durch umständliche Definitionen und Zitate zu belasten. Zum anderen werden ein paar Beziehungen hergeleitet, für die in der Literatur keine zitierfähigen Quellen gefunden werden konnten. Dazu gehören Abschnitt 1.7 über die Besonderheiten des Endomorphismenbündels eines holomorphen Vektorraumbündels, Abschnitt 1.9, die eine einfach

herzuleitende Gleichung mit Folgerungen enthält, und das Maximumprinzip für den Laplace-Operator aus Abschnitt 1.10. Das zweite Kapitel beschreibt die zu lösende partielle Differentialgleichung und setzt die Kontinuumsmethode an, mit der die Gleichung gelöst werden soll. In den darauf folgenden beiden Kapiteln wird mit dieser Methode eine Folge von Metriken erstellt, die im Fall der Konvergenz gegen eine Hermite-Einstein-Metrik konvergieren. Falls nicht, wird in Kapitel 5 aus dieser Folge eine Untergarbe der Garbe holomorpher Schnitte des Vektorraumbündels konstruiert, die Nicht-Stabilität implizieren würde.
Der Anhang enthält im ersten Teil zwei ziemlich triviale Sätze aus der nichtlinearen Analysis, die ich ebenfalls nicht in der Literatur finden konnte. Der zweite Teil befaßt sich mit einem Erweiterungsproblem kohärenter Untergarben, die entscheidend ist für die Konstruktion der Garbe in Kapitel 5. Dies ist lediglich ein Spezialfall von [Siu, Theorem 4.5], und ich gebe den Beweis nur an, weil sich in diesem Fall die Argumentation sehr stark vereinfacht und die eingehenden Vorraussetzungen erhellt werden.

Danken möchte ich vor allem Professor H. Grauert für die nette Betreuung der Arbeit in zahlreichen aufschlußreichen Gesprächen; außerdem Professor C. Okonek, der die Arbeit anregte und besonders zu Beginn den Weg durch die Literatur wies, Professor M. Itoh, den ich in C. Okoneks Arbeitsgruppe über 3- und 4-Mannigfaltigkeiten am Max-Planck-Institut in Bonn traf und der mehr als einmal klärender Gesprächspartner war; schließlich Dr. G. Dethloff, der bei Durchsicht der Arbeit zahlreiche Ungenauigkeiten aufdeckte.

Göttingen, 17. August 1989

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgeometrie komplexer Vektorraumbündel

Nicht umsonst trägt dieses Kapitel den Titel von Kobayashis Monographie; ein großer Teil, nämlich die Abschnitte 1.1 bis 1.3, 1.6, 1.11 und 1.12 sind dort zu finden, vor allem in Kapitel I und Paragraph III.2. Für Abschnitt 1.4 gibt es zahlreiche Literatur, etwa [Aubin], [Booss/Bleecker], [Griffiths/Harris] und [Palais]. Die Diskussion der Hodge-Theorie in 1.5 ist an [Griffiths/Harris] angelehnt, Abschnitt 1.8 an [Donaldson 1, S.4f] und in 1.13 wird die verwendete Literatur jeweils angegeben. Auf die verbleibenden Abschnitte 1.7, 1.9 und 1.10 wurde schon in der Einleitung eingegangen.

Sei M eine zusammenhängende kompakte komplexe Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension n, mit Kähler-Metrik g, die lokal (etwa auf $U \subset M$ offen) durch

$$g = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \otimes d\bar{z}^{\beta}$$

gegeben ist, $\{z^{\alpha}\}$ eine Karte für M definiert auf der offenen Menge U, $(g_{\alpha\bar{\beta}})_{\alpha,\beta}$ eine positive (= positiv definite hermitesche) Matrix komplexwertiger Funktionen auf U. Wie üblich sollen Metriken bzw. Skalarprodukte linear im ersten Eintrag und konjugiert linear im zweiten sein.
Zu g gehört die (reelle) Kählerform Φ, lokal

$$\Phi = \sqrt{-1} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta},$$

und Integration von Funktionen auf M geschehe bezüglich der Volumenform $\Phi^n/n!$.
Ich verwende die Bezeichnungen d, ∂ und $\bar{\partial}$ für die äußere Ableitung und ihre $(1,0)$- bzw. $(0,1)$-Komponente.
Sei $TM = T'M \oplus T''M$ die Zerlegung des komplexifizierten Tangentialbündels in den holomorphen und antiholomorphen Anteil, $\mathcal{A}^{p,q} := \wedge^p(T'^*M) \otimes \wedge^q(T''^*M)$ und $\mathcal{A}^p := \oplus_{q=0}^{p} \mathcal{A}^{q,p-q}$. Dann sind $A^{p,q} := C^{\infty}(\mathcal{A}^{p,q})$ (C^{∞}-Schnitte von $\mathcal{A}^{p,q}$) der Vektorraum der komplexwertigen glatten Formen vom Typ (p,q) und $A^p := C^{\infty}(\mathcal{A}^p)$ die p-Formen auf M.

Weiter sei E ein holomorphes Vektorraumbündel vom Rang r über M, die holomorphe Struktur gegeben durch eine antiholomorphe äußere Ableitung $\bar{\partial}_E$. Durch $\mathcal{A}^{p,q}(E) := \mathcal{A}^{p,q} \otimes E$ wird das Bündel der (p,q)-Formen mit Werten in E definiert; ferner seien $\mathcal{A}^p(E) := \oplus_{q=0}^{p} \mathcal{A}^{q,p-q}(E)$, $A^{p,q}(E) := C^{\infty}(\mathcal{A}^{p,q}(E))$ und schließlich $A^p(E) := \oplus_{q=0}^{p} A^{q,p-q}(E)$ die E-wertigen p-Formen.

1.1 Metriken

Eine hermitesche Metrik H_0 für E schreibt sich lokal (etwa über U) als

$$H_0 = \sum_{i,j=1}^{r} H_{i\bar{j}} t^i \otimes \bar{t^j}, \qquad H_{i\bar{j}} = H_0(s_i, \overline{s_j}),$$

wenn $(s_1, \ldots, s_r)$ ein lokales holomorphes r-Bein, also ein r-Tupel punktweise linear unabhängiger holomorpher Schnitte von $E|_U$ ist und $(t^1, \ldots, t^r)$ das duale r-Bein, $t^i(s_j) = \delta_{ij}$. Allgemein verwende ich $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ für Indizes, die sich auf M beziehen und $i, j, k \ldots$ für Vektorraumbündelindizes. Weil die Metrik im folgenden festgehalten wird, ist es naheliegend, H_0 aus der Schreibweise fernzuhalten. Ich schreibe

$$\langle \sigma, \tau \rangle_E := H_0(\sigma, \bar{\tau}) \qquad \text{für } \sigma, \tau \in A^0(E),$$

und $|\sigma|_E := \sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle_E}$ für die zugehörige Norm. Manchmal wird jedoch der Einfluß der Metrik durch die Bezeichnung (E, H_0) für das Vektorraumbündel E mit hermitescher Metrik H_0 betont.

H_0 induziert natürlich Metriken auf den von E abgeleiteten Vektorraumbündeln:

1. auf dem komplex konjugierten Bündel $\bar{E}$,

   $$\langle \bar{\sigma}, \bar{\tau} \rangle_{\bar{E}} := \overline{\langle \sigma, \tau \rangle_E} \qquad \text{für } \bar{\sigma}, \bar{\tau} \in A^0(\bar{E}),$$

   oder lokal $\langle \overline{s_i}, \overline{s_j} \rangle_{\bar{E}} = \overline{H_{i\bar{j}}} = H_{j\bar{i}}$.

2. auf dem dualen Bündel E^*,
   es gibt einen kanonischen Isomorphismus $\iota : \bar{E} \simeq E^*$ vermöge H_0, nämlich $\bar{\sigma} \mapsto (\tau \mapsto \langle \tau, \bar{\sigma} \rangle_E)$, lokal $\bar{s_i} \mapsto \sum_j H_{j\bar{i}} t^j$.
   Daher setzt man

   $$\langle \varphi, \psi \rangle_{E^*} := \langle \iota^{-1}(\varphi), \iota^{-1}(\psi) \rangle_{\bar{E}} \qquad \varphi, \psi \in A^0(E^*).$$

   Lokal bedeutet das

   $$\left\langle t^i, t^j \right\rangle_{E^*} = \left\langle \sum_k H^{i\bar{k}} \overline{s_k}, \sum_l H^{j\bar{l}} \overline{s_l} \right\rangle_{\bar{E}} = \sum_{k,l} H^{i\bar{k}} H^{l\bar{j}} H_{l\bar{k}} = H^{i\bar{j}},$$

   wobei $(H^{i\bar{j}})_{ji}$ das Inverse der Matrix $(H_{i\bar{j}})_{ij}$ ist, also $\sum_k H_{i\bar{k}} H^{j\bar{k}} = \delta_{ij}$.

3. auf Tensorprodukten $E \otimes F$,

   $$\langle \sigma \otimes \varphi, \tau \otimes \psi \rangle_{E \otimes F} := \langle \sigma, \tau \rangle_E \cdot \langle \varphi, \psi \rangle_F ,$$

   wenn $\sigma, \tau \in A^0(E),\ \varphi, \psi \in A^0(F)$.

Insbesondere bekommt man eine hermitesche Metrik auf dem E zugeordneten Endomorphismenbündel $\mathrm{End}\,E \simeq E \otimes E^*$; seien lokal

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{r} \varphi_j^i s_i \otimes t^j, \psi = \sum_{k,l=1}^{r} \psi_l^k s_k \otimes t^l \in A^0(\mathrm{End}\,E),$$

dann

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathrm{End}\,E} = \sum_{i,j,k,l} \varphi_j^i H_{i\bar{k}} H^{j\bar{l}}\, \overline{\psi_l^k}.$$

In dieser Schreibweise wird die Multiplikation in $\mathrm{End}\,E$ zur Kontraktion von Tensoren:

$$\varphi \cdot \psi = \sum_{i,j,k} \varphi_j^i \psi_k^j s_i \otimes t^k.$$

Der zu ψ bezüglich H_0 punktweise adjungierte Schnitt ist gerade

$$\psi^* = \sum_{i,j,k,l} H^{i\bar{k}} \overline{\psi_k^l} H_{j\bar{l}} s_i \otimes t^j, \tag{1.1}$$

und eine andere Formulierung für die Metrik auf $\mathrm{End}\,E$ wäre

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathrm{End}\,E} = \mathrm{Tr}\,(\varphi \cdot \psi^*), \tag{1.2}$$

Tr die Spur eines Endomorphismus.

Mit Verwendung von lokalen unitären r-Beinen (das heißt $H_{i\bar{j}} = \langle s_i, s_j \rangle_E = \delta_{ij}$) ist folgende Ungleichung, die die Metriken auf E und $\mathrm{End}\,E$ vergleicht, eine einfache Übung in Linearer Algebra:

$$|\langle \varphi\sigma, \tau \rangle_E| \leq |\varphi|_{\mathrm{End}\,E} \cdot |\sigma|_E \cdot |\tau|_E \qquad \varphi \in A^0(\mathrm{End}\,E), \sigma, \tau \in A^0(E). \tag{1.3}$$

Die Metrik g auf dem Tangentialbündel von M induziert schließlich Metriken auf allen von TM abgeleiteten Tensorbündeln über M, insbesondere auf dem Bündel $\mathcal{A}^{p,q}$ der antisymmetrischen Tensoren vom Typ (p,q) als direkter Summand des Tensorbündels $\bigotimes_1^p T'^*(M) \otimes \bigotimes_1^q T''^*(M)$; und zwar seien lokal

$$\varphi = \frac{1}{p!q!} \sum_{|A|=p, |B|=q} \varphi_{A\bar{B}} dz^A \wedge d\bar{z}^B, \ \psi = \frac{1}{p!q!} \sum_{|\Gamma|=p, |\Delta|=q} \psi_{\Gamma\bar{\Delta}} dz^\Gamma \wedge d\bar{z}^\Delta \ \in A^{p,q}$$

(in Multiindexschreibweise, das heißt $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ etc.), mit $\varphi_{A\bar{B}}$, $\psi_{\Gamma\bar{\Delta}}$ total antisymmetrisch in A bzw. Γ und B bzw. Δ (daher der Faktor $1/(p!q!)$), dann

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{A}^{p,q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{A,B,\Gamma,\Delta} g^{A\bar{\Gamma}} g^{\Delta\bar{B}} \varphi_{A\bar{B}} \overline{\psi_{\Gamma\bar{\Delta}}},$$

mit $g^{A\bar{\Gamma}} = g^{\alpha_1\gamma_1} \cdot \ldots \cdot g^{\alpha_p\gamma_p}$ etc.

Ferner läßt sich H_0 zu einer Abbildung $\mathcal{A}^{p,q}(E) \otimes \mathcal{A}^{p',q'}(E) \to \mathcal{A}^{p+q',p'+q}$ fortsetzen, nämlich

$$(\varphi \otimes \sigma) \otimes (\psi \otimes \tau) \longmapsto \langle \sigma, \tau \rangle_E \cdot \varphi \wedge \bar{\psi} \tag{1.4}$$

für $\varphi \in A^{p,q}$, $\psi \in A^{p',q'}$, $\sigma, \tau \in A^0(E)$. Diese Abbildung bezeichne ich ebenfalls mit $\langle , \rangle_E$ und sie muß sorgfältig von der Metrik $\langle , \rangle_{\mathcal{A}^{p,q}(E)}$ auf dem Bündel der E-wertigen (p,q)-Formen unterschieden werden.

1.2 Zusammenhänge

Ein Zusammenhang auf dem E zugrundeliegenden differenzierbaren Vektorraumbündel $\hat{E}$ sei im folgenden eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$D : A^0(\hat{E}) \longrightarrow A^1(\hat{E})$$

mit der Eigenschaft

$$D(f\sigma) = df \otimes \sigma + f \cdot D\sigma \qquad \text{für } f \in A^0, \sigma \in A^0(\hat{E}).$$

D wirkt dann auch auf p-Formen vermöge

$$\begin{array}{rcll} D : A^p(\hat{E}) & \longrightarrow & A^{p+1}(\hat{E}) & \\ D(\varphi \otimes \sigma) & \longmapsto & d\varphi \otimes \sigma + (-1)^p \varphi \wedge D\sigma, & \qquad \varphi \in A^p, \sigma \in A^0(\hat{E}). \end{array}$$

Lokal (etwa über der offenen Menge $U \subset M$) kann man

$$Ds_j = \sum_{i=1}^{r} \omega_j^i s_i$$

schreiben, $\omega_j^i \in A^1$. Die matrixwertige 1-Form $\omega := (\omega_j^i)_{ij}$ heißt Zusammenhangsform zu D bezüglich der Trivialisierung $(s_1, \ldots, s_r)$.
Die Zerlegung $A^1(\hat{E}) = A^{1,0}(\hat{E}) \oplus A^{0,1}(\hat{E})$ induziert eine solche von D:

$$D = \partial^0 + \partial^1, \text{ mit } \partial^0 : A^0(\hat{E}) \longrightarrow A^{1,0}(\hat{E}),\ \partial^1 : A^0(\hat{E}) \longrightarrow A^{0,1}(\hat{E}).$$

D heißt integrabel, wenn seine $(0,1)$-Komponente eine holomorphe Struktur auf $\hat{E}$ induziert, also wenn $\partial^1 \circ \partial^1 = 0$ ist. Jede Metrik H_0 auf einem holomorphen Vektorraumbündel E induziert genau einen mit der Metrik und der komplexen Struktur auf E verträglichen integrablen Zusammenhang $D_E = D(E, H_0)$, der h-Zusammenhang heißen soll ("h" steht für "holomorph" und "hermitesch"):

$$\begin{array}{llcll} 1. & \partial_E^1 & = & \bar{\partial}_E, & \\ 2. & d\langle \sigma, \tau \rangle_E & = & \langle D_E \sigma, \tau \rangle_E + \langle \sigma, D_E \tau \rangle_E & \qquad \sigma, \tau \in A^0(E) \end{array} \tag{1.5}$$

(2 im Sinne von (1.4)!). Eigenschaft 2 zerfällt in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial\langle\sigma,\tau\rangle_E &= \langle\partial_E^0\sigma,\tau\rangle_E + \langle\sigma,\bar\partial_E\tau\rangle_E, \\ \bar\partial\langle\sigma,\tau\rangle_E &= \langle\bar\partial_E\sigma,\tau\rangle_E + \langle\sigma,\partial_E^0\tau\rangle_E. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Bezüglich eines holomorphen r-Beins $(s_1,\ldots,s_r)$ läßt sich die Zusammenhangsform des h-Zusammenhangs einfach angeben:

$$\omega_i^j = \sum_k \partial H_{i\bar k}\cdot H^{j\bar k} \quad \text{oder} \quad {}^T\omega = \partial H_0 \cdot H_0^{-1}. \tag{1.7}$$

Später werden auch nicht-holomorphe r-Beine verwendet, dann kann ω nicht allein aus H_0 berechnet werden (vielmehr würde $\bar\partial s_i$ eingehen). Bezüglich eines unitären r-Beins $(s_1,\ldots,s_r)$ ist ω eine schiefhermitesche Matrix, denn

$$0 = d\langle s_i,s_j\rangle_E = \langle Ds_i,s_j\rangle_E + \langle s_i,Ds_j\rangle_E = \omega_i^j + \overline{\omega_j^i}.$$

Ein Zusammenhang auf E induziert wieder in natürlicher Weise Zusammenhänge auf den von E abgeleiteten Vektorraumbündeln. Diese Konstruktionen sind verträglich mit den entsprechenden Konstruktionen der Metriken, das heißt der h-Zusammenhang auf E induziert wieder h-Zusammenhänge auf den abgeleiteten Vektorraumbündeln bezüglich der induzierten Metrik.
Im folgenden benötige ich nur

1. den induzierten Zusammenhang auf dem dualen Bündel E^*.
   Verlangt man für die Kontraktionsabbildung

   $$E^*\times E \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (\varphi,\sigma)\longmapsto \varphi(\sigma) =: \langle\varphi,\sigma\rangle$$

   Verträglichkeit mit den Zusammenhängen D_E und D_{E^*}, nämlich

   $$d\langle\varphi,\sigma\rangle = \langle D_{E^*}\varphi,\sigma\rangle + \langle\varphi,D_E\sigma\rangle,$$

   (vgl. (1.5,2); auf der rechten Seite steht die Erweiterung der Kontraktionsabbildung auf p-Formen, analog zu (1.4)), so ist D_{E^*} bereits eindeutig durch D_E bestimmt. Lokal gilt

   $$D_{E^*}t^i = -\sum \omega_j^i t^j,$$

   wenn ω_j^i die Zusammenhangsform von D_E bezüglich des zu $(t^1,\ldots,t^r)$ dualen r-Beins $(s_1,\ldots,s_r)$ ist.

2. den induzierten Zusammenhang auf Tensorprodukten $E\otimes F$,

   $$D_{E\otimes F}(\sigma\otimes\varphi) = D_E\sigma\otimes\varphi + \sigma\otimes D_F\varphi \qquad \text{für } \sigma\in A^0(E), \varphi\in A^0(F).$$

3. den induzierten Zusammenhang auf $E \otimes F^*$, der sich nach 1 und 2 lokal zu
$$D_{E\otimes F^*}\left(\sum_{i,j}\varphi^i_j s_i \otimes v^j\right) = \sum_{i,j}\left[d\varphi^i_j + \sum_k \left(\omega^i_k\varphi^k_j - \varphi^i_k\kappa^k_j\right)\right] s_i \otimes v^j$$
ergibt; dabei sei $(v^1,\dots,v^s)$ dual zu einem s-Bein $(u_1,\dots,u_s)$ von F, $s = \mathrm{Rang}(F)$ und κ^i_j die Zusammenhangsform von D_F bezüglich $(u_1,\dots,u_s)$. Man überlegt sich durch lokale Rechnung die Äquivalenz mit folgender koordinatenfreien Definition
$$D_{E\otimes F^*}\varphi = D_E \circ \varphi - \varphi \circ D_F, \tag{1.8}$$
wobei φ als Schnitt von $\mathrm{Hom}(F,E) \simeq E\otimes F^*$ aufgefaßt wird und komponentenweise auf F-wertige p-Formen wirke, das heißt als $\mathrm{Id}_{\mathcal{A}^p}\otimes\varphi$ auf $\mathcal{A}^p(F) = \mathcal{A}^p\otimes F$.

Speziell liefert 3 für $E = F$ einen Zusammenhang auf dem Endomorphismenbündel, der sich lokal mit $\varphi = (\varphi^i_j)_{ij}$ in Matrixschreibweise als
$$D_{\mathrm{End}\,E}\varphi = d\varphi + [\omega,\varphi] \tag{1.9}$$
schreibt, wenn $[\omega,\varphi] := \omega\cdot\varphi - \varphi\cdot\omega$ der Kommutator der Matrizen ω und φ ist.

1.3 Krümmung

Einem Zusammenhang D zugeordnet ist seine Krümmung
$$R = R(D) := D \circ D : A^0(E) \to A^2(E).$$
Es stellt sich heraus, daß R (im Gegensatz zu D) A^0-linear ist. Daher ist R ein Element von $A^2(\mathrm{End}\,E)$ und wird lokal durch eine matrixwertige 2-Form Ω repräsentiert, die sich zu
$$\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega \tag{1.10}$$
berechnet, $\omega\wedge\omega$ das äußere Produkt von matrixwertigen 1-Formen.
Für den h-Zusammenhang D_E von E ist $R_E := R(D_E)$ eine $(1,1)$-Form, so daß
$$R_E = \bar\partial_E \circ \partial^0_E + \partial^0_E \circ \bar\partial_E, \tag{1.11}$$
und bezüglich eines holomorphen r-Beins vereinfacht sich (1.10) zu
$$\Omega = \bar\partial\omega, \tag{1.12}$$
denn ω ist dann eine $(1,0)$-Form (siehe 1.7); bezüglich eines unitären r-Beins dagegen ist wegen ${}^T\omega = -\bar\omega$
$$0 = d\,{}^T\omega + d\bar\omega = d\,{}^T\omega - {}^T\omega\wedge{}^T\omega + \omega\wedge\omega + d\bar\omega = {}^T\Omega + \bar\Omega,$$
also Ω schiefhermitesch.
Die Krümmung $R_{\mathrm{End}\,E}$ des h-Zusammenhangs $D_{\mathrm{End}\,E}$ auf $\mathrm{End}\,E$ hat nach (1.9) und (1.12) also die folgende Form:
$$R_{\mathrm{End}\,E} : \varphi \longmapsto [R,\varphi] \qquad \varphi\in A^0(\mathrm{End}\,E). \tag{1.13}$$

1.4 Analysis holomorpher Vektorraumbündel

Durch Integration über die Metrik erhält man das (globale) Skalarprodukt

$$(\sigma,\tau)_E := \int_M \langle\sigma,\tau\rangle_E \frac{\Phi^n}{n!} \qquad \sigma,\tau \in A^0(E),$$

das $A^0(E)$ zu einem Prähilbertraum macht, deren Vervollständigung der Raum $L^2(E)$ der Äquivalenzklassen quadratintegrabler Schnitte von E ist. Ich werde ein $\varphi \in L^2(E)$ als fast überall definierten Schnitt von E auffassen, das heißt als Repräsentanten der durch φ bestimmten Äquivalenzklasse.
Will man auch kovariante Ableitungen berücksichtigen, bieten sich die Sobolevskalarprodukte an ($k \in \mathbb{N}$):

$$(\sigma,\tau)_{H^2_k(E)} := \sum_{\mu=0}^{k} \int_M \langle D^\mu\sigma, D^\mu\tau\rangle_{S^\mu(E)} \frac{\Phi^n}{n!} \qquad \sigma,\tau \in A^0(E),$$

mit $D^0 := \mathrm{Id}_E$ der Identitätsendomorphismus,

$$D^\mu := D_{S^{\mu-1}(E)} \circ \ldots \circ D_{S(E)} \circ D_E : A^0(E) \longrightarrow A^0(S^\mu(E)) = A^1(S^{\mu-1}(E)),$$

und $D_{S^\nu(E)}$ der von den Metriken H_0 und g induzierte Zusammenhang auf $S^\nu(E) := E \otimes (T^*M)^{\otimes\nu}$. D^ν ist so gewählt, daß alle ν-fachen kovarianten Ableitungen berücksichtigt werden; seien nämlich $X_1,\ldots,X_\nu \in T_pM$, $p \in M$, $\sigma \in A^0(E)$, dann gilt

$$\langle D_E\langle D_E \ldots \langle D_E\sigma, X_1\rangle \ldots, X_{\nu-1}\rangle, X_\nu\rangle = \langle D^\nu\sigma, X_1 \otimes \ldots \otimes X_\nu\rangle,$$

$\langle .,.\rangle$ die duale Paarung $T^*M \otimes TM \to \mathbb{C}$ bzw. $(T^*M)^{\otimes\nu} \otimes (TM)^{\otimes\nu} \to \mathbb{C}$. Man bemerke, daß $(.,.)_E = (.,.)_{H^2_0(E)}$ in dieser Schreibweise. Die zugehörige Norm $\|\sigma\|_{H^2_k(E)} = (\sigma,\sigma)^{1/2}_{H^2_k(E)}$ kann noch verallgemeinert werden:

$$\|\sigma\|_{H^p_k(E)} := \sum_{\mu=0}^{k} \left(\int_M |D^\mu\sigma|^p_{S^\mu(E)} \right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty),$$

wodurch $A^0(E)$ ein Präbanachraum wird. Die Vervollständigungen von $A^0(E)$ bezüglich dieser Normen sind die Sobolevräume $H^p_k(E)$ der L^p-Schnitte von E mit k schwachen kovarianten Ableitungen in $L^p(E) := H^p_0(E)$. Für $k = 1$ bedeutet das etwa: $f \in H^p_1(E) \Longleftrightarrow f \in L^p(E)$ und es existiert ein $g \in L^p(\mathcal{A}^1(E))$ mit $(g,\zeta)_{\mathcal{A}^1(E)} = (f, D^*_E\zeta)_E$ für alle $\zeta \in A^1(E)$. g heißt schwache kovariante Ableitung von f, man schreibt $g = D_E f$.
$D^*_E : A^1(E) \to A^0(E)$ sei dabei der (in $L^2(E)$) adjungierte Operator zu D_E. A priori ist D^*_E eine Abbildung von $L^2(\mathcal{A}^1(E))$ nach $L^2(E)$, kann jedoch aus D_E punktweise durch rein algebraische Operationen gewonnen werden, so daß D^*_E tatsächlich die Erweiterung einer glatten Abbildung $A^1(E) \to A^0(E)$ ist.

Wenn $\{U_\nu\}$ eine endliche Überdeckung der kompakten Mannigfaltigkeit M mit Koordinatenumgebungen ist, $E|_{U_\nu}$ trivial, $\{\rho_\nu\}$ eine untergeordnete Teilung der Eins, so kann $\rho_\nu \cdot \sigma$, $\sigma \in A^0(E)$ mit einer Funktion aus $C_0^\infty(V_\nu, \mathbb{C}^r)$ (Funktionen mit kompaktem Träger in V_ν), $U_\nu \simeq V_\nu \subset \mathbb{C}^n$ offen, identifiziert werden. Mit dieser Auffassung wird durch

$$\|\sigma\|'_{H_k^p(E)} := \sum_\nu \|\rho_\nu \cdot \sigma\|_{\mathring{H}_k^p(V_\nu, \mathbb{C}^r)} = \sum_\nu \sum_{|\mu| \le k} \left(\int_{V_\nu} |\partial^\mu (\rho_\nu \cdot \sigma)|^p_{\mathbb{C}^r} \right)^{1/p}$$

eine weitere Norm auf $A^0(E)$ definiert, die mit der oben definierten Norm $\|.\|_{H_k^p(E)}$ äquivalent ist (hierbei sei $\mathring{H}_k^p(V_\nu, \mathbb{C}^r)$ der Sobolevraum von Funktionen $V_\nu \to \mathbb{C}^r$ mit schwachen Randwerten 0 [Alt, 1.22], $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{2n})$ ein Multiindex, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \circ \ldots \circ \partial_{2n}^{\mu_{2n}}$, $\partial_j^{\mu_j}$ die μ_j-te Ableitung nach der j-ten Komponente des $\mathbb{R}^{2n}$ und $|.|_{\mathbb{C}^r}$ die euklidische Norm des $\mathbb{C}^r \simeq \mathbb{R}^{2r}$). Viele Resultate lassen sich daher sofort von $\mathring{H}_k^p(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, auf $H_k^p(E)$ übertragen, so auch die Sobolevsätze ($2n = \dim_{\mathbb{R}} M$):

$$\begin{array}{rcl} & & \text{Satz von Rellich:} \\ \mathrm{Id}_E : H_k^p(E) & \hookrightarrow & H_l^q(E) \text{ kompakt, für } k > l, k - 2n/p > l - 2n/q, \\ & & \text{Sobolev-Einbettungssatz:} \\ \mathrm{Id}_E : H_k^p(E) & \hookrightarrow & C^l(E) \text{ kompakt, falls } k - 2n/p > l, \end{array}$$

[Palais, Theorem 9.2], wobei $C^l(E)$ den Banachraum der l-mal stetig (kovariant) differenzierbaren Funktionen auf M mit Werten in E bezeichnet, versehen mit der entsprechenden Supremumsnorm

$$\|\sigma\|_{C^l(E)} = \sum_{\mu=0}^{l} \sup_M |D^\mu \sigma|_{S^\mu(E)}.$$

Insbesondere hat jede Äquivalenzklasse von Funktionen in $H_k^p(E)$, $k > 2n/p$, einen ausgezeichneten stetigen Repräsentanten. Man darf daher von dem Wert $f(x)$ eines Elementes $f \in H_k^p(E)$ in einem Punkt $x \in M$ sprechen.

Ferner läßt sich die Multiplikation in $\operatorname{End} E$ für $k_1, k_2 \ge k$ und $(k_1 - 2n/p_1) + (k_2 - 2n/p_2) > k - 2n/p$ zu einer stetigen bilinearen Abbildung

$$H_{k_1}^{p_1}(\operatorname{End} E) \times H_{k_2}^{p_2}(\operatorname{End} E) \longrightarrow H_k^p(\operatorname{End} E)$$

erweitern [Palais, Theorem 9.5]. Speziell wird daher im stetigen Fall $(k > 2n/p)$ $H_k^p(\operatorname{End} E)$ zu einer Algebra.

Im Fall von Funktionen $M \to \mathbb{C}$ schreibe ich L^p, H_k^p und C^l.

1.5 Hodge-Theorem

Aus den Komponenten des Zusammenhangs und deren Adjungierten bildet man die Laplace-Beltrami-Operatoren

$$\begin{array}{rcccl} \Box_E & := & \partial_E^0 {\partial_E^0}^* + {\partial_E^0}^* \partial_E^0 & : & A^p(E) \longrightarrow A^p(E), \\ \overline{\Box}_E & := & \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E & : & A^p(E) \longrightarrow A^p(E). \end{array}$$

Kern des Hodge-Theorems ist die Invertierbarkeit der Operatoren

$$\mathrm{Id}_E + \overline{\Box}_E : H^s_{k+2}(\mathcal{A}^{p,q}(E)) \longrightarrow H^s_k(\mathcal{A}^{p,q}(E)) \qquad k \geq 0, s > 1,$$

die stetige Erweiterungen von $\mathrm{Id}_E + \overline{\Box}_E : A^{p,q}(E) \to A^{p,q}(E)$ sind. Dies folgt beispielsweise aus der Diskussion in [Griffiths/Harris, Chapter 0.6]:
Zu $\eta \in L^2(\mathcal{A}^{p,q}(E))$ beweist man zunächst die Existenz einer schwachen Lösung $\psi \in L^2(\mathcal{A}^{p,q}(E))$ der Gleichung $(\mathrm{Id}_E + \overline{\Box}_E)\psi = \eta$ im distributiven Sinne (das heißt mit $(\eta, \varphi)_{\mathcal{A}^{p,q}(E)} = (\psi, (\mathrm{Id}_E + \overline{\Box}_E)\varphi)_{\mathcal{A}^{p,q}(E)}$ für alle Testfunktionen $\varphi \in A^{p,q}(E)$). Anschließend wird Regularität von ψ gezeigt, und zwar gilt $\psi \in H^s_{k+2}(E)$, falls $\eta \in H^s_k(E)$ (für $s \neq 2$ siehe [Aubin, Theorem 3.54]). Der Regularitätsbeweis liefert auch eine Abschätzung der H^s_{k+2}-Norm von ψ durch die H^s_k-Norm von η, was schließlich die Stetigkeit der konstruierten Umkehrabbildung $\eta \mapsto \psi$ impliziert.
Nach dem Satz von Rellich ist die Komposition

$$\iota \circ (\mathrm{Id}_E + \overline{\Box}_E)^{-1} : H^s_k(\mathcal{A}^{p,q}(E)) \longrightarrow H^s_k(\mathcal{A}^{p,q}(E))$$

kompakt ($\iota : H^s_{k+2}(\mathcal{A}^{p,q}(E)) \hookrightarrow H^s_k(\mathcal{A}^{p,q}(E))$) und für $s = 2$ liefert der Spektralsatz für kompakte, normale Operatoren eine Hilbertraumzerlegung

$$H^2_k(\mathcal{A}^{p,q}(E)) = \overline{\bigoplus_{m=0}^{\infty} E^{p,q}(\lambda_m)}.$$

$E^{p,q}(\lambda_m) \subset A^{p,q}(E)$ der endlichdimensionale Eigenraum von $\overline{\Box}_E$ zum Eigenwert λ_m, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Insbesondere ist das Spektrum von $\overline{\Box}_E$ rein diskret und ohne Häufungspunkt, die Eigenfunktionen von $\overline{\Box}_E$ müssen wegen oben erwähnter Regularität glatt sein: $E^{p,q}(\lambda_m) \subset A^{p,q}(E)$.
$\overline{\Box}_E$ ist nun genau auf $(\mathrm{Kern}\,\overline{\Box}_E)^\perp = (E^{p,q}(0))^\perp$ invertierbar. Für gegebenes $\eta \in A^{p,q}(E)$ hat daher die Gleichung $\overline{\Box}_E \psi = \eta$ genau dann eine Lösung $\psi \in A^{p,q}(E)$, wenn $(\eta, \varphi)_{\mathcal{A}^{p,q}(E)} = 0$ ist für alle $\overline{\Box}_E$-harmonischen φ ($\overline{\Box}_E \varphi = 0$).

1.6 Hodge-Identitäten

Auf M gibt es den natürlichen Multiplikationsoperator

$$\begin{array}{rcl} L : A^{p,q} & \longrightarrow & A^{p+1,q+1}, \\ \psi & \longmapsto & \Phi \wedge \psi, \end{array}$$

(Φ die Kählerform). Der (in L^2) adjungierte Operator

$$\Lambda : A^{p+1,q+1} \longrightarrow A^{p,q}$$

ist punktweise ein algebraischer Operator und heißt Spuroperator. So gilt etwa für eine $(1,1)$-Form $\psi = \sum_{\alpha,\beta} \psi_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$

$$\sqrt{-1}\Lambda\psi = \sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \psi_{\alpha\bar{\beta}} =: \mathrm{Tr}_g \psi \in A^0,$$

oder äquivalent

$$\sqrt{-1}\psi \wedge \Phi^{n-1} = \frac{\sqrt{-1}}{n}\Lambda\psi \cdot \Phi^n = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}_g \psi \cdot \Phi^n \in A^{n,n}. \tag{1.14}$$

(Das sind einfache Folgerungen aus der Darstellung der Metrik auf $\mathcal{A}^{p,q}$ mit Hilfe des Dualitätsoperators $\bar{*} : \mathcal{A}^{p,q} \to \mathcal{A}^{n-p,n-q}$, und zwar gilt $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{A}^{p,q}} \cdot \Phi^n = \varphi \wedge \bar{*}\psi$). Es ist klar, wie sich L und Λ auf vektorraumbündelwertige Formen verallgemeinern lassen.

Auf einer Kählermannigfaltigkeit geben die Hodge-Identitäten Beziehungen zwischen ∂_E^0 und $\bar{\partial}_E$ mit ihren Adjungierten vermöge L und Λ:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} (\Lambda L - L\Lambda)\varphi &=& (n-p-q)\varphi & & \text{falls } \varphi \in A^{p,q}(E) & \\ \partial_E^0 L - L\partial_E^0 &=& 0, & \bar{\partial}_E L - L\bar{\partial}_E &=& 0, \\ {\partial_E^0}^* \Lambda - \Lambda {\partial_E^0}^* &=& 0, & \bar{\partial}_E^* \Lambda - \Lambda \bar{\partial}_E^* &=& 0, \\ L{\partial_E^0}^* - {\partial_E^0}^* L &=& \sqrt{-1}\bar{\partial}_E, & L\bar{\partial}_E^* - \bar{\partial}_E^* L &=& -\sqrt{-1}\partial_E^0, \\ \Lambda\partial_E^0 - \partial_E^0\Lambda &=& \sqrt{-1}\bar{\partial}_E^*, & \Lambda\bar{\partial}_E - \bar{\partial}_E\Lambda &=& -\sqrt{-1}{\partial_E^0}^*. \end{array} \tag{1.15}$$

Ferner gilt, weil $D_E = \partial_E^0 + \bar{\partial}_E$ ein integrabler Zusammenhang ist:

$$\begin{array}{rcl} \partial_E^0\partial_E^0 &=& 0 \;=\; \bar{\partial}_E\bar{\partial}_E, \\ \partial_E^0\bar{\partial}_E + \bar{\partial}_E\partial_E^0 &=& R_E \quad (\text{Multiplikation mit } R_E, \text{ siehe } (1.11)\ ). \end{array} \tag{1.16}$$

Die Hodge-Identitäten ermöglichen eine explizitere Darstellung der adjungierten Operatoren, aus der letzten Gleichung in (1.15) folgt zum Beispiel

$${\partial_E^0}^* = \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}_E \qquad \text{für } E\text{-wertige } (1,0)\text{-Formen.} \tag{1.17}$$

Insbesondere erhält man einfache Ausdrücke für die Laplace-Operatoren auf 0-Formen

$$\begin{array}{rcccccl} \Box_E &=& {\partial_E^0}^*\partial_E^0 &=& \sqrt{-1}\Lambda\bar{\partial}_E\partial_E^0 &=& \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}_E\partial_E^0, \\ \overline{\Box}_E &=& \bar{\partial}_E^*\bar{\partial}_E &=& -\sqrt{-1}\Lambda\partial_E^0\bar{\partial}_E, &=& -\mathrm{Tr}_g \partial_E^0\bar{\partial}_E, \end{array} \tag{1.18}$$

und eine Beziehung zwischen den beiden Laplace-Operatoren (für allgemeine Formen)

$$\Box_E = \overline{\Box}_E + \sqrt{-1}(\Lambda R - R\Lambda). \tag{1.19}$$

Das triviale Geradenbündel ist krümmungsfrei, daher gilt auf A^0

$$\Box = \overline{\Box} = \bar{\partial}^* \bar{\partial} = \partial^* \partial = \mathrm{Tr}_g \bar{\partial} \partial = -\mathrm{Tr}_g \partial \bar{\partial}. \tag{1.20}$$

Man beachte, daß lokal

$$\Box = -\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta},$$

also in $\hat{x} \in M$ gerade das Negative des gewöhnlichen Laplace-Operators im $\mathbb{C}^n$, wenn man ein Koordinatensystem wählt, das die Metrik in $\hat{x}$ in Standardform $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$ bringt.

1.7 Das Endomorphismenbündel

Weil der größte Teil der Rechnungen auf $\mathrm{End}\, E$ stattfindet, benutze ich die kürzere Bezeichnung $D = \partial^0 + \bar{\partial}$ an Stelle von $D_{\mathrm{End}\, E} = \partial^0_{\mathrm{End}\, E} + \bar{\partial}_{\mathrm{End}\, E}$ für den Zusammenhang auf dem Endomorphismenbündel von E.
$\mathrm{End}\, E$ hat eine multiplikative Struktur, die durch die Komposition von Endomorphismen gegeben ist. Mit der Darstellung (1.8) des Zusammenhangs auf $\mathrm{End}\, E \simeq E \otimes E^*$ prüft man die folgenden Produktregeln nach:

$$\begin{array}{llcll} (1.21) & D(\varphi\psi) & = & (D\varphi)\psi + \varphi D\psi & \varphi, \psi \in A^0(\mathrm{End}\, E); \\ (1.22) & D_E(\varphi(\sigma)) & = & \varphi(D_E \sigma) + (D\varphi)(\sigma) & \varphi \in A^0(\mathrm{End}\, E), \sigma \in A^0(E). \end{array}$$

Es wurde schon der adjungierte Schnitt φ^* zu $\varphi \in A^0(\mathrm{End}\, E)$ erwähnt. Man kann diese Zuordnung sofort auf $\mathrm{End}\, E$-wertige Formen erweitern

$$^* : A^{p,q}(\mathrm{End}\, E) \longrightarrow A^{q,p}(\mathrm{End}\, E),$$

indem man

$$\langle \varphi(\sigma), \tau \rangle_E = \langle \sigma, \varphi^*(\tau) \rangle_E \qquad \text{für } \sigma, \tau \in A^0(E)$$

verlangt ($\langle , \rangle_E$ im Sinne von (1.4)). Bezüglich eines lokalen unitären r-Beins von E (so daß $H_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$) wird φ^* einfach durch die konjugiert transponierte Matrix von φ beschrieben.
* ist dann eine Isometrie

$$\|\varphi^*\|_{A^p(\mathrm{End}\, E)} = \|\varphi\|_{A^p(\mathrm{End}\, E)} \qquad \varphi \in A^p(\mathrm{End}\, E), \tag{1.23}$$

und es gilt

$$(\partial^0 \varphi)^* = \bar{\partial}(\varphi^*), \tag{1.24}$$

wie man durch Vergleich der beiden folgenden Gleichungen sieht ($\varphi \in A^p(\mathrm{End}\, E)$, $\sigma, \tau \in A^0(E)$):

$$\begin{aligned} \partial \langle \varphi(\sigma), \tau \rangle_E &= \langle (\partial^0 \varphi)(\sigma), \tau \rangle_E + (-1)^p \langle \varphi(\partial^0_E \sigma), \tau \rangle_E + (-1)^p \langle \varphi(\sigma), \bar{\partial}_E \tau \rangle_E, \\ \partial \langle \sigma, \varphi^*(\tau) \rangle_E &= \langle \sigma, (\bar{\partial} \varphi^*)(\tau) \rangle_E + \langle \partial^0_E \sigma, \varphi^*(\tau) \rangle_E + (-1)^p \langle \sigma, \varphi^*(\bar{\partial}_E \tau) \rangle_E \\ &= \langle \sigma, (\bar{\partial} \varphi^*)(\tau) \rangle_E + (-1)^p \langle \varphi(\partial^0_E \sigma), \tau \rangle_E + (-1)^p \langle \varphi(\sigma), \bar{\partial}_E \tau \rangle_E, \end{aligned}$$

gemäß (1.6/1.22); die Vorzeichen kommen von der Vertauschung von 1-Formen und p-Formen.

Aus der lokalen Darstellung (1.1) des adjungierten Schnitts φ^* zu $\varphi \in A^0(\operatorname{End} E)$, die wörtlich auch für $\varphi \in A^p(\operatorname{End} E)$ gilt, und dem in Abschnitt 1.4 Gesagten ist klar, daß * stetig in der H_k^s-Topologie ist für alle $k \geq 0$, $s \geq 1$, weshalb eine stetige Erweiterung der Adjunktion zu einer Involution

$$^* : H_k^s(\operatorname{End} E) \longrightarrow H_k^s(\operatorname{End} E)$$

existiert. Sei $\operatorname{Herm}(E)$ der reelle Vektorraum hermitescher Schnitte von $\operatorname{End} E$, $\operatorname{Herm}_k^s(E)$ der Abschluß in $H_k^s(\operatorname{End} E)$. Dann ist $\operatorname{Herm}_k^s(E)$ gerade der Eigenraum von * zum Eigenwert $+1$, $\sqrt{-1} \cdot \operatorname{Herm}_k^s(E)$ ("antihermitesche Endomorphismen") der Eigenraum zum Eigenwert -1 und $H_k^s(\operatorname{End} E)$ spaltet als reeller Banachraum in die direkte Summe

$$H_k^s(\operatorname{End} E) = \operatorname{Herm}_k^s(E) \oplus \sqrt{-1} \cdot \operatorname{Herm}_k^s(E)$$

abgeschlossener Unterräume, und zwar vermöge $\varphi = (\varphi + \varphi^*)/2 + (\varphi - \varphi^*)/2$ für $\varphi \in H_k^s(\operatorname{End} E)$.
Die Laplaceoperatoren $\Box_{\operatorname{End} E}$ und $\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}$ respektieren diese Zerlegung nicht, vielmehr gilt (σ, $\tau \in A^0(E)$, $h \in \operatorname{Herm}(E)$)

$$\begin{aligned}
\left\langle (\overline{\Box}_{\operatorname{End} E} h)\sigma, \tau \right\rangle_E &\overset{(1.18)}{=} -\operatorname{Tr}_g \left\langle (\partial^0 \bar\partial h)\sigma, \tau \right\rangle_E \overset{(1.24)}{=} -\operatorname{Tr}_g \left\langle \sigma, (\bar\partial \partial^0 h)\tau \right\rangle_E \\
&= -\operatorname{Tr}_g \overline{\left\langle (\bar\partial \partial^0 h)\tau, \sigma \right\rangle_E} \overset{(*)}{=} \overline{\left\langle (\operatorname{Tr}_g \bar\partial \partial^0 h)\tau, \sigma \right\rangle_E} \\
&\overset{(1.18)}{=} \langle \sigma, (\Box_{\operatorname{End} E} h)\tau \rangle_E .
\end{aligned}$$

Für $*$ sei $\eta \in A^{1,1}$, lokal $\eta = \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\bar\beta} dz^\alpha \wedge d\bar z^\beta$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_g \overline{\eta} &= -\operatorname{Tr}_g \textstyle\sum_{\alpha,\beta} \overline{\eta_{\alpha\bar\beta}} dz^\beta \wedge d\bar z^\alpha = -\sum_{\alpha,\beta} g^{\beta\bar\alpha} \overline{\eta_{\alpha\bar\beta}} \\
&= -\overline{\textstyle\sum_{\alpha,\beta} g^{\alpha\bar\beta} \eta_{\alpha\bar\beta}} = -\overline{\operatorname{Tr}_g \eta}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Mit (1.19/1.14) und (1.13) folgt daher, aus Stetigkeitsgründen sogar für alle $h \in \operatorname{Herm}_k^s(E)$, $k \geq 2$:

$$\left(\overline{\Box}_{\operatorname{End} E} h\right)^* = \Box_{\operatorname{End} E} h = \overline{\Box}_{\operatorname{End} E} h + [\operatorname{Tr}_g R_E, h], \tag{1.26}$$

und der antihermitesche Anteil von $\overline{\Box}_{\operatorname{End} E} h$ beträgt gerade $-\frac{1}{2}[\operatorname{Tr}_g R_E, h]$.

1.8 Eichtransformationen

Jeder positive (hermitesche) Endomorphismus $h \in A^0(\operatorname{End} E)$ induziert eine Metrik H auf E durch

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{(E,H)} := \langle h\sigma, \tau \rangle_E .$$

Wegen

$$\begin{aligned} \partial\langle h\sigma,\tau\rangle_E &= \langle\partial^0_E(h\sigma),\tau\rangle_E + \langle h\sigma,\bar\partial_E\tau\rangle_E \\ = \partial\langle\sigma,\tau\rangle_{(E,H)} &= \langle\partial^0_{(E,H)}\sigma,\tau\rangle_{(E,H)} + \langle\sigma,\bar\partial_E\tau\rangle_{(E,H)} \end{aligned}$$

hat der h-Zusammenhang von (E,H) die Form

$$D_{(E,H)} = \partial^0_{(E,H)} + \bar\partial_E = h^{-1}\circ\partial^0_E\circ h + \bar\partial_E = D_E + h^{-1}\partial^0 h \tag{1.27}$$

und mit der lokalen Darstellung (1.12) folgt für die Krümmung

$$R_{(E,H)} = R_E + \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h). \tag{1.28}$$

Man kann auch den folgenden Standpunkt einnehmen:
h läßt sich stets als f^*f schreiben, $f\in A^0(\mathrm{End}\,E)$ eine Eichtransformation, das heißt invertierbar. So ist etwa $f = h^{1/2}$ (siehe Definition 2.1) der eindeutige *hermitesche* Endomorphismus mit $h = f^*f$; alle anderen Lösungen entstehen durch Linksmultiplikation von f mit unitären Endomorpismen. f induziert eine (isomorphe) komplexe Struktur auf dem E zugrundeliegenden differenzierbaren Vektorraumbündel $\hat E$ vermöge

$$\bar\partial_{E^f} := f\circ\bar\partial_E\circ f^{-1}, \tag{1.29}$$

und E^f bezeichne $\hat E$ mit dieser holomorphen Struktur. Die $(1,0)$-Komponente $\partial^0_{E^f}$ des h-Zusammenhangs $D_{E^f} = \partial^0_{E^f} + \bar\partial_{E^f}$ von (E^f, H_0) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \partial\langle\sigma,\tau\rangle_E &= \partial\langle f^*\sigma, f^{-1}\tau\rangle_E \\ &= \langle\partial^0_E(f^*\sigma), f^{-1}\tau\rangle_E + \langle f^*\sigma,\bar\partial_E(f^{-1}\tau)\rangle_E \\ = \partial\langle\sigma,\tau\rangle_{E^f} &= \langle\partial^0_{E^f}\sigma,\tau\rangle_{E^f} + \langle\sigma, f\bar\partial_E(f^{-1}\tau)\rangle_{E^f} \end{aligned}$$

$(\sigma,\ \tau\in A^0(E))$ zu

$$\partial^0_{E^f} = f^{*-1}\circ\partial^0_E\circ f^*. \tag{1.30}$$

$D_{(E,H)}$ geht jetzt aus D_{E^f} durch den Isomorphismus holomorpher Vektorraumbündel $f: E\simeq E^f$ hervor:

$$D_{(E,H)} = f^{-1}\circ D_{E^f}\circ f,$$

und die Krümmung von D_{E^f} läßt sich aus (1.28) wie folgt berechnen

$$f^{-1}\circ R_{E^f}\circ f = R_{(E,H)} = R_E + \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h). \tag{1.31}$$

Die Gleichungen (1.29/1.30) verallgemeinern sich zu einer Operation der Gruppe der Eichtransformationen auf dem Raum der Zusammenhänge von $\hat E$:

$$f(D) := f^{*-1}\circ\partial^0\circ f^* + f\circ\partial^1\circ f^{-1}, \tag{1.32}$$

$D = \partial^0 + \partial^1$ ein Zusammenhang. Insbesondere ist $D_{E^f} = f(D_E)$ in dieser Schreibweise.

1.9 Abschätzungen

Fragen über das Verhalten der Laplace-Operatoren $\Box_E$ und $\overline{\Box}_E$ auf einem Vektorraumbündel E können häufig durch Betrachtung der Norm in Fragen über den Laplace-Operator $\Box$ auf gewöhnlichen Funktionen übersetzt werden. Der grundlegende Zusammenhang ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}\Box\langle\varphi,\psi\rangle_E &\overset{(1.20)}{=} \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial\partial\langle\varphi,\psi\rangle_E \overset{(1.6)}{=} \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial\left[\langle\partial^0_E\varphi,\psi\rangle_E+\langle\varphi,\bar\partial_E\psi\rangle_E\right]\\ &= \mathrm{Tr}_g\left[\langle\bar\partial_E\partial^0_E\varphi,\psi\rangle_E-\langle\partial^0_E\varphi,\partial^0_E\psi\rangle_E+\langle\bar\partial_E\varphi,\bar\partial_E\psi\rangle_E+\langle\varphi,\partial^0_E\bar\partial_E\psi\rangle_E\right]\\ &\overset{(1.18)}{=} \langle\Box_E\varphi,\psi\rangle_E-\langle\partial^0_E\varphi,\partial^0_E\psi\rangle_{\mathcal{A}^{1,0}(E)}-\langle\bar\partial_E\varphi,\bar\partial_E\psi\rangle_{\mathcal{A}^{0,1}(E)}+\langle\varphi,\overline{\Box}_E\psi\rangle_E.\end{aligned} \tag{1.33}$$

Man beachte die Vorzeichenwechsel durch Vertauschung von 1-Formen und die Gleichung (siehe $*$ vor (1.25))

$$\mathrm{Tr}_g\,\langle\varphi,\partial^0_E\bar\partial_E\psi\rangle_E=\langle\varphi,-\mathrm{Tr}_g\,\partial^0_E\bar\partial_E\psi\rangle_E=\langle\varphi,\overline{\Box}_E\psi\rangle_E.$$

Für $\varphi=\psi$ spezialisiert sich (1.33) zu

$$\Box|\psi|^2_E\le\langle\Box_E\psi,\psi\rangle_E+\langle\psi,\overline{\Box}_E\psi\rangle_E, \tag{1.34}$$

und für holomorphe Schnitte $\varphi\in\Gamma(E)$ (das heißt $\bar\partial_E\varphi=0$) bekommt man zusammen mit (1.19) die Bochner-Formel

$$\Box|\varphi|^2_E=\langle\mathrm{Tr}_g\,R_E\varphi,\varphi\rangle_E-|\partial^0_E\varphi|^2_{\mathcal{A}^{1,0}(E)}, \tag{1.35}$$

denn $\overline{\Box}_E\varphi=-\mathrm{Tr}_g\,\partial^0_E\bar\partial_E\varphi=0$.

Wenn statt E das Endomorphismenbündel $\mathrm{End}\,E$ betrachtet wird und $\psi=\psi^*$ ein hermitescher Schnitt ist, so gilt

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{Tr}_g\,R_{\mathrm{End}\,E}\psi,\psi\rangle_{\mathrm{End}\,E} &\overset{(1.13)}{=} \langle\psi\mathrm{Tr}_g\,[R_E,\psi],\mathrm{Id}_E\rangle_{\mathrm{End}\,E}\\ &\overset{(1.2)}{=} \mathrm{Tr}\,(\psi\mathrm{Tr}_g\,R_E\psi-\psi\psi\mathrm{Tr}_g\,R_E)\\ &= \mathrm{Tr}\,(\psi\mathrm{Tr}_g\,R_E\psi)-\mathrm{Tr}\,(\psi\mathrm{Tr}_g\,R_E\psi)=0,\end{aligned}$$

und mit (1.19):

$$\langle\Box_{\mathrm{End}\,E}\psi,\psi\rangle_{\mathrm{End}\,E}=\langle\overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E}\psi,\psi\rangle_{\mathrm{End}\,E}. \tag{1.36}$$

Für hermitesche $\psi\in A^0(\mathrm{End}\,E)$ vereinfacht sich (1.34) daher zu

$$\Box|\psi|^2_{\mathrm{End}\,E}\le 2\Re\mathrm{e}\langle\Box_{\mathrm{End}\,E}\psi,\psi\rangle_{\mathrm{End}\,E}=2\Re\mathrm{e}\langle\psi,\overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E}\psi\rangle_{\mathrm{End}\,E}, \tag{1.37}$$

$\Re\mathrm{e}(z)$ der Realteil von $z\in\mathbb{C}$.

1.10 Maximumprinzip, Mittelwertungleichung

Nutzbar werden obige Ungleichungen in Verbindung mit dem folgenden

Lemma 1.1 *Sei $f \in C^2(M, \mathbb{R})$, $f \geq 0$.*

1. *Wenn $\varphi \in C(M, \mathbb{R})$ und $\Box f \leq \varphi$, ferner $\hat{x} \in M$ ein Punkt, in dem f ein lokales Maximum hat, dann gilt*
$$\varphi(\hat{x}) \geq 0.$$

2. *Wenn $\Box f \leq \lambda \cdot f + \mu$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mu \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Konstante $C = C(M, g, \lambda)$ mit*
$$\|f\|_{C^0} \leq C \cdot (\|f\|_{L^1} + |\mu|)\,.$$

Beweis:

1. (Nach einem Hinweis in [Freed/Uhlenbeck, S.115]) Um den Punkt $\hat{x} \in M$ gibt es ein lokales holomorphes Koordinatensystem $(z^1, \ldots, z^n)$, bezüglich dessen die Metrik in $\hat{x}$ Standardform hat, das heißt $g_{i\bar{j}}(\hat{x}) = \delta_{ij}$.
Dann ist $-\Box f(\hat{x}) = (\mathrm{Tr}_g \partial\bar{\partial} f)(\hat{x}) = \sum_i \partial^2 f / \partial z^i \partial \bar{z}^i(\hat{x})$ gerade die Spur der Hesse-Matrix von f im Punkt $\hat{x}$. Die aber ist negativ semidefinit, weil f in $\hat{x}$ ein Maximum hat. Daher folgt
$$-\varphi(\hat{x}) \leq -\Box f(\hat{x}) \leq 0.$$

2. Einen Beweis für allgemeinere elliptische Operatoren (hier betrachtet man $-\Box + \lambda$) in Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ findet man in [Gilbarg/Trüdinger, Theorem 9.20]. Es ist klar, wie das lokale Ergebnis global auf M auszudehnen ist. $\diamond$

Der erste Teil wird manchmal als "Maximumprinzip" zitiert. Darunter versteht man die Eigenschaft von gewissen elliptischen Differentialoperatoren L (hier für $L = -\Box$) für nichtkonstante Sublösungen (das sind Funktionen f mit $Lf \geq 0$) keine Maxima im Inneren ihres Definitionsbereiches zuzulassen, siehe zum Beispiel [Gilbarg/Trüdinger, Chapter 3, 8, 9 etc.].
Teil 2 ist eine Verallgemeinerung der bekannten Mittelwertungleichung des Laplace-Operators im $\mathbb{R}^N$, nach der subharmonische Funktionen durch das Integralmittel über Kugelumgebungen nach oben beschränkt sind.

1.11 Hermite-Einstein-Metrik

Die mittlere Krümmung $K = K(D)$ eines Zusammenhangs D berechnet sich durch Kontraktion des Krümmungstensors R mit der Kähler-Form:

$$K := \mathrm{Tr}_g R \in A^0(\mathrm{End}\, E).$$

Wenn $D = D_{(E,H)}$ ein h-Zusammenhang ist, so ist K hermitesch bezüglich H, weil R bezüglich eines unitären r-Beins durch eine schiefhermitesche Matrix von $(1,1)$-Formen dargestellt wird (siehe 1.25).

Definition 1.2 *Eine Metrik H eines holomorphen Vektorraumbündels E heißt Hermite-Einstein-Metrik, falls die mittlere Krümmung $K_{(E,H)}$ des h-Zusammenhangs von (E,H) eine Homothetie ist:*

$$K_{(E,H)} = \mu \cdot \mathrm{Id}_E \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

Id_E *der Identitätsendomorphismus von E.*

Bemerkung 1.3

1. Diese Definition hängt von der holomorphen Struktur auf E und der Kähler-Form Φ ab.

2. Wenn H eine Hermite-Einstein-Metrik ist, dann auch $c \cdot H_0$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Dies folgt sofort aus der entsprechenden Invarianz der Krümmung (1.28). Bis auf diese Konstante ist eine Hermite-Einstein-Metrik jedoch eindeutig, falls E einfach ist, das heißt $\mathrm{End}\, E$ nur die trivialen holomorphen Schnitte $c \cdot \mathrm{Id}_E$ besitzt [Kobayashi, Proposition VI.3.37,d und Proposition VI.3.28].

3. Die Konstante μ ist notwendig reell, weil $\mathrm{Tr}_g R$ hermitesch ist.

4. Statt einer Konstanten könnte man auch reellwertige Funktionen zulassen, durch eine bis auf eine multiplikative reelle Konstante eindeutige konforme Änderung der Metrik $H_0 \to e^{\varphi} \cdot H_0$, $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ erhält man immer eine Hermite-Einstein-Metrik im obigen Sinne [Kobayashi, Proposition IV.2.4].

5. $\mu = \mu(E)$ ist eine topologische Invariante von E, im wesentlichen die erste Chern-Zahl:

$$\begin{aligned}
\int_M c_1(E) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} &= \int_M \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \mathrm{Tr}\, R_E \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\overset{(1.14)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_M \mathrm{Tr}_g \mathrm{Tr}\, R_E \cdot \frac{\Phi^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2\pi} \mu \cdot \mathrm{Rang}(E) \cdot \mathrm{Vol}(M),
\end{aligned}$$

und mit

$$\mathrm{Deg}_\Phi(E) := \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M c_1(E) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.38}$$

(Grad von E bezüglich der Kähler-Form Φ) folgt

$$\mu(E) = \mathrm{Deg}_\Phi(E)/\mathrm{Rang}(E). \tag{1.39}$$

◇

1.12 Stabilität von Vektorraumbündeln

In der algebraischen Geometrie kennt man verschiedene Definitionen der Stabilität von Vektorraumbündeln, die unter anderem eingeführt wurden, um "gute" Modulräume gewisser generischer Vektorraumbündel zu bekommen.
Der Stabilitätsbegriff von Takemoto/Mumford läßt sich sofort auf kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Zur Definition benötigt man eine Verallgemeinerung des Φ-Grades (Bemerkung 1.3,5) auf torsionsfreie kohärente analytische Garben $\mathcal{F}$: Sei k der Rang von $\mathcal{F}$. Dann ist $(\bigwedge^k \mathcal{F})^{**}$ lokal-frei vom Rang 1 [Kobayashi, Proposition V.6.10], das entsprechende Geradenbündel werde mit $\det \mathcal{F}$ (Determinantenbündel von $\mathcal{F}$) bezeichnet. Es sei

$$\mathrm{Deg}_\Phi(\mathcal{F}) := \mathrm{Deg}_\Phi(\det \mathcal{F}) = \frac{2\pi}{\mathrm{Vol}(M)} \int_M c_1(\det \mathcal{F}) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \tag{1.40}$$

der Φ-Grad von $\mathcal{F}$ und

$$\mu(\mathcal{F}) := \mathrm{Deg}_\Phi(\mathcal{F})/\mathrm{Rang}(\mathcal{F}) \tag{1.41}$$

heiße normierter Grad von $\mathcal{F}$. Man bemerke, daß für holomorphe Vektorraumbündel $\mathrm{Deg}_\Phi(E) = \mathrm{Deg}_\Phi(\mathcal{O}(E))$ gilt, so daß diese Definitionen verträglich sind mit der Identifikation von lokal-freien Garben und Vektorraumbündeln.

Definition 1.4 *Ein holomorphes Vektorraumbündel E über M heiße (Φ-) stabil, falls für alle kohärenten Untergarben $\mathcal{F}$ von $\mathcal{O}(E)$,* $0 < \mathrm{Rang}(\mathcal{F}) < \mathrm{Rang}(E)$

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(E)$$

gilt.

Bemerkung 1.5 Weil der Grad einer Torsionsgarbe stets positiv ist [Kobayashi, Lemma V.7.5], und sich Deg_Φ additiv bei exakten Sequenzen verhält, wird durch den Kern der kanonischen Abbildung $\mathcal{O}(E) \to \mathcal{Q}/\mathcal{T}$, $\mathcal{Q} := \mathcal{O}(E)/\mathcal{F}$ die Quotientengarbe von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{T}$ die Torsionsuntergarbe von $\mathcal{Q}$, eine kohärente Untergarbe $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{O}(E)$ mit $\mu(\mathcal{F}') \geq \mu(\mathcal{F})$ gegeben. Man darf sich zum Test der Stabilität daher auf kohärente Untergarben mit torsionsfreier Quotientengarbe beschränken [Kobayashi, Proposition V.7.6]. In der Konstruktion der Untergarbe in Kapitel 5 wird diese Eigenschaft implizit genutzt werden (siehe Satz 5.6). ◇

1.13 Kobayashi-Hitchin-Vermutung

Hermite-Einstein-Metriken wurden eingeführt, um eine differentialgeometrische Interpretation von Stabilität zu geben. Tatsächlich gilt folgendes

Theorem 1.6 (Kobayashi-Hitchin-Vermutung)
Ein holomorphes Vektorraumbündel E über einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit M ist genau dann Φ-stabil, wenn es irreduzibel ist und eine Hermite-Einstein-Metrik (bezüglich der Kähler-Form Φ) zuläßt.

Irreduzibel bedeutet hier, daß E nicht direkte Summe echter holomorpher Unterbündel ist. Wenn $\dim M = 1$ ist, geht dies auf einen Satz von Narasimhan und Seshadri über projektiv flache Bündel über Riemannschen Flächen zurück, siehe [Kobayashi, Theorem V.2.7]. Die Implikation "irreduzibel Hermite-Einstein $\Longrightarrow$ stabil" wurde zuerst von Kobayashi bewiesen, ein einfacher Beweis stammt von Lübke [Kobayashi, Theorem V.8.3].
Donaldson bewies die Existenz einer Hermite-Einstein-Metrik auf stabilen Vektorraumbündeln für den Fall einer algebraischen Fläche (später für beliebige algebraische Mannigfaltigkeiten) mit der "Methode des steilsten Abfalls" [Donaldson 1]. Für die Konvergenz seiner Methode benötigt man Beschränktheit des entsprechenden Funktionals. Dazu benutzt er ein Resultat von Mehta-Ramanathan über die Stabilität von Einschränkungen stabiler Vektorraumbündel auf generische Hyperflächenschnitte hinreichend hohen Grades und Induktion nach der Dimension der Mannigfaltigkeit. Den Induktionsanfang liefert der Satz von Narasimhan und Seshadri.

Den allgemeinen Fall behandelten schließlich Uhlenbeck und Yau, deren Beweis im folgenden ausgeführt wird. Auf einige Änderungen gegenüber dem ursprünglichen Beweis sei hingewiesen:
Für die lokalen Rechnungen (Lemmata 3.6, 4.1 und 4.2) benötigt man lokale Diagonalisierbarkeit eines hermiteschen Schnitts des Endomorphismenbündels. Daß dies entgegen verbreiteter Auffassung [Uhlenbeck/Yau], [Itoh/Nakajima] im allgemeinen nicht möglich ist, zeigt das Beispiel in Bemerkung 2.2. Immerhin läßt sich lokale Diagonalisierbarkeit auf einer offenen dichten Menge $W \subset M$ beweisen (Lemma 3.5,1), und ein Stetigkeitsargument überträgt sämtliche über W gültigen Abschätzungen auf M.
Standard in der Theorie partieller Differentialgleichungen hingegen sind der Beweis der Differenzierbarkeit der Abbildung L (Lemma 3.2, Anhang 1) und die Regularitätsaussage Lemma 3.8, die im Originalartikel ebenfalls nicht enthalten sind. Es stellt sich heraus, daß der geeignete Definitionsbereich von L gerade der Raum $\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ ist (siehe zu Beginn von Kapitel 3). Dessen glatte Element sind genau die positiv definiten Endomorphismen (Lemma 3.1), so daß Lösungen einer deformierten Gleichung stets positiv definit sind (Lemma 3.8).

Neu ist auch der Beweis der Surjektivität der linearisierten Abbildung mit Hilfe von Fredholm-Theorie (Satz 3.7) (vgl. aber [Kobayashi, Lemma VI.6.5]). Ein Hindernis dabei ist, daß L die Zerlegung von $A^0(\mathrm{End}\,E)$ in hermiteschen und antihermiteschen Anteil nicht respektiert, was jedoch durch Linksmultiplikation mit h behoben werden kann (Abschnitt 1.7, Lemma 3.2, Satz 3.7). Eine ähnliche Korrektur taucht auch in [Itoh/Nakajima] auf.
Geändert wurden auch die Beweise von Lemma 4.1,1 und Lemma 4.2, obgleich die Idee beibehalten wurde. Unter anderem bemühte ich mich um eine weitgehend koordinatenfreie Formulierung, die hoffentlich das Verständnis erleichtert. Daß die Einführung des zweiten Störparameters (σ in [Uhlenbeck/Yau]) vermieden werden konnte, verdanke ich dem Artikel von Itoh und Nakajima [Itoh/Nakajima, S.51] (siehe Lemma 2.3,2).
Der erste Teil des fünften Abschnitts wurde [Itoh/Nakajima] entnommen (vgl. aber auch [Uhlenbeck/Yau, §5] und [Donaldson 1, S.22f]). Hier wurden vor allem ein paar Konvergenzargumente eingefügt (Bemerkung 5.3,4 und 5.3,5, die Lemmata 5.4,2 und 5.5 sowie Satz 5.9).
Nicht eingegangen wird auf den Beweis des Kompaktheitssatzes von Uhlenbeck (Satz 5.2), dies würde den Rahmen der Arbeit auch überschreiten. Der größte Teil des Beweises, im wesentlichen reelle Analysis, findet man in [Itoh/Nakajima], wo auch Literaturstellen für das dann noch fehlende Standardargument angegeben sind.
Zur Erweiterung der Garbe (Satz 5.6 und Anhang 2) verwende ich etablierte Techniken der komplexen Analysis [Siu]. Dennoch gebe ich an dieser Stelle vollständige Beweise, weil sie ganz elementare Methoden verwenden und die Bedeutung der eingehenden Voraussetzungen erläutern.
Satz 5.9 schließlich geht wieder auf [Itoh/Nakajima] zurück. Neu ist jedoch die Verwendung einer singulären Metrik, um die Chernzahl der konstruierten Garbe handhaben zu können.

2 Die Kontinuumsmethode

Eine Metrik H auf dem holomorphen Vektorraumbündel E ist genau dann Hermite-Einstein, wenn

(2.1) $$K_{(E,H)} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E = 0,$$

$\mu \in \mathbb{R}$ eine topologische Konstante von E und $K_{(E,H)} = \mathrm{Tr}_g R_{(E,H)}$ die mittlere Krümmung des h-Zusammenhangs von (E, H). Das ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf dem Raum der Metriken von E. Die fixierte Metrik H_0 auf $E = (E, H_0)$ ermöglicht die Identifikation der Metriken mit dem Raum $\mathrm{Herm}^+(E)$ der (bezüglich H_0) punktweise positiv definiten hermiteschen C^∞-Schnitte von $\mathrm{End}\, E$; und zwar gehört zu jeder Metrik H genau das $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ mit

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{(E,H)} = \langle h\sigma, \tau \rangle_E \qquad \text{für } \sigma, \tau \in A^0(E).$$

Lokal bedeutet das in Matrixschreibweise

(2.2) $$H = {}^T h \cdot H_0,$$

und für die mittleren Krümmungen gilt gemäß (1.28)

(2.3) $$K_{(E,H)} = \mathrm{Tr}_g R_{(E,H)} = K_E + \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1} \partial^0 h).$$

Wenn

$$K^0 := K_E - \mu \cdot \mathrm{Id}_E \in A^0(\mathrm{End}\, E)$$

den (im Integralmittel) spurfreien Anteil der mittleren Krümmung von H_0 bezeichnet, so schreibt sich die Hermite-Einstein-Gleichung (2.1) auf $\mathrm{Herm}^+(E)$ als

(2.4) $$K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1} \partial^0 h) = 0.$$

Um die Existenz einer Lösung für diese Gleichung zu zeigen, wird eine Kontinuumsmethode angewendet. Allgemein betrachtet man dabei differenzierbare Deformationen $\{L_\varepsilon = 0\}_{\varepsilon \in [0,1]}$ einer zu lösenden Gleichung $L_0 = 0$, so daß $L_1 = 0$ sicher eine Lösung besitzt. Man versucht eine Lösung h_1 dieser Gleichung durch eine einparametrige Familie $\{h_\varepsilon\}$, $L_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$ zu einer Lösung für $\varepsilon = 0$ zu verformen.
Genauer ist für

$$J = \{\varepsilon \in [0,1] \mid \exists h \in C^1([\varepsilon, 1], \mathrm{Herm}^+(E)) : h(1) = h_1, L_{\varepsilon'}(h(\varepsilon')) = 0 \; \forall \varepsilon' \in [\varepsilon, 1]\}$$

folgendes Programm durchzuführen:

1. $J \subset [0,1]$ ist offen, wozu die Invertierbarkeit des linearisierten Operators auf einem geeigneten Banachraum gezeigt werden muß (dann den Satz über implizite Funktionen anwenden).

2. J ist abgeschlossen, das heißt Konvergenz einer differenzierbaren Familie von Lösungen (hier braucht man a priori-Abschätzungen für die Norm einer Lösung).

Im vorliegenden Fall betrachte ich (vgl.2.4)

$$
(2.5) \qquad \begin{aligned} L_\varepsilon(h) &:= K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h) + \varepsilon \ln h, \\ &\overset{(2.2/2.3)}{=} K_{(E,\,\tau_h \cdot H_0)} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E + \varepsilon \ln h, \qquad \varepsilon \in [0,1]. \end{aligned}
$$

Der Logarithmus ist wie folgt zu verstehen:

Definition 2.1 *Auf der offenen Menge der Endomorphismen des* $\mathbb{C}^r$ *mit Eigenwerten in* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ *kann der Logarithmus durch*

$$
\ln\varphi := (\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^r}) \cdot \int_0^1 [t(\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^r}) + \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^r}]^{-1}\, dt,
$$

für $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^r$, $\mathrm{Spec}\,\varphi \cap \mathbb{R}_{\leq 0} = \emptyset$ *erklärt werden. Die Bedingung an das Spektrum von* φ *sorgt für Stetigkeit des Integranden. Man überzeugt sich, daß dies eine holomorphe Fortsetzung der üblichen Potenzreihenentwicklung um die Identität*

$$
\ln\varphi = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} (\varphi - \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^r})^\nu
$$

ist. Daher ist die Einschränkung des Logarithmus auf $\mathrm{Herm}^+(\mathbb{C}^r)$ *reell analytisch und für* $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ *definiert man* $\ln h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ *lokal auf* $U \subset M$ *mit* $E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^r$ *durch die punktweise Komposition*

$$
U \xrightarrow{h} \mathrm{Herm}^+(\mathbb{C}^r) \xrightarrow{\ln} \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^r),
$$

$\mathrm{Herm}(\mathbb{C}^r)$ *die hermiteschen Endomorphismen.*
In Abschnitt 1.8 wurde schon die Wurzel von $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ *betrachtet, die man jetzt einfach als*

$$
h^{1/2} := \exp\left(\frac{\ln h}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\ln h}{2}\right)^\nu
$$

schreiben kann.

Aus der Definition folgt sofort die Äquivarianz des Logarithmus bezüglich der Operation der Eichtransformationsgruppe auf $A^0(\mathrm{End}\,E)$ bzw. $\mathrm{Herm}^+(E)$:

$$
(2.6) \qquad f \circ \ln h \circ f^{-1} = \ln(f \circ h \circ f^{-1}),
$$

$f \in A^0(\mathrm{End}\,E)$ invertierbar.

Bemerkung 2.2
Allgemein könnte man jeder glatten Funktion $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \mathrm{Herm}^+(E) \longrightarrow C^0(\mathrm{End}\, E)$$

zuordnen mit $\tilde{\varphi}(\lambda \cdot \mathrm{Id}_E) = \varphi(\lambda) \cdot \mathrm{Id}_E$, indem man φ punktweise auf die Eigenwerte wirken läßt. Mit anderen Worten: Zu $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ und $x \in M$ wählt man ein r-Bein $(e_1, \dots, e_r)$ um x, das h in x diagonalisiert

$$h(x) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i} e_i(x) \otimes f^i(x),$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(f^1, \dots, f^r)$ das duale r-Bein. Man setzt

$$\tilde{\varphi}(h)(x) := \sum_{i=1}^{r} \varphi(e^{\lambda_i}) e_i(x) \otimes f^i(x).$$

Zum Beweis der Differenzierbarkeit von $\tilde{\varphi}$ möchte man diese punktweise Definition auf eine Umgebung von x ausgedehnt sehen. Daß dies nicht immer möglich ist, es vielmehr (topologische) Hindernisse gegen die lokale Diagonalisierbarkeit von endomorphismenwertigen Funktionen gibt, zeigt das folgende Beispiel.

Man betrachte den Endomorphismus des trivialen 2-Bündels über $\mathbb{C}$:

$$h(z) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, z = Re^{i\varphi} \in \mathbb{C}.$$

h hat in $z = Re^{i\varphi} \neq 0$ die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin\varphi/2 \\ \cos\varphi/2 \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten R bzw. $-R$. Ein Umlauf um den Nullpunkt transformiert v und w gerade in ihr Negatives, so daß keine Umgebung des Nullpunkts existiert, in der sich die Eigenvektoren auch nur stetig definieren ließen.
Analog können sogar Endomorphismen konstruiert werden, deren *Eigenwerte* bei Umlaufen des Nullpunkts permutiert werden.

Immerhin gibt es zu jedem Punkt $x \in M$ mit der Eigenschaft, daß die Vielfachheiten der Eigenwerte von h in einer ganzen Umgebung konstant bleiben, eine offene Umgebung V, so daß $h|_V$ unitär diagonalisiert werden kann. In Lemma 3.5,1 wird dies ausgenutzt werden, um lokale Diagonalisierbarkeit zumindest auf einer offenen dichten Teilmenge $W \subset M$ zu zeigen, wodurch die lokalen Rechnungen in Kapitel 3 und 4 erst möglich werden. $\diamond$

Das folgende Lemma stellt ein paar Eigenschaften von L_ε zusammen, unter anderem die Lösbarkeit von $L_1 = 0$.

Lemma 2.3 *1.* $\mathrm{Tr}\, L_\varepsilon(h) = \mathrm{Tr}\, K^0 + \Box \mathrm{Tr}\ln h + \varepsilon \mathrm{Tr}\ln h$, *(*$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}\, E \to \mathbb{C}$ *die Spurabbildung).*

2. Die Hintergrundsmetrik H_0 *kann so gewählt werden, daß*

$$\mathrm{Tr}\, K^0 = 0$$

ist, und ein $h_1 \in \mathrm{Herm}^+(E)$ *existiert mit*

$$L_1(h_1) = 0.$$

3. Wenn $\mathrm{Tr}\, K^0 = 0$ *und* $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ *eine Lösung von* $L_\varepsilon(h) = 0$ *ist mit* $\varepsilon > 0$*, so gilt*

$$\det h = 1.$$

Beweis:

1. Die Behauptung folgt aus der Definition von $L_\varepsilon(h)$ (2.5) durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right] &= \mathrm{Tr}\, K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar\partial(\mathrm{Tr}\, h^{-1}\partial^0 h) \\ &\overset{(*)}{=} \mathrm{Tr}\, K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar\partial\partial \mathrm{Tr}\ln h \\ &\overset{(1.20)}{=} \mathrm{Tr}\, K^0 + \Box \mathrm{Tr}\ln h. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt $*$: Wegen des lokalen Charakters der Aussage darf h als matrixwertige Funktion angenommen werden. Allgemein gilt

$$e^{\mathrm{Tr}\ln h} = \det h$$

und für matrixwertige Funktionen

$$\partial(\det h) = (\det h) \cdot \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial h), \tag{2.7}$$

daher

$$\partial(\mathrm{Tr}\ln h) = \partial \ln(\det h) = (\det h)^{-1}\partial(\det h) = \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial h);$$

das ist $*$, denn

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial^0 h) &\overset{(1.9)}{=} \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial h + h^{-1}[\omega, h]) \\ &= \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial h) + \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\omega h - \omega) = \mathrm{Tr}\,(h^{-1}\partial h). \end{aligned}$$

2. [Uhlenbeck/Yau, Proposition 2.1] und [Itoh/Nakajima, S.51]. Bei einer konformen Änderung der Metrik $H_0' := e^{\varphi} \cdot H_0$, $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, zeigt 1 mit $h = e^{\varphi} \cdot \mathrm{Id}_E$
$$\mathrm{Tr}\, K^{0'} = \mathrm{Tr}\, L_0(h) = \mathrm{Tr}\, K^0 + \mathrm{Rang}(E) \cdot \Box\varphi.$$
Nach dem Hodge-Theorem gibt es nun genau dann eine Funktion $\psi \in A^0$ mit $\Box\psi = -\mathrm{Tr}\, K^0/\mathrm{Rang}(E)$, wenn $-\mathrm{Tr}\, K^0/\mathrm{Rang}(E)$ senkrecht in $L^2(M)$ auf allen harmonischen (also konstanten) Funktionen der kompakten Mannigfaltigkeit M steht; man rechnet
$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{Tr}\, K^0 \frac{\Phi^n}{n!} &= \int_M \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_g R_E)\frac{\Phi^n}{n!} - \int_M \mathrm{Tr}(\mu \cdot \mathrm{Id}_E)\frac{\Phi^n}{n!} \\ &\overset{(1.14)}{=} \int_M \sqrt{-1}\mathrm{Tr}(R_E) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} - \mathrm{Rang}(E) \cdot \mu \cdot \mathrm{Vol}(M) \\ &\overset{(1.38)}{=} \mathrm{Vol}(M) \cdot \mathrm{Deg}_\Phi(E) - \mathrm{Rang}(E) \cdot \mu \cdot \mathrm{Vol}(M) \overset{(1.39)}{=} 0.\end{aligned}$$
Sei $\psi \in A^0$ eine so erhaltene Lösung. Weil die mittlere Krümmung K' von H_0' hermitesch ist (bezüglich H_0', siehe zu Beginn von Abschnitt 1.11), ist $\mathrm{Tr}\, K^{0'} = \mathrm{Tr}\, K' - \mu \cdot \mathrm{Rang}(E)$ reell und wegen $\Re\mathrm{e}\Box\psi = \Box\Re\mathrm{e}\psi$ induziert $\varphi := \Re\mathrm{e}\psi$ eine Hintergrundsmetrik mit spurfreiem $K^{0'}$.
Man setzt als Hintergrundsmetrik schließlich $\hat{H}_0 := {}^T(\exp K^{0'}) \cdot H_0'$ und verifiziert $\hat{L}_1(h) = 0$ für $h = \exp(-K^{0'}) \in \mathrm{Herm}^+(E)$, wenn $\hat{L}_\varepsilon$ das Funktional (2.5) mit der Metrik $\hat{H}_0$ bezeichnet:
$$\begin{aligned}\hat{L}_1(h) &\overset{(2.5)}{=} K_{(E,\, {}^T h \cdot \hat{H}_0)} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E + \ln(\exp(-K^{0'})) \\ &= K_{(E, H_0')} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E - K^{0'} = K^{0'} - K^{0'} = 0.\end{aligned}$$
Ferner ist auch $\hat{K^0} = K_{(E,\, {}^T h^{-1} \cdot H_0')} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E$ spurfrei (L_0' ist (2.5) mit der Metrik H_0'):
$$\mathrm{Tr}\, \hat{K^0} = \mathrm{Tr}\, L_0'(\exp(K^{0'})) \overset{1}{=} \mathrm{Tr}\, K^{0'} + \Box\mathrm{Tr}\, \ln(\exp(K^{0'})) = 0.$$

3. Für spurfreies K^0 erfüllt $\mathrm{Tr}\ln h$ nach 1 die Gleichung $\Box\mathrm{Tr}\ln h = -\varepsilon\mathrm{Tr}\ln h$, $-\varepsilon < 0$. Der Laplaceoperator hat aber nur positive Eigenwerte, $\mathrm{Tr}\ln h$ muß identisch verschwinden, deshalb
$$\det h = e^{\mathrm{Tr}\ln h} = 1.$$

◇

Im folgenden seien die Hintergrundsmetrik H_0 und die Funktion $h_1 \in \mathrm{Herm}^+(E)$ in der Definition von J wie in Lemma 2.3,2 gewählt.

Bemerkung 2.4 Mit h ist auch jedes positive Vielfache von h Lösung der Hermite-Einstein-Gleichung (2.4). Die Normierung $\det h_\varepsilon = 1$ für Lösungen der deformierten

Gleichungen behebt daher Konvergenzprobleme, die durch Anwachsen der Determinante in einer Folge von Lösungen $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon \to 0}$ verursacht würden. Implizit wird das in die a priori-Abschätzungen des vierten Abschnitts eingehen.
Ferner garantiert die Normierung, daß der Limes der induzierten Folge von Metriken $H_\varepsilon = {}^T h_\varepsilon \cdot H_0$ wieder eine Metrik ist. $\diamond$

3 J ist offen

Es soll der Satz über implizite Funktionen angewendet werden. Dazu muß L_ε zu einer Abbildung zwischen Banachräumen erweitert werden. Ich schreibe $\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ für das Innere des Abschluß von $\mathrm{Herm}^+(E)$ im reellen Banachraum $\mathrm{Herm}_k^p(E)$ (siehe Abschnitt 1.7).

Lemma 3.1 *Sei $k > 2n/p$. Dann gilt*

$$\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \cap A^0(\mathrm{End}\, E) = \mathrm{Herm}^+(E).$$

Beweis: Sei $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ und $\delta > 0$ das Minimum der Eigenwerte von h auf M, ferner sei $c_{p,k}$ die Abbildungsnorm der Sobolev-Inklusion $H_k^p(\mathrm{End}\, E) \hookrightarrow C^0(\mathrm{End}\, E)$. Für $\varphi \in \mathrm{Herm}(E)$ nahe h, etwa $\|h - \varphi\|_{H_k^p(\mathrm{End}\, E)} < \delta/c_{p,k}$, gilt mit den Bezeichnungen $\mu(x)$ und $\eta(x)$ für den kleinsten Eigenwert von φ bzw. h im Punkt $x \in M$:

$$\begin{aligned} \inf_{x\in M} \eta(x) - \inf_{x\in M} \mu(x) &\leq \sup_{x\in M} \Big(\eta(x) - \mu(x)\Big) \leq \|h - \varphi\|_{C^0(\mathrm{End}\, E)} \\ &\leq c_{p,k} \|h - \varphi\|_{H_k^p(\mathrm{End}\, E)} < \delta, \end{aligned}$$

somit $\inf_{x\in M} \mu(x) > \inf_{x\in M} \eta(x) - \delta = 0$ und $\varphi \in \mathrm{Herm}^+(E)$. Also ist h ein innerer Punkt des Abschluß von $\mathrm{Herm}^+(E)$ in $\mathrm{Herm}_k^p(E)$, das heißt $h \in \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$.
Wenn umgekehrt $h \in \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \cap A^0(\mathrm{End}\, E)$ ist, dann ist $h = h^*$ hermitesch nach Definition von $\mathrm{Herm}_k^p(E)$ (Abschnitt 1.7). Sei δ wieder das Minimum der Eigenwerte von h. Natürlich ist $\delta \geq 0$, weil h C^0-Limes von positiven Endomorphismen ist ($H_k^p(\mathrm{End}\, E) \subset C^0(\mathrm{End}\, E)$). Der Fall $\delta = 0$ ist aber ausgeschlossen, weil h dann keine Umgebung besäße, die $\mathrm{Herm}^+(E)$ dicht enthält. $\diamond$

Als nächstes wird L auf die eben eingeführten Räume $\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ erweitert:

Lemma 3.2 *Für $k - 2n/p > 1$ (so daß $H_{k-1}^p(\mathrm{End}\, E) \subset C^0(\mathrm{End}\, E)$) und $k \geq 2$ existiert eine stetig differenzierbare Erweiterung*

$$L : [0,1] \times \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \longrightarrow H_{k-2}^p(\mathrm{End}\, E)$$

der Abbildung

$$\begin{aligned} [0,1] \times \mathrm{Herm}^+(E) &\longrightarrow A^0(\mathrm{End}\, E), \\ (\varepsilon, h) &\longmapsto K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h) + \varepsilon \ln h. \end{aligned}$$

Ferner definiert $\hat{L}(\varepsilon, h) := h \cdot L(\varepsilon, h)$ eine stetig differenzierbare Abbildung

$$[0,1] \times \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \longrightarrow \mathrm{Herm}_{k-2}^p(E).$$

Beweis: Daß Inversion $h \mapsto h^{-1}$ und Logarithmus stetig differenzierbare Abbildungen von $\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ nach $H_k^p(\mathrm{End}\,E)$ induzieren, folgt lokal aus Definition 2.1 und Korollar A.2 im Anhang (sei $U \subset M$ so, daß $E|_U \simeq U \times \mathbb{C}^r$ ist bezüglich eines unitären r-Beins; setze dann $V := \mathrm{Im}(U \to \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^r), x \mapsto h(x))$, global durch Zusammenheften der Differentiale mit einer Teilung der Eins (siehe Abschnitt 1.4). $h \mapsto \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)$ läßt sich dann als Komposition von

$$\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \longrightarrow H_k^p(\mathrm{End}\,E) \times H_k^p(\mathrm{End}\,E),\ h \longmapsto (h^{-1}, h)$$

und der Abbildung

$$H_k^p(\mathrm{End}\,E) \times H_k^p(\mathrm{End}\,E) \longrightarrow H_{k-2}^p(\mathrm{End}\,E),\ (h_1, h_2) \longmapsto \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h_1\partial^0 h_2)$$

schreiben. Letztere ist stetig (Multiplikationssatz: $k-1 > 2n/p$) und reell bilinear, also sogar von der Klasse C^∞ [Lang, Proposition 1.14]. Das zeigt die Behauptung L betreffend.
Für $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ hat man

$$K^0 + \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h) \overset{(2.5)}{=} K_{(E,\tau_{h\cdot H})} - \mu\cdot\mathrm{Id}_E \overset{(1.31)}{=} f^{-1}\circ K_{E^f}\circ f - \mu\cdot\mathrm{Id}_E\,,$$

mit $f := h^{1/2}$. K_{E^f} ist als mittlere Krümmung des h-Zusammenhangs von (E^f, H_0) hermitesch bezüglich der Hintergrundsmetrik H_0 (siehe in Abschnitt 1.11), also ist auch $h\cdot(K^0 + \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)) = f\circ K_{E^f}\circ f - \mu\cdot h$ hermitesch. Ferner gilt

$$(h\cdot\ln h)^* = \ln h^*\cdot h^* = \ln h\cdot h = h\cdot\ln h.$$

weil h mit $\ln h$ vertauscht. Demnach ist $\hat L(\varepsilon, h) = h\cdot L(\varepsilon, h) \in \mathrm{Herm}(E)$ für alle $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$. Die Abbildungen

$$[0,1]\times\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \longrightarrow H_k^p(\mathrm{End}\,E)\times H_{k-2}^p(\mathrm{End}\,E),\ (\varepsilon, h) \longmapsto (h, L(\varepsilon, h))$$

und

$$H_k^p(\mathrm{End}\,E)\times H_{k-2}^p(\mathrm{End}\,E) \longrightarrow \mathrm{Herm}_{k-2}^p(E),\ (\varphi,\psi) \longmapsto \frac{1}{2}\left(\varphi\cdot\psi + (\varphi\cdot\psi)^*\right)$$

sind als Abbildungen reeller Banachräume nach dem oben Gesagten und dem Multiplikationssatz stetig differenzierbar; ihre Komposition ist aber gerade $\hat L$, weil sie mit $\hat L$ auf der dichten Menge $\mathrm{Herm}^+(E) \subset \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ übereinstimmt. $\diamond$

Bemerkung 3.3 $L_\varepsilon(h)$ wird im allgemeinen nicht hermitesch sein. Weil aber $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ invertierbar ist, sind $L(\varepsilon, h) = 0$ und $\hat L(\varepsilon, h) = 0$ äquivalent, so daß man ebenso gut $\hat L$ betrachten kann, um die lokale Fortsetzbarkeit einer Familie von Lösungen zu zeigen. Warum die Hermitizität von $\hat L$ eine wichtige Eigenschaft ist, wird in Satz 3.7 beim Beweis der Invertierbarkeit der linearisierten Abbildung klar werden. $\diamond$

Sei

$$D_2\hat{L}(\varepsilon,h) : T_h\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E) \simeq \mathrm{Herm}_k^p(E) \longrightarrow T_{\hat{L}(\varepsilon,h)}\mathrm{Herm}_{k-2}^p(E) \simeq \mathrm{Herm}_{k-2}^p(E)$$

das Differential der Abbildung $\hat{h} \mapsto \hat{L}(\varepsilon,\hat{h})$ im Punkt $h \in \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$. Wenn gezeigt werden kann, daß $D_2\hat{L}(\varepsilon,h)$ ein Isomorphismus von Banachräumen ist für alle $h \in \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ mit $\hat{L}(\varepsilon,h) = 0$, dann ist J offen nach der folgenden Version des Satzes über implizite Funktionen:

Satz 3.4 *[Lang, S.17f] Seien $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Banachräume, $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{F}$ offene Mengen, $F \in C^r(\mathcal{U}\times\mathcal{V},\mathcal{G})$, $r \geq 1$. Wenn $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}\times\mathcal{V}$ und*

$$D_2F(x_0,y_0) : T_{y_0}\mathcal{V} \longrightarrow T_{F(x_0,y_0)}\mathcal{G}$$

das Differential der Abbildung $y \mapsto F(x_0,y)$ im Punkt y_0 ein Banachraumisomorpismus ist, dann gibt es offene Mengen $U \subset \mathcal{U}$, $V \subset \mathcal{V}$ mit $(x_0,y_0) \in U\times V$ und ein eindeutiges $G \in C^r(U,V)$ mit $G(x_0) = y_0$, so daß

$$F^{-1}\left(F(x_0,y_0)\right) \cap (U\times V) = \mathrm{Graph}(G) = \Big\{(x,G(x)) \mid x \in U\Big\}.$$

Für die Berechnung des Differentials von L braucht man das folgende

Lemma 3.5 *Sei $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$ und $\eta \in \mathrm{Herm}(E) \subset T_h\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ ein Tangentialvektor an h.*

1. *Es existiert eine offene dichte Menge $W \subset M$ mit der Eigenschaft:*
   Zu jedem $x \in W$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M\times\mathbb{R}$ von $(x,0)$ und ein lokales unitäres r-Bein $(e_1,\dots,e_r)$, $e_i \in A^0(E|_U)$, sowie Funktionen $\lambda_i \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ mit

   $$h(y) + t\cdot\eta(y) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i(y,t)}e_i(y,t)\otimes f^i(y,t) \qquad \forall (y,t) \in U,$$

   $(f^1,\dots,f^r)$ das duale r-Bein zu $(e_1,\dots,e_r)$.

2. *Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0},\mathbb{R})$ und es existiere eine glatte Erweiterung zu einer Abbildung $\tilde{\varphi} : \mathrm{Herm}^+(E) \to \mathrm{Herm}(E)$ (siehe Bemerkung 2.2). Für $x \in W$ seien e_i, f^i, λ_i und U wie oben, ferner sei*

   $$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e_i(.,t) = \sum_{j=1}^r a_i^j e_j, \qquad i = 1,\dots,r.$$

   Dann gilt in U

   $$\begin{aligned}(D\tilde{\varphi})(\eta) &:= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\tilde{\varphi}(h+t\eta)\\ &= \sum_{i=1}^r \varphi'(e^{\lambda_i})e^{\lambda_i}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\lambda_i\right)e_i\otimes f^i + \sum_{i,j}\Big[\varphi(e^{\lambda_i}) - \varphi(e^{\lambda_j})\Big]a_j^i e_i\otimes f^j.\end{aligned}$$

Beweis:

1. Sei $\chi(Z) = \det((h + t \cdot \eta) - Z \cdot \mathrm{Id}_E) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, \mathbb{R}[Z])$ das charakteristische Polynom von $h + t\eta$. χ hat reelle Wurzeln, weil $h + t\eta$ hermitesch ist für alle $t \in \mathbb{R}$. Es gibt eine Zerlegung
$$M \times \mathbb{R} = \bigcup_l \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}^l, |\nu| = r} A_\nu$$
(in Multiindexschreibweise, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$, $|\nu| = \sum_{i=1}^l \nu_i$) von $M \times \mathbb{R}$ in die endlich vielen abgeschlossenen Mengen
$$A_\nu := \left\{ (x,t) \in M \times \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_l,\ \mu_i \in \mathbb{R}, \\ \chi(x,t)(Z) = \prod_{i=1}^l (Z - \mu_i)^{\nu_i}, \nu_i \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$
Man setzt
$$W := \bigcap_l \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}^l, |\nu| = r} M \setminus \partial \left(A_\nu \cap (M \times \{0\}) \right) \subset M,$$
wobei $A_\nu \cap (M \times \{0\}) \subset M \times \{0\}$ als Teilmenge von M aufgefaßt wird, ∂ der Rand in M. Weil das Komplement des Randes einer abgeschlossenen Menge nach Definition eine offene dichte Menge formt, ist W als endlicher Durchschnitt solcher Mengen ebenfalls offen und dicht. W ist gerade so definiert, daß jedes $x \in W \subset M \times \{0\}$ eine Umgebung $V \subset M \times \mathbb{R}$ besitzt, die von allen Rändern der Mengen A_ν disjunkt liegt; in V ändern sich daher die Multiplizitäten ν_i der Eigenwerte μ_i von $h + t\eta$ nicht und es existieren wohldefinierte Funktionen
$$\mu_i : V \to \mathbb{R}, \qquad i = 1, \dots, l$$
mit $\mu_1(y) < \ldots < \mu_l(y)$ die geordneten Eigenwerte von h im Punkt $y \in V$ (μ_i habe Vielfachheit ν_i in x, also in ganz V).
Um zu sehen, daß die μ_i C^∞-Funktionen sind, betrachte man die Polynome der Form
$$f(Z) = \prod_{i=1}^l (Z - \alpha_i)^{\nu_i} \in \mathbb{R}[Z]$$
mit paarweise verschiedenen α_i. Diese bilden eine l-dimensionale Untermannigfaltigkeit $P_\nu \subset \mathbb{R}[Z]$ mit globaler Parametrisierung $(\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, denn die injektive Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \kappa : Q := \left\{ (\alpha_1, \ldots \alpha_l) \in \mathbb{R}^l \mid \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j \right\} & \longrightarrow & P_\nu \\ (\alpha_1, \ldots \alpha_l) & \longmapsto & \prod_{i=1}^l (Z - \alpha_i)^{\nu_i} \end{array}$$
ist eine Immersion: Sei $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_l(t))$ eine Kurve in Q durch den Punkt $\gamma(0) = (\gamma_1, \dots, \gamma_l)$, dann gilt
$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \kappa \circ \gamma(t) = - \sum_{i=1}^l \nu_i \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_i(t) \right) (Z - \gamma_i)^{\nu_i - 1} \prod_{j \neq i} (Z - \gamma_j)^{\nu_j}$$

und die Injektivität des Differentials $D\kappa$ im Punkt $\gamma(0)$ folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Polynome $\{(Z-\gamma_i)^{\nu_i-1}\prod_{j\neq i}(Z-\gamma_j)^{\nu_j}\}_i$ (hier geht $\gamma_i \neq \gamma_j$ ein). Die Funktionen $\mu_i : V \to \mathbb{R}$ sind deshalb als Komposition der polynomwertigen Funktion χ mit den (global erklärten) Koordinatenfunktionen $\pi_i \circ \kappa^{-1} : P_\nu \to \mathbb{R}$ glatt, $\pi_i : Q \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Koordinate. Nach Konstruktion der μ_i haben die Endomorphismen $(h+t\eta) - \mu_i \mathrm{Id}_E$ konstanten Rang auf V, so daß $E^i := \mathrm{Kern}\left((h+t\eta) - \mu_i \mathrm{Id}_E\right)|_V$ (differenzierbare) Unterbündel von $E|_V$ sind, auf denen $h+t\eta$ durch Multiplikation mit μ_i operiert. Beliebige lokale Trivialisierungen der E^i setzen sich schließlich zu dem verlangten unitären r-Bein $(e_1,\dots,e_r)$ zusammen. Ferner existiert aus Stetigkeitsgründen ein $\varepsilon > 0$, so daß in $U := V \cap (M \times (-\varepsilon,\varepsilon))$ die Eigenwerte μ_i von $h+t\eta$ positiv sind, und mit $\lambda_i := \ln \mu_{\sigma(i)}$ ist die Behauptung bewiesen, wobei $\sigma : \{1,\dots,r\} \to \{1,\dots,l\}$ die Vielfachheiten der Eigenwerte berücksichtigt.

2. [Uhlenbeck/Yau, S.25f]
Man rechnet

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left(\sum_{i=1}^r \varphi(e^{\lambda_i}) e_i \otimes f^i\right) = \sum_{i=1}^r \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(e^{\lambda_i})\right) e_i \otimes f^i$$
$$+ \sum_{i=1}^r \varphi(e^{\lambda_i}) \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e_i\right) \otimes f^i + \sum_{i=1}^r \varphi(e^{\lambda_i}) e_i \otimes \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^i\right).$$

Den ersten Term der Behauptung bekommt man durch Anwendung der Kettenregel auf $\varphi(e^{\lambda_i})$ (φ' die gewöhnliche Ableitung von φ), den zweiten durch Einsetzen der Voraussetzung $\frac{d}{dt} e_i = \sum_{j=1}^r a_i^j e_j$.
Zur Berechnung von $\frac{d}{dt} f^i$ leitet man die Beziehung $f^i(e_j) = \delta_{ij}$ nach t ab:

$$0 = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(f^i(e_j)\right) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^i\right)(e_j) + f^{i\prime}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e_j\right),$$

$f^{i\prime} = f^i$ die Ableitung der linearen Abbildung $v \mapsto f^i(v)$, $v \in E_x$ (der Faser von E über dem betrachteten Punkt $x \in M$). Mit $\frac{d}{dt} e_j = \sum_{k=1}^r a_j^k e_k$ folgt

$$\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^i\right)(e_j) = -f^i\left(\sum_{k=1}^r a_j^k e_k\right) = -a_j^i,$$

das heißt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f^i = -\sum_{j=1}^r a_j^i f^j.$$

$\diamond$

Um die Offenheit von J zu beweisen, fixiere ich ein $k > n+2$ und verwende die Hilberträume $H_k^2(\mathrm{End}\, E)$. Die zum Beweis der Invertierbarkeit des Differentials $D_2 L$ benötigte Abschätzung leistet das

Lemma 3.6 [Uhlenbeck/Yau, Proposition 2.3] *Sei* $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$, $\hat{L}(\varepsilon, h) = 0$ *und* $\eta \in \mathrm{Herm}(E) \subset T_h \mathrm{Herm}_k^{2,+}(E)$. *Dann gilt*

$$\mathbb{R} \ni \left(h^{-1} \cdot D_2 \hat{L}(\varepsilon, h)(\eta), \eta h^{-1}\right)_{\mathrm{End}\, E} \geq C(m, \varepsilon) \cdot \left\| \eta h^{-1} \right\|^2_{\mathrm{End}\, E},$$

mit

$$m = \max_M |\ln h|_{\mathrm{End}\, E} = \|\ln h\|_{C^0(\mathrm{End}\, E)} \text{ und } C(m, \varepsilon) := \frac{2m}{e^{2m} - 1} \varepsilon.$$

Beweis: Für die lokalen Rechnungen seien $e_i, f^i, \lambda_i, a_i^j$ und $W \subset M$ wie in Lemma 3.5, $h = \sum_i e^{\lambda_i} e_i \otimes f^i$.
Man bildet das Skalarprodukt von

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot D_2 \hat{L}(\varepsilon, h)(\eta) &= D_2 L(\varepsilon, h)(\eta) + h^{-1}\eta \cdot L(\varepsilon, h) \;=\; D_2 L(\varepsilon, h)(\eta) \\ &= D\left(\mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta) + \varepsilon D(\ln h)(\eta) \end{aligned} \tag{3.1}$$

($L(\varepsilon, h) = h^{-1}\hat{L}(\varepsilon, h) = 0$) mit ηh^{-1} in End$E$ und schätzt die Summanden einzeln ab.

1. [Uhlenbeck/Yau, Lemma 2.3]
$$\int_M \left\langle D\left(\mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta), \eta h^{-1} \right\rangle_{\mathrm{End}\, E} \geq 0$$
Durch Rechnung:
$$\begin{aligned} D\left(\mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta) &= \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(-h^{-1}\eta h^{-1}\partial^0 h + h^{-1}\partial^0 \eta) \\ &\overset{(1.21)}{=} \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0(\eta h^{-1})h\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$
Daher gilt
$$\begin{aligned} &\int_M \left\langle D(\mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h))(\eta), \eta h^{-1} \right\rangle_{\mathrm{End}\, E} \\ &\quad= \int_M \left\langle \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}\left(h^{-1}\partial^0(\eta h^{-1})h\right), \eta h^{-1} \right\rangle_{\mathrm{End}\, E} \\ &\quad\overset{(1.17)}{=} \int_M \left\langle h^{-1}\partial^0(\eta h^{-1})h, \partial^0(\eta h^{-1}) \right\rangle_{\mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{End}\, E)} \\ &\quad\overset{(*)}{\geq} e^{-2m} \int_M \left|\partial^0(\eta h^{-1})\right|^2_{\mathcal{A}^{1,0}(\mathrm{End}\, E)} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$
$*$ folgt dabei lokal aus der expliziten Form der Metrik auf $(1,0)$-Formen (siehe Abschnitt 1.1) mit
$$m = \max_M |\ln h|_{\mathrm{End}\, E} = \max_M \sqrt{\sum_i {\lambda_i}^2} \geq \max_{M,i} |\lambda_i|,$$
λ_i die Eigenwerte von $\ln h = \sum_i \lambda_i e_i \otimes f^i$. Das zeigt 1.

2. [Uhlenbeck/Yau, Lemma 2.1]

$$\left\langle D(\ln h)(\eta), \eta h^{-1} \right\rangle_{\operatorname{End} E} \geq \frac{2m}{e^{2m}-1} \left| \eta h^{-1} \right|^2_{\operatorname{End} E}$$

Lokal gilt (siehe Lemma 3.5,2):

$$\begin{aligned} D(\ln h)(\eta) &= \sum_i \frac{d\lambda_i}{dt} e_i \otimes f^i + \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) a^i_j e_i \otimes f^j, \\ \eta h^{-1} &= (Dh)(\eta) \cdot h^{-1} \\ &= \sum_i \frac{d\lambda_i}{dt} e_i \otimes f^i + \sum_{i,j} (e^{\lambda_i - \lambda_j} - 1) a^i_j e_i \otimes f^j. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Weil $(e_1, \ldots, e_r)$ ein unitäres r-Bein ist, folgt mit (1.2)

$$\left\langle e_i \otimes f^j, e_k \otimes f^l \right\rangle_{\operatorname{End} E} = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

demnach

$$\begin{aligned} \left\langle D(\ln h)(\eta), \eta h^{-1} \right\rangle_{\operatorname{End} E} &= \sum_i \left| \frac{d\lambda_i}{dt} \right|^2 + \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j) \left(e^{\lambda_i - \lambda_j} - 1 \right) |a^i_j|^2, \\ \left\langle \eta h^{-1}, \eta h^{-1} \right\rangle_{\operatorname{End} E} &= \sum_i \left| \frac{d\lambda_i}{dt} \right|^2 + \sum_{i,j} \left(e^{\lambda_i - \lambda_j} - 1 \right)^2 |a^i_j|^2. \end{aligned}$$

Man betrachte die Funktion

$$\tau : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \ \tau(\lambda) = \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \quad \text{(stetig nach 0 fortsetzen).}$$

Folgende Eigenschaften von τ sind leicht zu verifizieren:

- $\tau(0) = 1$;
- τ ist monoton fallend für $\lambda \geq 0$,
  und monoton wachsend für $\lambda \leq 0$;
- für $\lambda \geq 0$ ist $\varphi(\lambda) = e^{-\lambda} \varphi(-\lambda) \leq \varphi(-\lambda)$.

Insbesondere gilt

$$1 \geq \frac{\lambda_i - \lambda_j}{e^{\lambda_i - \lambda_j} - 1} \geq \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{e^{|\lambda_i - \lambda_j|} - 1} \geq \frac{2m}{e^{2m} - 1},$$

so daß

$$\left\langle D(\ln h)(\eta), \eta h^{-1} \right\rangle_{\operatorname{End} E} \geq \frac{2m}{e^{2m} - 1} \cdot \left| \eta h^{-1} \right|^2_{\operatorname{End} E}, \tag{3.5}$$

auf der dichten Menge $W \subset M$, also auf ganz M und 2 ist bewiesen.

Integration der letzten Ungleichung über M zeigt zusammen mit 1 die Behauptung. $\diamond$

Das Hauptresultat dieses Abschnitts enthält der

Satz 3.7 *Sei $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[\varepsilon_0,1]}$, $\varepsilon_0 > 0$ eine stetig differenzierbare Familie in* $\mathrm{Herm}^+(E)$ *mit $L(\varepsilon, h_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$.*
Dann gibt es ein $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ und eine eindeutige Familie $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_0)}$ in $\mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$ *mit $L(\varepsilon, h_\varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$, so daß auch $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[\varepsilon_1,1]}$ stetig differenzierbar von ε abhängt.*

Beweis: Setze $h = h_{\varepsilon_0}$. Weil $\hat{L}(\varepsilon_0, h) = h \cdot L_{\varepsilon_0}(h) = 0$ ist, besagt Lemma 3.6 für die dichte Menge der glatten $\eta \in T_h\mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$:

$$\left(h^{-1} \cdot D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h)\eta, \eta h^{-1}\right)_{\mathrm{End}\,E} \geq C(m, \varepsilon_0)\left\|\eta h^{-1}\right\|^2_{\mathrm{End}\,E},$$

also für alle $\eta \in T_h\mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$. Das zeigt bereits die Injektivität von $D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h)$. Ferner beobachtet man, daß sich $D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h)$ als Summe des Operators

$$S := \mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\square}_{\mathrm{End}\,E} + \frac{1}{2}K_{\mathrm{End}\,E} : \mathrm{Herm}^2_k(E) \longrightarrow \mathrm{Herm}^2_{k-2}(E)$$

($\overline{\square}_{\mathrm{End}\,E}h + [K_E, h]/2$ ist hermitesch, wenn h hermitesch ist, siehe (1.26/1.13)) und eines Operators $T := D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h) - S$ schreiben läßt, der höchstens erste Ableitungen von η enthält:

$$\begin{aligned} D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h)(\eta) &\overset{(3.1)}{=} h \cdot D_2L(\varepsilon_0, h)(\eta) \\ &\overset{(3.2)}{=} -h \cdot \mathrm{Tr}_g\,\bar{\partial}\,(h^{-1}\eta h^{-1}\partial^0 h) + h \cdot \mathrm{Tr}_g\,\bar{\partial}(h^{-1}\partial^0\eta) + \varepsilon_0 h \cdot D(\ln h)(\eta) \\ &\overset{(1.18/1.19)}{=} \left(\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\square}_{\mathrm{End}\,E} + \tfrac{1}{2}K_{\mathrm{End}\,E}\right)\eta + T\eta = (S + T)\eta. \end{aligned}$$

$T : \mathrm{Herm}^2_k(E) \to \mathrm{Herm}^2_{k-2}(E)$ faktorisiert dann über $\mathrm{Herm}^2_{k-1}(E)$ und ist kompakt als Komposition einer stetigen Abbildung und der kompakten Einbettung $\mathrm{Herm}^2_{k-1}(E) \hookrightarrow \mathrm{Herm}^2_{k-2}(E)$.
Die natürliche Erweiterung von S zu $\tilde{S} : H^2_k(\mathrm{End}\,E) \to H^2_{k-2}(\mathrm{End}\,E)$ ist als Summe des invertierbaren Operators

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\square}_{\mathrm{End}\,E} : H^2_k(\mathrm{End}\,E) \to H^2_{k-2}(\mathrm{End}\,E)$$

und der kompakten Komposition

$$K_{\mathrm{End}\,E}/2 : H^2_k(\mathrm{End}\,E) \to H^2_k(\mathrm{End}\,E) \hookrightarrow H^2_{k-2}(\mathrm{End}\,E)$$

ein Fredholm-Operator vom Index 0, [Alt, Satz 8.15] oder [Booss/Bleecker, Exercise I.5,7]. $\tilde{S}$ respektiert aber die Zerlegung von $H^2_k(\mathrm{End}\,E)$ bzw. $H^2_{k-2}(\mathrm{End}\,E)$ in hermiteschen und antihermiteschen Anteil (siehe Abschnitt 1.7), und wegen der Linearität von $\tilde{S}$ liefert Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ Isomorphismen von $\mathrm{Kern}\,S = (\mathrm{Kern}\,\tilde{S}) \cap$

$\mathrm{Herm}^2_k(E)$ nach $(\mathrm{Kern}\,\tilde{S}) \cap \sqrt{-1} \cdot \mathrm{Herm}^2_k(E)$ bzw. zwischen den entsprechenden Kokernen. Daher ist S ebenfalls ein Fredholm-Operator vom Index 0, also auch $D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h) = S + T$, weil T kompakt ist [Booss/Bleecker, Exercise I.5,7]. Es folgt $\dim \mathrm{Kokern}\, D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h) = \dim \mathrm{Kern}\, D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h) = 0$, somit $D_2\hat{L}(\varepsilon_0, h)$ surjektiv und Stetigkeit des inversen Operators folgt aus dem Satz von Banach [Alt, Satz 6.6].
Im Punkt $h \in \mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$ kann man jetzt den Satz über implizite Funktionen (Satz 3.4) anwenden. Die so erhaltene Funktion $G \in C^1(U, V)$, $U \subset [0, 1]$, $V \subset \mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$ liefert eine Familie $\tilde{h}_\varepsilon \in \mathrm{Herm}^{2,+}_k(E)$, mit $L(\varepsilon, \tilde{h}_\varepsilon) = \tilde{h}_\varepsilon \cdot \hat{L}(\varepsilon, \tilde{h}_\varepsilon) = 0$ für ε nahe ε_0, etwa für $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_2)$. Aus der lokalen Eindeutigkeit (siehe Satz 3.4) folgt schließlich, daß $\tilde{h}_\varepsilon$ mit h_ε für $\varepsilon \in [\varepsilon_0, \varepsilon_2]$ übereinstimmt, und $h_\varepsilon := \tilde{h}_\varepsilon$ für $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)$ ist die gewünschte Erweiterung. $\diamond$

Zum Beweis der Offenheit von J (siehe Abschnitt 2) muß noch die Regularität der Fortsetzung $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_0)}$ gezeigt werden. Ich formuliere das Resultat gleich allgemein für $h \in \mathrm{Herm}^{p,+}_k(E)$, $k > 2n/p + 1$, was im nächsten Abschnitt nützlich sein wird. Der Beweis benutzt wieder die Invertierbarkeit der Operatoren $\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E}$:

Lemma 3.8 *Sei $L(\varepsilon, h) = 0$, $h \in \mathrm{Herm}^{p,+}_k(E)$, $k - 2n/p > 1$, $k \geq 2$.
Dann ist (der stetige Repräsentant von) h glatt, und $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$.*

Beweis: Man löst $L(\varepsilon, h) = K^0 + \mathrm{Tr}_g \bar{\partial}(h^{-1}\partial^0 h) + \varepsilon \ln h = 0$ nach dem Term mit der höchsten Ableitung von h auf:

$$\mathrm{Tr}_g \bar{\partial}\partial^0 h = h\left[-K^0 + \mathrm{Tr}_g h^{-1}\bar{\partial}h h^{-1}\partial^0 h - \varepsilon \ln h\right].$$

Die linke Seite ist nach (1.18/1.19) gerade $\Box_{\mathrm{End}\,E} h = (\overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E} + K_{\mathrm{End}\,E})h$, deshalb gilt

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E}\right) h &\overset{(1.13)}{=} h - [K_E, h] + \Box_{\mathrm{End}\,E} h \\ &= h - [K_E, h] + h \cdot \left(-K^0 + \mathrm{Tr}_g h^{-1}\bar{\partial}h h^{-1}\partial^0 h - \varepsilon \ln h\right).\end{aligned}$$

In der letzten Zeile tauchen nur erste Ableitungen von h auf, ferner sind Logarithmus und Inversion stetige Abbildungen in $\mathrm{Herm}^{p,+}_k(E) \subset C^0(\mathrm{End}\,E)$, deshalb ist $(\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E})h \in H^p_{k-1}(\mathrm{End}\,E)$ und die Invertierbarkeit von $\mathrm{Id}_{\mathrm{End}\,E} + \overline{\Box}_{\mathrm{End}\,E} : H^p_{k+1}(\mathrm{End}\,E) \to H^p_{k-1}(\mathrm{End}\,E)$ zeigt $h \in H^p_{k+1}(\mathrm{End}\,E)$.
Induktiv sieht man, daß $h \in H^p_l(\mathrm{End}\,E)$ für alle l ist, und der Sobolev-Einbettungssatz impliziert $h \in A^0(\mathrm{End}\,E) \cap \mathrm{Herm}^{p,+}_k(E) = \mathrm{Herm}^+(E)$ (Lemma 3.1). $\diamond$

4 J ist abgeschlossen

Sei $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]}$, $h_\varepsilon \in \mathrm{Herm}^+(E)$ eine stetig differenzierbare Familie von Lösungen: $L_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$. Gesucht ist eine stetig differenzierbare Fortsetzung nach ε_0. Dazu wird Beschränktheit der Folge $\{\|h_\varepsilon\|_{H_2^p(\mathrm{End}\,E)}\}_{\varepsilon\to\varepsilon_0}$ gezeigt, die Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge $h_\varepsilon \to h_{\varepsilon_0}$ in $H_2^p(\mathrm{End}\,E)$ impliziert. h_{ε_0} ist dann eine Lösung von $L_{\varepsilon_0} = 0$, ferner regulär nach Lemma 3.8, wenn p groß genug gewählt war.

Die Gleichung $L_\varepsilon(h_\varepsilon) = 0$ kann nach ε abgeleitet werden

$$0 = D_2L(\varepsilon, h)(\eta) + \ln h = D\left(\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta) + \varepsilon D(\ln h)(\eta) + \ln h, \tag{4.1}$$

mit $h = h_\varepsilon$ und $\eta := \frac{d}{d\hat\varepsilon}\Big|_\varepsilon h_{\hat\varepsilon} \in T_h\mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ der Tangentialvektor an die Kurve $\hat\varepsilon \mapsto h_{\hat\varepsilon}$ im Punkt h_ε (im Gegensatz zu η im vorigen Abschnitt). Die Idee ist nun, die H_2^p-Norm von η hinreichend gut abzuschätzen, um durch Integration über $(\varepsilon, 1]$ eine Schranke für $\|h_\varepsilon\|_{H_2^p(\mathrm{End}\,E)}$ zu erhalten.

Schon in Lemma 3.6 hat sich die Supremumsnorm von $\ln h$ als praktische Größe für die Abschätzungen erwiesen. Im folgenden wird $m := \|\ln h\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}$ zentrale Bedeutung erlangen, deren Beschränktheit für den Erfolg der Methode entscheidend ist. Bis jetzt ging ja noch nicht die Stabilität von E ein, so daß Hindernisse gegen die Konvergenz zu erwarten sind.

Das nächste Lemma enthält zwei a priori-Abschätzungen für m.

Lemma 4.1 *Sei $h \in \mathrm{Herm}^+(E)$, $L_\varepsilon(h) = 0$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt*

1. $\frac{1}{2}\Box|\ln h|^2_{\mathrm{End}\,E} + \varepsilon|\ln h|^2_{\mathrm{End}\,E} \le \left|K^0\right|_{\mathrm{End}\,E} \cdot |\ln h|_{\mathrm{End}\,E}$;
2. $m := \|\ln h\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)} \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|K^0\right\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}$;
3. $m \le C\cdot\left(\|\ln h\|_{\mathrm{End}\,E} + \left\|K^0\right\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}\right)$, *$C$ eine Konstante.*

Beweis:

1. Aus
$$0 = L_\varepsilon(h) = K^0 + \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h) + \varepsilon\ln h.$$
folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung
$$\begin{aligned}\left|K^0\right|_{\mathrm{End}\,E}\cdot|\ln h|_{\mathrm{End}\,E} &\ge \left|\left\langle K^0, \ln h\right\rangle_{\mathrm{End}\,E}\right| \\ &= \left|\left\langle \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h) + \varepsilon\ln h, \ln h\right\rangle_{\mathrm{End}\,E}\right|.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Seien e_i, f^i, λ_i und $W \subset M$ wie in Lemma 3.5 (mit $\eta = 0$), $h = \sum_i e^{\lambda_i} e_i \otimes f^i$. Ferner sei $\partial_E^0 e_i = \sum_j \omega_i^j e_j$ die $(1,0)$-Komponente des Zusammenhangs auf E, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \partial^0 h & \stackrel{(1.9)}{=} & \sum_i e^{\lambda_i} \partial\lambda_i e_i \otimes f^i + \sum_{i,j} e^{\lambda_i} \omega_i^j e_j \otimes f^i - \sum_{i,j} e^{\lambda_i} \omega_j^i e_i \otimes f^j \\ & = & \sum_i e^{\lambda_i} \partial\lambda_i e_i \otimes f^i + \sum_{i \neq j} (e^{\lambda_j} - e^{\lambda_i}) \omega_j^i e_i \otimes f^j, \end{array}$$

wobei ∂^0 jetzt die $(1,0)$-Komponente des Zusammenhangs auf $\operatorname{End} E$ bedeutet. Es folgt

$$\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h) = \sum_i \bar\partial\partial\lambda_i e_i \otimes f^i + \bar\partial \sum_{i \neq j} (e^{\lambda_j - \lambda_i} - 1) \omega_j^i e_i \otimes f^j,$$

und (λ_i reell, $\ln h$ hermitesch!)

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \operatorname{Tr}_g \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h), \ln h \right\rangle_{\operatorname{End} E} & = & \sum_i \operatorname{Tr}_g (\bar\partial\partial\lambda_i)\lambda_i = \operatorname{Tr}(\operatorname{Tr}_g \bar\partial\partial \ln h \cdot \ln h) \\ & = & \operatorname{Tr}\left(\operatorname{Tr}_g \bar\partial(\partial \ln h + [\omega, \ln h]) \cdot \ln h\right) \\ & \stackrel{(1.9/1.2/1.18)}{=} & \langle \Box_{\operatorname{End} E} \ln h, \ln h \rangle_{\operatorname{End} E} \stackrel{(1.37)}{\geq} \frac{1}{2} \Box |\ln h|^2_{\operatorname{End} E}, \end{array}$$

(die Skalarprodukte sind reell). Aus Stetigkeitsgründen überträgt sich diese Ungleichung von der dichten Menge W auf ganz M und Einsetzen in (4.2) zeigt Teil 1.

2. $|\ln h|_{\operatorname{End} E}$ nimmt in einem Punkt $\hat x \in M$ einen Maximalwert an. Auf die Ungleichung aus 1 wendet man das Maximumprinzip Lemma 1.1,1 an, und zwar mit $f = |\ln h|^2_{\operatorname{End} E}$, $\varphi/2 = |K^0|_{\operatorname{End} E} |\ln h|_{\operatorname{End} E} - \varepsilon |\ln h|^2_{\operatorname{End} E}$:

$$\left| K^0(\hat x) \right|_{\operatorname{End} E} - \varepsilon |\ln h(\hat x)|_{\operatorname{End} E} \geq 0,$$

das ist die Behauptung.

3. Teil 1 bedeutet insbesondere

$$\Box |\ln h|^2_{\operatorname{End} E} \leq 2 \left| K^0 \right|_{\operatorname{End} E} |\ln h|_{\operatorname{End} E} \leq \left| K^0 \right|^2_{\operatorname{End} E} + |\ln h|^2_{\operatorname{End} E},$$

und die a priori-Abschätzung Lemma 1.1,2 zeigt

$$\begin{array}{rcl} \|\ln h\|^2_{C^0(\operatorname{End} E)} & \leq & C \left(\|\ln h\|^2_{\operatorname{End} E} + \left\| K^0 \right\|^2_{C^0(\operatorname{End} E)} \right) \\ & \leq & C \left(\|\ln h\|_{\operatorname{End} E} + \left\| K^0 \right\|_{C^0(\operatorname{End} E)} \right)^2. \end{array}$$

$\diamond$

Das nächste Resultat ist eine obere Schranke für die Supremumsnorm von η als Funktion von m.

Lemma 4.2 *Sei E ein einfaches Vektorraumbündel, $\eta \in T_h \mathrm{Herm}_k^{p,+}(E)$ wie in Gleichung (4.1). Dann ist $\|\eta\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}$ durch eine Funktion von $m = \|\ln h\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}$ beschränkt:*

$$\|\eta\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)} \leq C(m).$$

Beweis: Man faßt $\mathrm{Ad}\,h^{1/2} : A^0(\mathrm{End}\,E) \to A^0(\mathrm{End}\,E)$, $\psi \mapsto h^{1/2} \circ \psi \circ h^{-1/2}$ als Eichtransformation des Endomorphismenbündels auf (siehe Abschnitt 1.8) und schreibt

$$\begin{aligned}\bar\partial_h &:= \bar\partial_{(\mathrm{End}\,E)^{\mathrm{Ad}\,h^{1/2}}} \overset{(1.29)}{=} \mathrm{Ad}\,h^{1/2} \circ \bar\partial \circ \mathrm{Ad}\,h^{-1/2},\\ \partial_h^0 &:= \partial^0_{(\mathrm{End}\,E)^{\mathrm{Ad}\,h^{1/2}}} \overset{(1.30)}{=} \mathrm{Ad}\,h^{-1/2} \circ \partial^0 \circ \mathrm{Ad}\,h^{1/2}.\end{aligned}$$

Folgende Rechnung begründet die Wahl von $\mathrm{Ad}\,h^{1/2}$ als Eichtransformation:

$$\begin{aligned}D\left(\mathrm{Tr}_g \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta) &\overset{(3.2)}{=} \mathrm{Tr}_g \bar\partial\left(h^{-1}\partial^0(\eta h^{-1})h\right)\\ &= \mathrm{Tr}_g \mathrm{Ad}\,h^{-1/2} \circ \bar\partial_h \partial_h^0 (h^{-1/2}\eta h^{-1/2})\\ &\overset{(1.18)}{=} h^{-1/2} \circ \Box^h \psi \circ h^{1/2},\end{aligned}$$

mit $\psi := h^{-1/2}\eta h^{-1/2}$ und $\Box^h$ der Laplace-Operator auf $(\mathrm{End}\,E)^{\mathrm{Ad}\,h^{1/2}}$. Demnach gilt

$$\begin{aligned}\Box|\psi|^2_{\mathrm{End}\,E} &\overset{(1.37)}{\leq} 2\Re\mathrm{e}\left\langle \Box^h\psi, \psi\right\rangle_{\mathrm{End}\,E} = 2\Re\mathrm{e}\left\langle h^{1/2} D\left(\mathrm{Tr}_g \bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta)h^{-1/2}, \psi\right\rangle_{\mathrm{End}\,E}\\ &\overset{(4.1)}{\leq} -2\Re\mathrm{e}\left\langle h^{1/2}(\ln h + \varepsilon D(\ln h))(\eta)h^{-1/2}, \psi\right\rangle_{\mathrm{End}\,E},\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}\left\langle h^{1/2} D(\ln h)(\eta) h^{-1/2}, \psi\right\rangle_{\mathrm{End}\,E} &= \mathrm{Tr}\left(h^{1/2} D(\ln h)(\eta) h^{-1}\eta h^{-1/2}\right)\\ &= \mathrm{Tr}\left(D(\ln h)(\eta)h^{-1}\eta\right) = \left\langle D(\ln h)(\eta), \eta h^{-1}\right\rangle_{\mathrm{End}\,E}\\ &\overset{(3.5)}{\geq} \frac{2m}{e^{2m}-1}\left|\eta h^{-1}\right|^2_{\mathrm{End}\,E} \geq 0;\end{aligned}$$

also ist

$$\Box|\psi|^2_{\mathrm{End}\,E} \leq -2\Re\mathrm{e}\left\langle h^{1/2} \circ \ln h \circ h^{-1/2}, \psi\right\rangle_{\mathrm{End}\,E} \overset{(2.6)}{\leq} 2m|\psi|_{\mathrm{End}\,E}.$$

Lemma 1.1,2 zeigt daher (vgl. den Beweis von Lemma 4.1,3)

$$\|\psi\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)} \leq C \cdot \left(\|\psi\|_{\mathrm{End}\,E} + m\right). \tag{4.3}$$

Es muß noch die L^2-Norm von $\psi = h^{-1/2}\eta h^{-1/2}$ eliminiert werden, wozu man Lemma 3.6 benutzt:

$$\begin{aligned}\left\|\eta h^{-1}\right\|^2_{\mathrm{End}\,E} &\leq \frac{1}{C(m,\varepsilon)}\left(D_2 L(\varepsilon,h)(\eta), \eta h^{-1}\right)_{\mathrm{End}\,E}\\ &\overset{(4.1)}{=} \frac{1}{C(m,\varepsilon)}\left(-\ln h, \eta h^{-1}\right)_{\mathrm{End}\,E}\\ &\leq \frac{1}{C(m,\varepsilon)}\|\ln h\|_{\mathrm{End}\,E} \cdot \left\|\eta h^{-1}\right\|_{\mathrm{End}\,E},\end{aligned}$$

und nach Division durch $\|\eta h^{-1}\|_{\operatorname{End} E}$ ($\neq 0$, sonst ist nichts zu beweisen) folgt

$$\|\psi\|_{\operatorname{End} E} \leq e^m \left\|\eta h^{-1}\right\|_{\operatorname{End} E} \leq \frac{m e^m}{C(m,\varepsilon)} \operatorname{Vol}(M).$$

Leider wird $C(m,\varepsilon) = 2m\varepsilon/(e^{2m}-1)$ mit ε beliebig klein. Für $\eta = dh_\varepsilon/d\varepsilon$ kann aber die Abschätzung 1 im Beweis von Lemma 3.6 verbessert werden:
Weil E ein einfaches Vektorraumbündel ist, besitzt $\operatorname{End} E$ (per definitionem) keine nichttrivialen holomorphen Schnitte. Deshalb ist auch der Kern des Laplaceoperators auf $\operatorname{End} E$ trivial, denn $\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}\varphi = 0 \iff \bar\partial\varphi = 0$ für $\varphi \in A^0(\operatorname{End} E)$:

$$\operatorname{Kern} \overline{\Box}_{\operatorname{End} E} = \{c \cdot \operatorname{Id}_E \mid c \in \mathbb{C}\}.$$

Weiter folgt aus $\det h_\varepsilon = 1$ (Lemma 2.3,3) durch Ableiten (siehe den Beweis von Lemma 2.3,1)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} \det h_\varepsilon \overset{(2.7)}{=} (\det h) \cdot \operatorname{Tr}\left(h^{-1}\frac{dh_\varepsilon}{d\varepsilon}\right) \\ &= \operatorname{Tr}(\eta h^{-1}) \overset{(1.2)}{=} \left(\eta h^{-1}, \operatorname{Id}_E\right)_{\operatorname{End} E}, \end{aligned}$$

so daß die Projektion $(\eta h^{-1}, \operatorname{Id}_E)_{\operatorname{End} E}$ von ηh^{-1} auf $\operatorname{Kern} \overline{\Box}_{\operatorname{End} E} \subset L^2(\operatorname{End} E)$ verschwindet. Das Hodge-Theorem zeigt daher

$$\begin{aligned} \left\|\partial^0(\eta h^{-1})\right\|^2_{\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)} &= \left(\Box_{\operatorname{End} E}(\eta h^{-1}), \eta h^{-1}\right)_{\operatorname{End} E} \\ &\overset{(1.36)}{=} \left(\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}(\eta h^{-1}), \eta h^{-1}\right)_{\operatorname{End} E} \geq \lambda_1 \left\|\eta h^{-1}\right\|^2_{\operatorname{End} E}, \end{aligned}$$

(man zerlege ηh^{-1} in $L^2(\operatorname{End} E)$ in Eigenfunktionen von $\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}$); hier ist λ_1 der kleinste Eigenwert $\neq 0$ von $\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}$. Durch Einsetzen in die Ungleichung (3.3) sieht man schließlich, daß $C(m,\varepsilon) \geq e^{-2m}\lambda_1 > 0$ gewählt werden kann, und insgesamt ergibt sich die behauptete Schranke für die Supremumsnorm von η:

$$\|\eta\|_{C^0(\operatorname{End} E)} \leq e^m \|\psi\|_{C^0(\operatorname{End} E)} \leq C \cdot e^m \left(\frac{m e^m}{e^{-2m}\lambda_1} \cdot \operatorname{Vol}(M) + m\right).$$

$\diamond$

Bemerkung 4.3 1. Jedes stabile Vektorraumbündel ist einfach [Kobayashi, V.7.14].

2. In den Beweis geht wesentlich die Konstanz der Determinante ein (vgl. Bemerkung 2.4). $\diamond$

Jetzt kann die Abschätzung für $\|\eta\|_{H_2^p(\operatorname{End} E)}$ bewiesen werden:

Satz 4.4 *Sei* $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]}$, $L_\varepsilon(h_\varepsilon)=0$ *für alle* $\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]$, *eine stetig differenzierbare Familie in* $\mathrm{Herm}^+(E)$. *Ferner sei* $\|\ln h_\varepsilon\|_{C^0(\operatorname{End}E)}\le m$ *uniform beschränkt.*
Dann gilt für $\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]$, $p>1$*:*

1. $\|\eta_\varepsilon\|_{H_2^p(\operatorname{End}E)}\le C(m)\left(1+\|h_\varepsilon\|_{H_2^p(\operatorname{End}E)}\right)$, $\left(\eta_\varepsilon=\left.\frac{d}{d\hat\varepsilon}\right|_{\hat\varepsilon=\varepsilon}h_{\hat\varepsilon}\right)$.

2. $\|h_\varepsilon\|_{H_2^p(\operatorname{End}E)}\le e^{C(m)(1-\varepsilon)}\left(\|h_1\|_{H_2^p(\operatorname{End}E)}+1\right)$,

$C(m)>0$ *eine von* m *abhängende Konstante.*

Beweis:

1. [Uhlenbeck/Yau, Proposition 3.2]
   Ich schreibe h,η statt $h_\varepsilon,\eta_\varepsilon$ und H_k^p, L^p, C^l für $H_k^p(\operatorname{End}E)$, $L^p(\operatorname{End}E)$ und $C^l(\operatorname{End}E)$. h und η sind durch Gleichung (4.1) verknüpft:

   $$D\left(\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta)+\varepsilon D(\ln h)(\eta)+\ln h=0.$$

   Die Differentiation im ersten Term kann ausgeführt werden

   $$\begin{aligned}D\left(\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)\right)(\eta)&=D\left[h^{-1}\mathrm{Tr}_g\,(-\bar\partial h h^{-1}\partial^0 h+\bar\partial\partial^0 h)\right](\eta)\\&=-h^{-1}\eta\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)+h^{-1}\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial\partial^0\eta\\&\quad+h^{-1}\mathrm{Tr}_g\left[-\bar\partial\eta h^{-1}\partial^0 h+\bar\partial h h^{-1}\eta h^{-1}\partial^0 h-\bar\partial h h^{-1}\partial^0\eta\right].\end{aligned}$$

   Wie im Beweis von Lemma 3.8 löst man nach $\square_{\operatorname{End}E}\eta=\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial\partial^0\eta$ auf

   $$\begin{aligned}\square_{\operatorname{End}E}\eta&=-\varepsilon hD(\ln h)(\eta)-h\ln h+\eta(K^0+\varepsilon\ln h)\\&\quad+\mathrm{Tr}_g\left[\bar\partial\eta h^{-1}\partial^0 h-\bar\partial h h^{-1}\eta h^{-1}\partial^0 h+\bar\partial h h^{-1}\partial^0\eta\right],\end{aligned}$$

   wobei noch $0=L_\varepsilon(h)=K^0+\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h^{-1}\partial^0 h)+\varepsilon\ln h$ verwendet wurde. Indem man wieder die Invertierbarkeit von $\mathrm{Id}_{\operatorname{End}E}+\overline{\square}_{\operatorname{End}E}:H_2^p(\operatorname{End}E)\to L^p(\operatorname{End}E)$ ausnützt (vgl. Lemma 3.8), schließt man außerdem

   $$\begin{aligned}\|\eta\|_{H_2^p}&\le C\cdot\left\|(\mathrm{Id}_{\operatorname{End}E}+\overline{\square}_{\operatorname{End}E})\eta\right\|_{L^p}\\&=C\cdot\|\eta-[K_E,\eta]+\square_{\operatorname{End}E}\eta\|_{L^p}\\&\le C\left(\|\eta\|_{L^p}+2\|K_E\|_{C^0}\|\eta\|_{L^p}+\|\square_{\operatorname{End}E}\eta\|_{L^p}\right),\end{aligned}$$

   und weil η durch m beschränkt ist nach Lemma 4.2, brauchen nur noch die einzelnen Terme in obiger Gleichung für $\square_{\operatorname{End}E}\eta$ behandelt zu werden. Folgende

Abschätzungen benutzen lediglich die Hölder-Ungleichung, die Definition der Sobolevnormen und die Beschränktheit von $|\eta|_{\operatorname{End} E}$:

$$\begin{aligned}
\|h \ln h\|_{L^p} &\leq m\|h\|_{L^p} \\
\left\|\eta(K^0 + \varepsilon \ln h)\right\|_{L^p} &\leq \left(\left\|K^0\right\|_{C^0} + \varepsilon m\right) \|\eta\|_{L^p} \\
\left\|\operatorname{Tr}_g \bar{\partial}\eta h^{-1}\partial^0 h\right\|_{L^p} &\leq C \cdot e^m \|\eta\|_{H_1^{2p}} \|h\|_{H_1^{2p}} \\
\left\|\operatorname{Tr}_g \bar{\partial} h h^{-1} \eta h^{-1} \partial^0 h\right\|_{L^p} &\leq C \cdot e^{2m} \|\eta\|_{C^0} \|h\|_{H_1^{2p}}^2, \\
\left\|\operatorname{Tr}_g \bar{\partial} h h^{-1} \partial^0 \eta\right\|_{L^p} &\leq C \cdot e^m \|h\|_{H_1^{2p}} \|\eta\|_{H_1^{2p}}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C = C(g)$, die von der Metrig g auf M abhängt. Ferner zeigt ein Vergleich der lokalen Darstellungen (3.4) von $D(\ln h)(\eta)$ und ηh^{-1}, daß $|D(\ln h)(\eta)|_{\operatorname{End} E}$ durch $|\eta|_{\operatorname{End} E}$ und m abgeschätzt werden kann. Insgesamt erhält man

$$\|\eta\|_{H_2^p} \leq C(m) \cdot \left(1 + \|\eta\|_{H_1^{2p}} \|h\|_{H_1^{2p}} + \|h\|_{H_1^{2p}}^2\right),$$

$C(m)$ eine nur von m abhängende Konstante. Auf der rechten Seite möchte man die H_1^{2p}-Normen durch H_2^p-Normen ersetzen. Ein Resultat aus der Interpolationstheorie liefert genau die gewünschte Abschätzung:

$$\|\eta\|_{H_1^{2p}} \leq C \cdot \|\eta\|_{L^\infty}^{1/2} \|\eta\|_{H_2^p}^{1/2} + \|\eta\|_{L^{2p}},$$

(siehe [Aubin, Theorem 3.69], dort ist sogar die Konstante C explizit angegeben), ebenso für h. Wenn man noch die Beschränktheit von $|\eta|_{\operatorname{End} E}$ ausnützt, schreibt sich obige Gleichung als

$$\|\eta\|_{H_2^p} \leq C(m) \cdot \left(1 + \|\eta\|_{H_2^p}^{1/2} \|h\|_{H_2^p}^{1/2} + \|h\|_{H_2^p}\right),$$

mit einer geänderten Konstanten $C(m)$. Die Youngsche Ungleichung

$$2xy \leq \frac{x^2}{c^2} + c^2 y^2, \qquad x, y, c \in \mathbb{R}$$

mit $x = \|\eta\|_{H_2^p}^{1/2}$, $y = \|h\|_{H_2^p}^{1/2}$ und $c = \sqrt{C(m)}$ zeigt schließlich

$$\|\eta\|_{H_2^p} \leq C(m) \cdot \left(1 + \frac{1}{2C(m)} \|\eta\|_{H_2^p} + \frac{C(m)}{2} \|h\|_{H_2^p} + \|h\|_{H_2^p}\right),$$

und Subtraktion von $\|\eta\|_{H_2^p}/2$ beendet den Beweis.

2. Die Ungleichung aus 1 ist eine Differentialungleichung für $f(\varepsilon) := \|h_\varepsilon\|_{H_2^p}$:

$$|f'(\hat{\varepsilon})| \leq C(m) \cdot (f(\hat{\varepsilon}) + 1) \qquad \text{für } \hat{\varepsilon} \in (\varepsilon_0, 1].$$

Nach Division durch $(f(\hat{\varepsilon})+1)$ wird über das Intervall $(\varepsilon,1]$ integriert:

$$\begin{aligned}\ln\left(f(\hat{\varepsilon})+1\right)\big|_{\varepsilon}^{1} &= \int_{\varepsilon}^{1}\frac{f'(\hat{\varepsilon})}{f(\hat{\varepsilon})+1}d\hat{\varepsilon}\\ &\leq \int_{\varepsilon}^{1}\frac{|f'(\hat{\varepsilon})|}{f(\hat{\varepsilon})+1}d\hat{\varepsilon}\leq C(m)(1-\varepsilon),\end{aligned}$$

und das ist die behauptete Ungleichung

$$f(\varepsilon)\leq e^{C(m)(1-\varepsilon)}\left(f(1)+1\right)-1<e^{C(m)(1-\varepsilon)}\left(f(1)+1\right).$$

$\diamond$

Theorem 4.5 *Sei E ein einfaches Vektorraumbündel über M. Dann existiert eine stetig differenzierbare Familie $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$, $h_\varepsilon\in\mathrm{Herm}^+(E)$ mit $L_\varepsilon(h_\varepsilon)=0$ für alle $\varepsilon\in(0,1]$.*
Wenn ferner $\|\ln h_\varepsilon\|_{\mathrm{End}\,E}$ uniform beschränkt ist, so existiert zu $p>2n$ eine Teilfolge $h_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\rightharpoonup} h_0\in\mathrm{Herm}^+(E)$ (schwache Konvergenz in $H_2^p(\mathrm{End}\,E)$) mit $L_0(h_0)=0$, weshalb ${}^Th_0\cdot H_0$ eine Hermite-Einstein-Metrik auf E ist.

Beweis: $J\subset[0,1]$ war als maximaler Definitionsbereich einer Familie $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in[\varepsilon_0,1]}$ von Lösungen definiert. Es wurde schon bewiesen, daß J offen ist (Satz 3.7 und Lemma 3.8). Angenommen, es gäbe ein $\varepsilon_0>0$ mit $(\varepsilon_0,1]\subset J$, aber $\varepsilon_0\notin J$. Sei $\{\varepsilon_i\}_i$ eine Folge in J, die gegen ε_0 strebt, $\{h_\varepsilon^{(i)}\}_{\varepsilon\in[\varepsilon_i,1]}$ die zu $\varepsilon_i\in J$ gehörende Familie von Lösungen. Die Mengen $\{\varepsilon\in[\max(\varepsilon_i,\varepsilon_j),1]\mid h_\varepsilon^{(i)}=h_\varepsilon^{(j)}\}$ sind nicht leer ($h_1=h_1^{(i)}=h_1^{(j)}$), nach Definition abgeschlossen, und offen wegen der lokalen Eindeutigkeit (Satz 3.7). Daher stimmen je zwei Familien $\{h_\varepsilon^{(i)}\}$, $\{h_\varepsilon^{(j)}\}$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein, und die Folgen $\{h_\varepsilon^{(i)}\}$ setzen sich zu einer stetig differenzierbaren Familie $\{h_\varepsilon:=h_\varepsilon^{(i)},\text{ falls }\varepsilon>\varepsilon_i\}_{\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]}$ zusammen.
$\|\ln h_\varepsilon\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}\leq\varepsilon_0^{-1}\|K^0\|_{C^0(\mathrm{End}\,E)}=:m$ ist dann uniform beschränkt nach Lemma 4.1,2. Daher kann Satz 4.4 angewendet werden, so daß die H_2^p-Normen von h_ε, $\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]$ ebenfalls uniform beschränkt sind. Nach Übergang zu einer Teilfolge darf man schwache Konvergenz $h_\varepsilon\rightharpoonup h_{\varepsilon_0}\in H_2^p(\mathrm{End}\,E)$ annehmen, denn die Banachräume $H_2^p(\mathrm{End}\,E)$, $1<p<\infty$ sind reflexiv [Alt, Beispiel 5.9,4], daher jede abgeschlossene beschränkte Menge schwach folgenkompakt [Alt, Satz 5.7]. Wegen der Beschränktheit von $|\ln h_\varepsilon|_{\mathrm{End}\,E}$ liegen die Eigenwerte von h_{ε_0} im Intervall $[e^{-m},e^m]$. Weil außerdem $p>2n$ vorausgesetzt war, beweist das Argument im Beweis von Lemma 3.1 die Existenz einer offenen Kugelumgebung $B_{\delta/c_{p,2}}(h_{\varepsilon_0})$ von h_{ε_0} in $H_2^p(\mathrm{End}\,E)$, so daß alle $\varphi\in\mathrm{Herm}(E)\cap B_{\delta/c_{p,2}}(h_{\varepsilon_0})$ positiv definit sind. Demnach liegt h_{ε_0} im Innern des Abschluß von $\mathrm{Herm}^+(E)$ in $H_2^p(\mathrm{End}\,E)$, das heißt $h_{\varepsilon_0}\in\mathrm{Herm}_2^{p,+}(E)$. Um zu zeigen, daß $L(\varepsilon_0,h_{\varepsilon_0})=0$ ist, berechnet man ($\varphi\in A^0(\mathrm{End}\,E)$ eine Testfunktion):

$$(L(\varepsilon_0,h_{\varepsilon_0}),\varphi)_{\mathrm{End}\,E}=(L(\varepsilon_0,h_{\varepsilon_0})-L(\varepsilon,h_\varepsilon),\varphi)_{\mathrm{End}\,E}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h_{\varepsilon_0}^{-1}\partial^0 h_{\varepsilon_0}) - \mathrm{Tr}_g\,\bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial^0 h_\varepsilon),\varphi\right)_{\mathrm{End}\,E} - (\varepsilon_0 \ln h_{\varepsilon_0} - \varepsilon \ln h_\varepsilon, \varphi)_{\mathrm{End}\,E} \\ &\overset{(1.18)}{=} \left(h_{\varepsilon_0}^{-1}\partial^0 h_{\varepsilon_0} - h_\varepsilon^{-1}\partial^0 h_\varepsilon, \partial^0\varphi\right)_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)} - (\varepsilon_0 \ln h_{\varepsilon_0} - \varepsilon \ln h_\varepsilon, \varphi)_{\mathrm{End}\,E} \overset{\varepsilon\to\varepsilon_0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

weil die schwache H_2^p-Konvergenz starke H_1^p-Konvergenz $h_\varepsilon \to h_{\varepsilon_0}$ impliziert (Satz von Rellich und [Alt, Bemerkung 8.1,4]) und die Abbildungen

$$[0,1] \times \mathrm{Herm}_1^{p,+}(E) \longrightarrow L^2(\mathrm{End}\,E),\ (\varepsilon, h) \longmapsto \varepsilon \cdot \ln h,$$

bzw.

$$\mathrm{Herm}_1^{p,+}(E) \longrightarrow L^2(\mathrm{End}\,E),\ h \longmapsto h^{-1}\partial^0 h$$

stetig sind ($1-2n/p > 0$!). Deshalb ist h_{ε_0} eine H_2^p-Lösung der Gleichung $L(\varepsilon_0, .) = 0$ und regulär nach Lemma 3.8: $h_{\varepsilon_0} \in \mathrm{Herm}^+(E)$. Wie im Beweis von Satz 3.7 kann in ε_0 der Satz über implizite Funktionen angewendet werden. Die so erhaltene Familie $\{\tilde h_\varepsilon\}_{\tilde\varepsilon\in[\varepsilon_1,\varepsilon_2]}$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon_2$) stimmt wegen der lokalen Eindeutigkeit mit $\{\tilde h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(\varepsilon_0,1]}$ auf dem Intervall $(\varepsilon_0, \varepsilon_2]$ überein, und h_{ε_0} ist eine stetig differenzierbare Fortsetzung von $\{h_\varepsilon\}$ nach ε_0, also $\varepsilon_0 \in J$ im Widerspruch zur Wahl von ε_0. Das zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Wenn außerdem $\|\ln h_\varepsilon\|_{\mathrm{End}\,E}$ für $\varepsilon \to 0$ beschränkt bleibt, dann auch $|\ln h_\varepsilon|_{\mathrm{End}\,E}$ nach Lemma 4.1,3, so daß der erste Teil obiger Argumentation mit $\varepsilon_0 = 0$ greift und ebenfalls den zweiten Teil des Theorems beweist. $\diamond$

Bemerkung 4.6 Wenn E ein Geradenbündel ist, dann ist $\ln h_\varepsilon = \ln(\det h_\varepsilon) = 0$ (Lemma 2.3,3) stets beschränkt und der Erfolg der Methode sicher. Freilich sind Geradenbündel trivialerweise sowohl stabil (nach Definition) als auch Hermite-Einstein (siehe Bemerkung 1.3,4), so daß der Fall $r = 1$ von vorneherein ausgeschlossen werden könnte. Für das folgende Kapitel wird $r \geq 2$ angenommen. $\diamond$

5 Konstruktion einer Untergarbe

Für den Fall, daß die Konstruktion einer Hermite-Einstein-Metrik scheitert, existiert nach Theorem 4.5 eine differenzierbare Familie $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ von Endomorphismen von E mit folgenden Eigenschaften:

$$(5.1)\qquad \begin{array}{lrcl} 1. & \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\, \|\ln h_\varepsilon\|_{\operatorname{End} E} & = & \infty, \\ 2. & L_\varepsilon(h_\varepsilon) & = & K^0 + \operatorname{Tr}_g \bar\partial(h_\varepsilon^{-1}\partial^0 h_\varepsilon) + \varepsilon \ln h_\varepsilon = 0. \end{array}$$

Aus diesen Daten läßt sich jedoch eine Garbe konstruieren, die die Stabilität von E verletzen würde, und die Existenz einer Hermite-Einstein-Metrik für stabile Vektorraumbündel folgt durch Widerspruch.
Zur Konstruktion der Garbe soll eine Folge $\varepsilon_i \to 0$ gewählt werden, so daß $\operatorname{Im} h_{\varepsilon_i}$ außerhalb einer hinreichend kleinen Menge $S \subset M$ gegen ein holomorphes Unterbündel F von $E|_{M\setminus S}$ konvergiert. Die Garbe der holomorphen Schnitte von F läßt sich dann zu einer Untergarbe von $\mathcal{O}(E)$ auf ganz M erweitern, deren Grad durch das Verhalten auf $M \setminus S$ nach unten abgeschätzt werden kann. Zur Auswahl der Teilfolge wird eine Verallgemeinerung des Kompaktheitssatzes von Uhlenbeck angewendet: Für Folgen integrabler Zusammenhänge mit gewissen Schranken an die Krümmung existieren Teilfolgen, die bis auf Eichtransformationen außerhalb einer Menge S endlichen $(2n-4)$-dimensionalen Hausdorffmaßes konvergieren.

Zunächst die benötigten Schranken an die Krümmung:

Lemma 5.1
$\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1]}$ erfülle (5.1). Sei $f_\varepsilon := h_\varepsilon^{1/2}$, $D_\varepsilon := D_{E^{f_\varepsilon}} = f_\varepsilon(D_\varepsilon)$ der h-Zusammenhang des induzierten Vektorraumbündels E^{f_ε} (siehe Abschnitt 1.8), $R_\varepsilon := R(D_\varepsilon)$, $K_\varepsilon := K(D_\varepsilon)$ die zugehörige (mittlere) Krümmung.
Dann existieren Konstanten C_0, C_1, so daß für alle $\varepsilon \in (0,1]$:

1. $\sup\limits_M |K_\varepsilon|_{\operatorname{End} E} \le C_0 < \infty$,
2. $\|R_\varepsilon\|_{\mathcal{A}^2(\operatorname{End} E)} \le C_1 < \infty$.

Beweis: (5.1,2) heißt (siehe 1.31)

$$(5.2)\qquad f_\varepsilon^{-1} \circ K_\varepsilon^0 \circ f_\varepsilon + \varepsilon \ln h_\varepsilon = 0,$$

und mit Lemma 4.1,2 folgt

$$\begin{aligned} \left|K_\varepsilon^0\right|_{\operatorname{End} E} &= \varepsilon\left|f_\varepsilon \circ \ln h_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1}\right|_{\operatorname{End} E} \overset{(2.6)}{=} \varepsilon\left|\ln(f_\varepsilon \circ h_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1})\right|_{\operatorname{End} E} \\ &= \varepsilon|\ln h_\varepsilon|_{\operatorname{End} E} \le \left\|K^0\right\|_{C^0(\operatorname{End} E)}. \end{aligned}$$

Mit $K_\varepsilon^0 = K_\varepsilon - \mu \cdot \mathrm{Id}_E$ zeigt das die Behauptung 1 und auch Teil 2, weil

$$\int_M \left(|R_\varepsilon|_{\mathcal{A}^2(\operatorname{End} E)} - \left|K_\varepsilon^0\right|_{\operatorname{End} E} \right) = 4\pi^2 \int_M \left(2c_2(E) - c_1(E)^2 \right) \wedge \frac{\Phi^{n-2}}{(n-2)!}$$

[Kobayashi, IV.3.29] eine topologische Invariante von E ist, $c_i(E)$ die i-te Chern-Weil-Form von (E^{f_ε}, H_0). $\diamond$

Der folgende Satz verallgemeinert den Kompaktheitssatz von Uhlenbeck für Zusammenhänge über 4-Mannigfaltigkeiten [Uhlenbeck1, Theorem 3.6] auf höhere Dimension.

Satz 5.2 *[Uhlenbeck2, S.2]*
Sei D_i eine Folge integrabler hermitescher Zusammenhänge auf einem hermiteschen Vektorraumbündel (E, H_0) auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \geq 2$, mit uniformen Schranken an die Krümmungen R_i, K_i:

1. $\sup\limits_M |K_i|_{\operatorname{End} E} \leq C_0 < \infty$,
2. $\|R_i\|_{\mathcal{A}^2(\operatorname{End} E)} \leq C_1 < \infty$.

Dann existiert eine Teilfolge $\{D_{i_\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$, eine Folge von unitären Eichtransformationen $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ und eine kompakte Menge $S \subset M$ endlichen $(2n-4)$-dimensionalen Hausdorffmaßes, so daß

$$u_\nu(D) \overset{(1.32)}{=} u_\nu \circ D_{i_\nu} \circ u_\nu^{-1} \overset{\nu \to \infty}{\rightharpoonup} D_\infty$$

schwach in $H^p_{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)|_{M \setminus S})$ konvergiert für alle $1 < p < \infty$, D_∞ ein integrabler Zusammenhang auf $E|_{M\setminus S}$.

Für einen Beweis verweise ich auf [Itoh/Nakajima, Theorem 4.9].

Bemerkung 5.3

1. Obige Konvergenz $u_\nu(D) \rightharpoonup D_\infty$ kann einfach durch

$$u_\nu(D) - D_\infty \overset{\nu \to \infty}{\rightharpoonup} 0 \qquad \text{schwach in } H^p_{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)|_{M \setminus S})$$

(das heißt schwache Konvergenz in H_1^p auf jeder relativ kompakten offenen Menge $U \subset M \setminus S$) erklärt werden, denn die Differenz zweier Zusammenhänge ist A^0-linear, also eine endomorphismenwertige 1-Form.

2. Schwache $H^p_{1,\mathrm{loc}}$-Konvergenz impliziert starke L^p_{loc}-Konvergenz: Sei $\{a_\nu\}_\nu$ eine schwach konvergente Folge in $H^p_{1,\mathrm{loc}}$ mit schwachem Limes a. Zu $U \subset\subset M \setminus S$ sei $\rho \in A^0$ eine Hutfunktion, das heißt $\rho|_U \equiv 1$ und $\operatorname{Supp} \rho \subset M \setminus S$, ferner sei $V \subset\subset M \setminus S$ eine offene Menge mit $\operatorname{Supp} \rho \subset V$. $\{\rho \cdot a_\nu\}_\nu$ konvergiert jetzt

schwach in $\mathring{H}_1^p(V)$, also stark in $\mathring{L}^p(V)$, weil die Einbettung $\mathring{H}_1^p(V) \hookrightarrow \mathring{L}^p(V)$ kompakt ist [Alt, Satz 8.7,2], und Bilder schwach konvergenter Folgen unter kompakten Abbildungen stark konvergieren [Alt, Bemerkung 8.1]. Aus

$$\|a_\nu - a\|_{\mathring{L}^p(U)} = \|\rho \cdot (a_\nu - a)\|_{\mathring{L}^p(U)} \leq \|\rho a_\nu - \rho a\|_{\mathring{L}^p(V)} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

folgt schließlich die Behauptung.

3. $S \subset M$ ist eine Lebesgue-Nullmenge: Weil die Hausdorff-Dimension von S kleiner gleich $2n-4$ ist, verschwindet das $2n$-dimensionale Hausdorffmaß von S, welches aber proportional zum Lebesguemaß ist [Falconer, Theorem 1.12].

4. Weil die Zusammenhänge D_i als verträglich mit der Metrik H_0 vorausgesetzt waren (also auch $u_\nu(D_{i_\nu})$), ist D_∞ als starker L^p_{loc}-Limes ebenfalls ein hermitescher Zusammenhang ($U \subset\subset M \setminus S$, σ, $\tau \in A^0(E|_{M\setminus S})$):

$$\begin{aligned}
&\int_U \left|\langle D_\infty\sigma, \tau\rangle_E + \langle \sigma, D_\infty\tau\rangle_E - d\,\langle\sigma,\tau\rangle_E\right|_{\mathcal{A}^1} \frac{\Phi^n}{n!} \\
&\quad = \quad \int_U \left|\langle D_\infty\sigma - u_\nu(D_{i_\nu})\sigma, \tau\rangle_E + \langle \sigma, D_\infty\tau - u_\nu(D_{i_\nu})\tau\rangle_E\right|_{\mathcal{A}^1} \frac{\Phi^n}{n!} \\
&\quad \overset{(1.3)}{\leq} \quad 2\|D_\infty - u_\nu(D_{i_\nu})\|_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)|_U} \|\sigma\|_{C^0(E)} \|\tau\|_{C^0(E)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

daher

$$d\,\langle\sigma,\tau\rangle_{E|_{M\setminus S}} = \langle D_\infty\sigma, \tau\rangle_{E|_{M\setminus S}} + \langle\sigma, D_\infty\tau\rangle_{E|_{M\setminus S}}$$

fast überall in U und wegen der Stetigkeit in ganz U.

5. Für die Krümmungen gilt zumindest

$$R\,(u_\nu(D_{i_\nu})) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} R(D_\infty) \qquad \text{schwach in } L^p_{\mathrm{loc}}(\mathcal{A}^2(\mathrm{End}\,E)|_{M\setminus S}).$$

Zum Beweis setze $D_\nu := u_\nu(D_{i_\nu})$ und E_∞ sei das $E|_{M\setminus S}$ zugrundeliegende differenzierbare Vektorraumbündel mit der durch D_∞ induzierten holomorphen Struktur. Es gilt

$$\begin{aligned}
R(D_\nu) - R(D_\infty) &= D_\nu \circ D_\nu - D_\infty \circ D_\infty \\
&= D_\infty \circ (D_\nu - D_\infty) + (D_\nu - D_\infty) \circ D_\infty + (D_\nu - D_\infty) \circ (D_\nu - D_\infty) \\
&= D_{\mathrm{End}\,E_\infty}(D_\nu - D_\infty) + (D_\nu - D_\infty) \circ (D_\nu - D_\infty),
\end{aligned}$$

denn nach (1.8) ist $D_{\mathrm{End}\,E_\infty}\varphi = D_\infty \circ \varphi + \varphi \circ D_\infty$ für $\varphi \in A^1(\mathrm{End}\,E)$, wobei das geänderte Vorzeichen auf die Vertauschung von 1-Formen zurückzuführen ist. Der erste Term strebt schwach gegen 0 in L^p_{loc}, weil über kompakten Mengen $D_{\mathrm{End}\,E} - D_{\mathrm{End}\,E_\infty}$ eine beschränkte $A^1(\mathrm{End}\,E)$-Norm hat, der zweite sogar in $H^p_{1,\mathrm{loc}}$ wegen der Beschränktheit der schwach konvergenten Folge $\{D_\nu - D_\infty\}_\nu$ [Alt, Bemerkung 5.3,4]. $\diamond$

Sei nun $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, $\varepsilon_i > 0$ mit $\|\ln h_i\|_{\mathrm{End}\,E} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $h_i := h_{\varepsilon_i}$. Für die Folge $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $D_i := f_i(D_E) = D_{E^{f_i}}$, $f_i := h_i^{1/2}$, darf man gemäß Lemma 5.1 und Satz 5.2 nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge

$$u_i(D_i) = (u_i f_i)(D_E) = D_{E^{u_i f_i}} \rightharpoonup D_\infty \qquad \text{schwach in } H^p_{1,\mathrm{loc}}(\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)|_{M\setminus S})$$

annehmen für alle $p > 1$ (im folgenden wird nur $p = 2$ verwendet), $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge (bezüglich der Hintergrundsmetrik) unitärer Eichtransformationen, D_∞ ein integrabler Zusammenhang auf $E|_{M\setminus S}$ und $S \subset M$ eine kompakte Menge endlichen $(2n-4)$-dimensionalen Hausdorffmaßes. $M \setminus S$ ist dann i.a. eine nichtkompakte (!) Kähler-Mannigfaltigkeit.
Die differenzierbaren Bündelendomorphismen $(u_i f_i)^{-1}$ können jetzt als *holomorphe Bündelisomorphismen* aufgefaßt werden:

$$(u_i f_i)^{-1} : E_i \longrightarrow E,$$

mit $E_i := E^{u_i f_i}$. Sei nämlich $\sigma \in \Gamma(E_i)$ ein holomorpher Schnitt, so gilt nach Definition der komplexen Struktur auf E_i (1.29)

$$(u_i f_i) \circ \bar\partial_E \circ ((u_i f_i)^{-1}\sigma) = \bar\partial_{E_i}\sigma = 0,$$

und $(u_i f_i)^{-1}\sigma \in \Gamma(E)$. Mit $\mathrm{End}^i E := E \otimes E_i^*$ läßt sich die Holomorphie von $(u_i f_i)^{-1}$ auch durch

$$\bar\partial_{\mathrm{End}^i E}(u_i f_i)^{-1} \stackrel{(1.8)}{=} \bar\partial_E \circ (u_i f_i)^{-1} - (u_i f_i)^{-1} \circ \bar\partial_{E_i} \stackrel{(1.29)}{=} 0 \tag{5.3}$$

ausdrücken. $\mathrm{End}^i E$ ist isomorph zu $\mathrm{End}\,E$ als differenzierbares Bündel und kann mit der gleichen Metrik wie $\mathrm{End}\,E$ versehen werden. Man setzt

$$a_i := \left\|(u_i f_i)^{-1}\right\|^{-1}_{\mathrm{End}\,E} \in \mathbb{R}_{>0},\ \ g_i := a_i \cdot (u_i f_i)^{-1},$$

und betrachtet die Folge $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ normierter Endomorphismen. Sei ferner $\{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge relativ kompakter offener Mengen, die gegen $M \setminus S$ streben, genauer

- $U_\nu \subset\subset M \setminus S$,
- $\overline{U_\nu} \subset U_{\nu+1}$,
- $\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} U_\nu = M \setminus S$,

etwa $U_\nu := M \setminus B_{1/\nu}(S)$, $B_\delta(S) := \{x \in M \mid d_M(x,S) < \delta\}$ die offene δ-Umgebung um S bezüglich der geodätischen Metrik $d_M(.,.)$. Weil jeder Punkt im Komplement von S strikt positiven Abstand zur abgeschlossenen Menge S hat, schöpfen diese Mengen tatsächlich ganz $M \setminus S$ aus.

Lemma 5.4 *Für g_i und U_ν wie oben gilt*

1. $|g_i|_{\operatorname{End} E} \leq C$ *auf ganz M für alle i;*
2. $\|g_i\|_{H_1^2(\operatorname{End} E|_{U_\nu})} \leq C_\nu$ *für alle $i, \nu \in \mathbb{N}$,*

$C_\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ *Konstanten, die nur von ν abhängen.*

Beweis:

1. Aus den Abschnitten 1.2/1.3 ist klar, daß die Krümmung $R_{\operatorname{End}^i E}$ des h-Zusammenhangs gerade die Gestalt
$$R_{\operatorname{End}^i E} : \varphi \longmapsto R_E \circ \varphi - \varphi \circ R_{E_i} \overset{(1.32)}{=} R_E \circ \varphi - \varphi \circ u_i \circ R_{\varepsilon_i} \circ u_i^{-1}$$
hat, $\varphi \in A^0(\operatorname{End} E)$. Die Bochner-Formel (1.35) zeigt jetzt für den holomorphen Schnitt $g_i \in \Gamma(\operatorname{End}^i E)$:
$$\begin{aligned} \Box |g_i|^2_{\operatorname{End} E} &= \langle \operatorname{Tr}_g R_{\operatorname{End}^i E}(g_i), g_i \rangle_{\operatorname{End} E} - \left| \partial^0_{\operatorname{End}^i E} g_i \right|^2_{\mathcal{A}^{1,0}(\operatorname{End} E)} \\ &\leq \left| \langle \operatorname{Tr}_g R_E \circ g_i, g_i \rangle_{\operatorname{End} E} - \left\langle g_i \circ \operatorname{Tr}_g u_i R_{\varepsilon_i} u_i^{-1}, g_i \right\rangle_{\operatorname{End} E} \right| \\ &\leq \left(|K_E|_{\operatorname{End} E} + \left| u_i K_{\varepsilon_i} u_i^{-1} \right|_{\operatorname{End} E} \right) |g_i|^2_{\operatorname{End} E} \leq C \cdot |g_i|^2_{\operatorname{End} E}, \end{aligned}$$
C eine von i unabhängige Konstante nach Lemma 5.1,1. Wegen der Mittelwertungleichung Lemma 1.1,2 ist daher die Supremumsnorm von g_i durch die L^2-Norm beschränkt, die konstant 1 ist:
$$\|g_i\|_{C^0(\operatorname{End} E)} \leq C \cdot \|g_i\|_{\operatorname{End} E} = C.$$

2. Aus der schwachen $H^2_{1,\mathrm{loc}}$-Konvergenz der durch $u_i f_i$ induzierten Folge von Zusammenhängen
$$D_{E^{u_i f_i}} \overset{(1.32)}{=} D_{E_i} \rightharpoonup D_\infty$$
kann man zu jedem $U_\nu \subset\subset M$ eine uniforme Schranke für die H_1^2-Norm der Eichtransformationen g_i auf U_ν gewinnen, was in der angelsächsischen Literatur als "bootstrapping" bezeichnet wird [Freed/Uhlenbeck, Proposition A5]: Sei ζ_ν eine Hutfunktion für $U_\nu \subset U_{\nu+1}$, das heißt $\zeta_\nu \in A^0$ hat kompakten Träger in $U_{\nu+1}$ und $\zeta|_{U_\nu} \equiv 1$, dann gilt
$$\begin{aligned} \left\| \partial^0 g_i \right\|^2_{\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)|_{U_\nu}} \leq \left\| \partial^0 (\zeta_\nu g_i) \right\|^2_{\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)} &= |(\Box_{\operatorname{End} E}(\zeta_\nu g_i), \zeta_\nu g_i)_{\operatorname{End} E}| \\ &\overset{(1.19)}{=} \left| \left(\overline{\Box}_{\operatorname{End} E}(\zeta_\nu g_i), \zeta_\nu g_i \right)_{\operatorname{End} E} + (K_{\operatorname{End} E}(\zeta_\nu g_i), \zeta_\nu g_i)_{\operatorname{End} E} \right| \\ &\leq \left\| \bar\partial (\zeta_\nu g_i) \right\|^2_{\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)|_{U_{\nu+1}}} + 2 \|K_E\|_{\operatorname{End} E} \cdot \|\zeta_\nu g_i\|^2_{\operatorname{End} E|_{U_{\nu+1}}} \\ &\leq C_\nu \left(\left\| \bar\partial g_i \right\|^2_{\mathcal{A}^1(\operatorname{End} E)|_{U_{\nu+1}}} + \|g_i\|^2_{\operatorname{End} E|_{U_{\nu+1}}} \right), \end{aligned}$$

wobei C_ν nur von ζ_ν und $\bar\partial\zeta_\nu$ abhängt. Mit

$$\bar\partial_{E_i} \overset{(1.29/1.22)}{=} \bar\partial_E + (u_i f_i)\bar\partial(u_i f_i)^{-1} = \bar\partial_E + g_i^{-1}\bar\partial g_i$$

und der Schranke an die Supremumsnorm von g_i folgt

$$\begin{aligned}\|g_i\|_{H_1^2(\mathrm{End}\,E|_{U_\nu})} &\le (1+C_\nu)\left(\|g_i\|_{\mathrm{End}\,E|_{U_{\nu+1}}} + \left\|\bar\partial g_i\right\|_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)|_{U_{\nu+1}}}\right)\\ &\le (1+C_\nu)C\left(1+\left\|\bar\partial_{E_i} - \bar\partial_E\right\|_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)|_{U_{\nu+1}}}\right),\end{aligned}$$

und das ist die Behauptung, weil $\left\|\bar\partial_{E_i} - \bar\partial_E\right\|_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\,E)|_{U_{\nu+1}}}$ sicher beschränkt ist (dafür genügt schon schwache L^2-Konvergenz [Alt, Bemerkung 5.3,4]). $\diamond$

Nach Auswahl einer Teilfolge darf man deshalb

$$g_i \rightharpoonup f \qquad \text{schwach in } H_1^2(\mathrm{End}\,E|_{U_\nu})$$

annehmen, sogar simultan für alle ν nach induktiver Wahl weiterer Teilfolgen und Übergang zur Diagonalfolge.
D_∞ ist nach Satz 5.2 ein integrabler Zusammenhang. Ich schreibe E_∞ für $E|_{M\setminus S}$ mit der von D_∞ induzierten holomorphen Struktur und $\mathrm{End}^\infty E := E|_{M\setminus S} \otimes E_\infty^*$.

Lemma 5.5 $f : E_\infty \to E|_{M\setminus S}$ *ist eine holomorphe faserlineare Abbildung von generischem Rang* k*,* $0 < k < r = \mathrm{Rang}(E)$

Beweis: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathrm{End}\,E|_{M\setminus S})$ (kompakter Träger in $M \setminus S$) eine Testfunktion, dann existiert ein $\nu \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Supp}\,\varphi \subset U_\nu$. Mit Verwendung von Formeln des Typs

$$\bar\partial_{\mathrm{End}^\infty E} f \overset{(1.8)}{=} \bar\partial_E \circ f - f \circ \bar\partial_{E_\infty}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}\left|\left(\bar\partial_{\mathrm{End}^\infty E} f, \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E}\right| &\overset{(5.3)}{=} \left|\left(\bar\partial_{\mathrm{End}^\infty E} f - \bar\partial_{\mathrm{End}^i E} g_i, \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E}\right|\\ &= \left|\left(\bar\partial_E \circ (f - g_i) - f\circ\bar\partial_{E_\infty} + g_i \circ \bar\partial_{E_i} - f\circ\bar\partial_{E_i} + f\circ\bar\partial_{E_i}, \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E}\right|\\ &\le \left|\left(\bar\partial(f-g_i), \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E|_{U_\nu}}\right| + \left|\left((f-g_i)\circ(\bar\partial_E - \bar\partial_{E_i}), \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E|_{U_\nu}}\right|\\ &\quad + \left|\left(f\circ(\bar\partial_{E_\infty} - \bar\partial_{E_i}), \varphi\right)_{\mathrm{End}\,E|_{U_\nu}}\right|.\end{aligned}$$

Der erste Term wird mit wachsendem i beliebig klein wegen der schwachen H_1^2-Konvergenz $g_i \rightharpoonup f$ in U_ν, der letzte Term wegen der Beschränktheit von f (nach

Lemma 5.4,1) und der schwachen Konvergenz $\bar{\partial}_{E_i} \to \bar{\partial}_{E_\infty}$ über U_ν sogar in H_1^2. Der mittlere Term strebt gegen 0 für $i \to \infty$, weil $\bar{\partial}_E - \bar{\partial}_{E_i}$ beschränkt bleibt und $g_i \rightharpoonup f$ schwach in $H^2_{1,\mathrm{loc}}$, also stark in L^2 über U_ν konvergiert. Insgesamt sieht man, daß f schwache (H_1^2-) Lösung der über $M \setminus S$ formulierten Gleichung

$$\bar{\partial}_{\mathrm{End}^\infty E} f = 0$$

ist und die Elliptizität von $\bar{\partial}_{\mathrm{End}^\infty E}$ impliziert Glattheit von f im Inneren von $M \setminus S$ [Aubin, Theorem 3.54], woraus $f \in \Gamma(\mathrm{End}^\infty E)$ folgt.
Weil echte analytische Untermengen Lebesgue-Nullmengen sind und wegen

$$\|f\|_{\mathrm{End}\, E|_{M\setminus S}} = \lim_{i\to\infty} \|g_i\|_{\mathrm{End}\, E|_{M\setminus S}} \overset{(\mathrm{Bem.} 5.3,3)}{=} \lim_{i\to\infty} \|g_i\|_{\mathrm{End}\, E} = 1,$$

muß der generische Rang k von f echt größer als 0 sein.
Auf der anderen Seite kann f generisch auch kein Isomorphismus sein, denn mit $\det(u_i f_i)^{-1} = \det(f_i)^{-1} = (\det h_i)^{-1/2} = 1$ (Lemma 2.3,3) folgt

$$\begin{aligned} \|\det f\|_{M\setminus S} &= \left\| \lim_{i\to\infty} \det g_i \right\|_{M\setminus S} \overset{(*)}{\leq} \lim_{i\to\infty} \|\det g_i\|_M \\ &= \lim_{i\to\infty} (a_i)^r \cdot \mathrm{Vol}(M) = 0 \end{aligned}$$

als differenzierbarer Endomorphismus von $E|_{M\setminus S}$; $*$ ist die Unterhalbstetigkeit des Lebesgueschen Integrals, und $a_i = \|(u_i f_i)^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{End}\, E} = \|(f_i)^{-1}\|^{-1}_{\mathrm{End}\, E}$ strebt gegen 0, weil einerseits $\|\ln(f_i)^{-1}\|_{\mathrm{End}\, E} = \frac{1}{2}\|\ln h_i\|_{\mathrm{End}\, E}$ unbeschränkt wächst, andererseits aber $\det(f_i)^{-1}$ konstant 1 ist. $\diamond$

Eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Lemma ist, daß

$$T := \{x \in M \setminus S \mid \mathrm{Rang}\, f(x) < k\}$$

eine echte analytische Teilmenge von $M \setminus S$ ist (lokal gegeben als Nullstellengebilde der $k \times k$-Minoren einer lokalen Matrixdarstellung von f bezüglich holomorpher r-Beine von E_∞ und $E|_{M\setminus S}$). Außerhalb von $Z := S \cup T$ ist f eine holomorphe Abbildung von Vektorraumbündeln und $\mathrm{Im}\, f|_{M\setminus Z}$ ein holomorphes Unterbündel von $E|_{M\setminus Z}$. Sei $\mathcal{E} := \mathcal{O}(E|_{M\setminus S})$ und

$$\hat{f} : \mathcal{O}(E_\infty) \longrightarrow \mathcal{E}$$

der durch f induzierte Morphismus von $\mathcal{O}_{M\setminus S}$-Garben. Die Untergarbe $\mathrm{Im}\, \hat{f}$ von $\mathcal{E}$ ist dann kohärent, denn von endlichem Typ als Bild einer Garbe von endlichem Typ und relationenendlich als Untergarbe einer relationenendlichen Garbe. Ferner gilt $\mathrm{Im}\, \hat{f}|_{M\setminus Z} = \mathcal{O}(\mathrm{Im}\, f|_{M\setminus Z})$ nach Definition von Z.

Satz 5.6 *Es existiert eine eindeutige torsionsfreie kohärente analytische Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ auf M mit den Eigenschaften*

1. $\tilde{\mathcal{F}}$ *ist eine kohärente Untergarbe von* $\mathcal{O}(E)$.

2. $\tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z} = \operatorname{Im}\hat{f}|_{M\setminus Z}$.

3. $0 < \operatorname{Rang}(\tilde{\mathcal{F}}) = k < r = \operatorname{Rang}(E)$.

4. $\mathcal{O}(E)/\tilde{\mathcal{F}}$ *ist torsionsfrei.*

Beweis: Sei $\mathcal{T}$ die Torsionsgarbe der Quotientengarbe $\mathcal{Q} := \mathcal{E}/\operatorname{Im}\hat{f}$ (kohärent nach [Grauert/Remmert, Proposition 3.3.3]), und $\mathcal{F}$ der Kern der kanonischen Abbildung $\mathcal{E} \to \mathcal{Q}/\mathcal{T}$. $\mathcal{F}$ ist kohärent, weil $\mathcal{E}$, $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{T}$ kohärent sind und stimmt über $M\setminus Z$ mit $\operatorname{Im}\hat{f}$ überein, denn $\mathcal{Q}$ kann außerhalb von Z mit der Garbe holomorpher Schnitte des Quotientenbündels $(E|_{M\setminus Z})/(\operatorname{Im} f|_{M\setminus Z})$ identifiziert werden, ist dort also sogar lokal-frei und $\mathcal{T}|_{M\setminus Z} = 0$. Durch diese Konstruktion erreicht man Torsionsfreiheit der Quotientengarbe $\mathcal{E}/\mathcal{F} \simeq \mathcal{Q}/\mathcal{T}$, die entscheidend ist für die Konstruktion der Erweiterung $\tilde{\mathcal{F}}$.
Man setzt $\tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus S} := \mathcal{F}|_{M\setminus S}$. Für $x \in S$ sei V eine Koordinatenumgebung von x mit $E|_V$ trivial, $z = (z^1, \ldots, z^n) : V \to W$ Koordinaten, $z(x) = 0$ und $W \subset \mathbb{C}^n$ offen und beschränkt. Weil $\overline{V}$ kompakt ist und W beschränkt, sind die geodätische Metrik d_M auf V und die euklidische Metrik auf $W \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ äquivalent:

$$c \cdot |z(x_1) - z(x_2)|_{\mathbb{R}^{2n}} \leq \mathrm{d}_M(x_1, x_2) \leq C \cdot |z(x_1) - z(x_2)|_{\mathbb{R}^{2n}}$$

für alle $x_1, x_2 \in V$, c, C positive reelle Konstanten. Sei $|A|_{\mathbb{R}^{2n}} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ der Durchmesser einer Menge $A \subset \mathbb{C}^n$ in der euklidischen Metrik. Mit

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_i |A_i|^t_{\mathbb{R}^{2n}} \;\middle|\; A \subset \bigcup_i A_i, |A_i| < \delta \right\}$$

(das Infimum erstreckt sich über alle Überdeckungen $\{A_i\}$ von A mit beliebigen Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^{2n}$) ist durch

$$\mathcal{H}^t_{\mathbb{R}^{2n}}(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^t_\delta$$

das t-dimensionale Hausdorffmaß erklärt, $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Analog definiert man $\mathcal{H}^t_M$ mit der geodätischen Metrik für Teilmengen von M. Aus obiger Äquivalenz von euklidischer und geodätischer Metrik folgt

$$c^t \cdot \mathcal{H}^t_{\mathbb{R}^{2n}}(A) \leq \mathcal{H}^t_M(z^{-1}(A)) \leq C^t \cdot \mathcal{H}^t_{\mathbb{R}^{2n}}(A)$$

für alle $A \subset W$. Sei speziell $A := z(S \cap V)$, dann gilt

$$\mathcal{H}^{2n-3}_{\mathbb{R}^{2n}}(A) \leq c^{3-2n} \mathcal{H}^{2n-3}_M(S \cap V) = 0,$$

denn S hat Hausdorff-Dimension $\leq 2n - 4$. Nach Lemma A.7 existiert ein von der Menge A disjunktes Ring-Gebiet $U \subset W$ mit Zentrum $z(x) = 0$. Weil E auf V trivial ist, kann $\mathcal{F}|_{z^{-1}(U)}$ als kohärente Untergarbe $\mathcal{F}_U$ der freien Garbe $\mathcal{O}^r_U$ angesehen

werden, deren Quotientengarbe torsionsfrei ist. $\mathcal{F}_U$ besitzt daher eine Fortsetzung $\tilde{\mathcal{F}}_U$ auf den einhüllenden Polyzylinder $\tilde{U}$ von U (Satz A.3), deren Quotientengarbe ebenfalls torsionsfrei ist.
Die Eindeutigkeit der Fortsetzung (Satz A.6) stellt schließlich sicher, daß sich die lokalen Fortsetzungen global zu einer Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ zusammensetzen, die nach Konstruktion alle behaupteten Eigenschaften hat. $\diamond$

Bemerkung 5.7 Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Untergarbe einer lokal-freien Garbe $\mathcal{E}$. Man definiert die i-te (relative) Lückengarbe $\mathcal{F}_{[i]}$ von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{E}$ durch die Prägarbe ($U \subset M$ offen)

$$U \longmapsto \left\{ \sigma \in \Gamma(U, \mathcal{E}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma|_{U \setminus A} \in \Gamma(U \setminus A, \mathcal{F}), \\ A \subset U \text{ eine Untervarietät}, \dim A \leq i \end{array} \right\}$$

[Siu, S.132]. Es ist dann leicht einzusehen, daß Torsionsfreiheit der Quotientengarbe $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ genau äquivalent ist zur $(n-1)$-ten "Lückengarbenbedingung" $\mathcal{F}_{[n-1]} = \mathcal{F}$ (für ähnliche Argumentationen siehe Anhang 2). $\mathcal{F}_{[i]} = \mathcal{F}$ ist aber gerade die Bedingung, um $\mathcal{F}$ von "einem Ring-Gebiet der Ordnung i, mit gegebener Erweiterung auf einer dicken Menge von Fasern" (die genaue Definition findet man in [Siu, S.4f]) auf den einhüllenden Polyzylinder fortzusetzen [Siu, S.10f und Chapter 4]. Für $i = n-1$ sind solche Mengen in den oben betrachteten Ring-Gebieten U enthalten. Weil der Beweis aus Sius Lecture Note in diesem Spezialfall jedoch besonders einfach ist und die Rolle der Quotientengarbe klar macht, habe ich ihn in Anhang 2 zusammengestellt. $\diamond$

Zu zeigen bleibt noch, daß $\tilde{\mathcal{F}}$ die Stabilitätseigenschaft von E verletzt. Wir werden $c_1(\tilde{\mathcal{F}})$ nur außerhalb von Z kontrollieren können. Daß dies ausreicht, werden wir durch das folgende Lemma sicherstellen. $\varphi : \det \tilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{O}(\Lambda^k E)$ sei die von $\tilde{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{O}(E)$ kommende Abbildung [Kobayashi, V.6] und $W := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$ der Entartungsort von φ. Als torsionsfreie Garbe ist $\mathcal{Q}$ lokal frei außerhalb einer mindestens 2-kodimensionalen Menge. Dort kommt $\tilde{\mathcal{F}} \hookrightarrow \mathcal{O}(E)$ von einer Bündeleinbettung, so daß wir auch $\operatorname{Kodim} W \geq 2$ schließen können, was sich als entscheidend herausstellen wird. Für $\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M \setminus W}$ werden wir die Metrik $H_S := \varphi^* H_0$ verwenden ("s" steht für "singulär", weil H_S längs W trivial ist).

Lemma 5.8 *$c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M \setminus W}, H_S)$ ist integrierbar mit*

$$\mu(\tilde{\mathcal{F}}) \;=\; \frac{2\pi}{k \cdot \operatorname{Vol}(M)} \int_{M \setminus Z} c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M \setminus W}, H_S) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!}\,.$$

Beweis: Sei $\sigma : \hat{M} \to M$ die Aufblasung von M im Entartungsideal von φ (lokal erzeugt von den Komponenten von φ bezüglich lokalen Trivialisierungen von $\det \tilde{\mathcal{F}}$ und $\Lambda^k E$) mit anschließender Desingularisierung. Die hochgehobene Abbildung $\hat{\varphi} : \sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}} \to \Lambda^k \sigma^* E$ entartet dann genau längs des exzeptionellen Divisors

D von σ. Damit faktorisiert $\hat{\varphi}$ über die kanonische, längs W entartende Abbildung $\psi : \sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}} \to \sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}}(D)$ und eine Bündel*einbettung* $\tilde{\varphi} : \sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}}(D) \to \Lambda^k \sigma^* E$. Zur Berechnung der ersten Chern-Weil-Form sei s ein lokaler (etwa über $U \subset M$ definierter) holomorpher Schnitt von $\det \tilde{\mathcal{F}}$ ohne Nullstellen. Im folgenden bezeichne c_1(Bündel,Metrik) die erste Chern-Weil-Form eines Bündels bezüglich der angegebenen hermiteschen Metrik.

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\sigma^* c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus W}, H_S) &= \sigma^* \bar{\partial}\partial \ln |s|_{H_S} = \bar{\partial}\partial \ln |\sigma^* s|_{\sigma^* H_S = \psi^* \tilde{\varphi}^*(\sigma^* H_0)} \\ &= \bar{\partial}\partial \ln |\psi(\sigma^* s)|_{\tilde{\varphi}^*(\sigma^* H_0)} = \frac{2\pi}{\sqrt{-1}} c_1\Big(\sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}}(D), \tilde{\varphi}^*(\sigma^* H_0)\Big).\end{aligned}$$

Wichtig ist, daß $\psi(\sigma^* s)$ in $U \cap (M \setminus W)$ nullstellenfrei ist und $\tilde{\varphi}^*(\sigma^* H_0)$ dort nicht entartet. Die Gleichung zeigt, daß Integration mit $c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus W}, H_S)$ über $M \setminus W$ (oder $M \setminus Z \subset M \setminus W$) als Strom mit $\sigma_* c_1(\sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}}(D), \tilde{\varphi}^*(\sigma^* H_0))$ übereinstimmt. In der de Rham-Kohomologie mit Strömen [Griffiths/Harris, p.382ff] repräsentiert dies die Kohomologieklasse von

$$\sigma_! c_1\Big(\sigma^* \det \tilde{\mathcal{F}}(D)\Big) = c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}) + \sigma_! c_1\Big(\mathcal{O}_{\hat{M}}(D)\Big)$$

(Projektionsformel; $\sigma_!$ der Push-forward in der Kohomologie). $\sigma_! c_1(\mathcal{O}_{\hat{M}}(D))$ ist aber Poincaré-dual zu $\sigma_*[D]$, und D wird durch σ kontrahiert (Kodim$W \geq 2$!), also $\sigma_*[D] = 0$. Folglich gehört der Strom $c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z}, H_S)$ zur Kohomologieklasse von $c_1(\det \tilde{\mathcal{F}})$, was durch Paarung mit der Volumenform insbesondere die behauptete Gleichung liefert. $\diamond$

Satz 5.9 $\mu(\tilde{\mathcal{F}}) \geq \mu(E)$.

Beweis: Sei $Q := (E_\infty / \mathrm{Kern}\, f)|_{M\setminus Z}$ das Quotientenbündel von $\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z}$. Als differenzierbares Vektorraumbündel ist Q kanonisch isomorph zu $(\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})^\perp$ vermöge der Metrik $H_0|_{M\setminus Z}$, so daß durch $H_0|_{(\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})^\perp}$ eine Metrik H_Q auf Q induziert wird. Ferner gibt es einen kanonischen Isomorphismus von Geradenbündeln

$$\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z} \simeq \bigwedge^k (\mathrm{Im}\, f)|_{M\setminus Z} \simeq \bigwedge^k Q,$$

und $\bigwedge^k H_Q$ ist auch durch Zurückholen der hermiteschen Metrik H_S auf $\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z}$ definiert. Auf $M \setminus Z$ gilt daher

$$\begin{aligned} c_1(\det \tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z}, H_\mathrm{S}) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} &= c_1(\textstyle\bigwedge^k Q, \bigwedge^k H_Q) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= c_1(Q, H_Q) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \mathrm{Tr}\, R_Q \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\overset{(1.14)}{=} \frac{1}{2\pi} \mathrm{Tr}\, K_Q \wedge \frac{\Phi^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Zwischen den mittleren Krümmungen K_Q und $K(D_\infty) = K_{E_\infty}$ (D_∞ ist der h-Zusammenhang von $(E_\infty, H_0|_{E_\infty})$, Bemerkung 5.3,4) besteht folgende Beziehung [Kobayashi, I.6.12]:

$$K_Q = \pi_Q \circ (K_{E_\infty} + \mathrm{Tr}_g A \wedge A^*) \circ i_Q, \tag{5.5}$$

$\pi_Q : E_\infty|_{M\setminus Z} \to Q$ die kanonische Projektion, $i_Q : Q \overset{\cong}{\to} (\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})^\perp \hookrightarrow E_\infty|_{M\setminus Z}$ die entsprechende Inklusion und $A \in A^{1,0}((\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})^* \otimes (\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})^\perp)$ die zweite Fundamentalform von $\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z} \hookrightarrow E_\infty$, die durch die Gleichung

$$D_\infty \xi = D_{\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z}} \xi + A\xi \qquad \text{für } \xi \in A^0(\mathrm{Kern}\, f|_{M\setminus Z})$$

festgelegt ist und durch triviale Fortsetzung auf $(\mathrm{Kern}\, f)^\perp$ als ein Element von $\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\, E)$ aufgefaßt werden kann. Nun ist $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_g A \wedge A^*) = |A|^2_{\mathcal{A}^1(\mathrm{End}\, E)}$ positiv und $K_{E_\infty} = K^0_{E_\infty} + \mu \cdot \mathrm{Id}_{E_\infty}$ kann als Limes von Termen der Differentialgleichung (2.5) gehandhabt werden; im einzelnen gilt

$$\begin{aligned} K^0_{E_i} &\overset{(1.32)}{=} u_i K^0(D_i) u_i^{-1} \overset{(5.2)}{=} -\varepsilon_i u_i f_i \circ \ln h_i \circ f_i^{-1} u_i^{-1} \\ &\overset{(2.6)}{=} \varepsilon_i \ln u_i h_i^{-1} u_i^{-1} = \varepsilon_i \left(\ln(g_i^* g_i) - 2\ln a_i \cdot \mathrm{Id}_E\right), \end{aligned} \tag{5.6}$$

denn

$$g_i^* g_i = (a_i (u_i f_i)^{-1})^* (a_i (u_i f_i)^{-1}) = a_i^2 u_i h_i^{-1} u_i^{-1}.$$

Weil $\|g_i\|_{C^0(\mathrm{End}\, E)}$ unabhängig von i beschränkt ist (Lemma 5.4,1) und g_i gegen f in $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{End}\, E|_{M\setminus Z})$ konvergiert, folgt

$$g_i^* g_i \longrightarrow f^* f \qquad \text{in } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathrm{End}\, E|_{M\setminus Z}).$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge darf man punktweise Konvergenz fast überall annehmen [Alt, Lemma A 1.11]. f^*f verschwindet jedoch auf $(\mathrm{Kern}\, f)^\perp$ nicht, so daß $\ln(g_i^* g_i)$ fast überall punktweise beschränkt ist und $\varepsilon_i \ln(g_i^* g_i)$ gegen 0 strebt fast überall. Mit der uniformen Schranke an $K^0_{E_i} = K_{E_i} - \mu \cdot \mathrm{Id}_E$ (Lemma 5.1,1) folgt daraus Beschränktheit der Folge reeller Zahlen $\{-2\varepsilon_i \ln a_i\}_i$. Nach erneuter Auswahl einer Teilfolge kann man daher Konvergenz $-2\varepsilon_i \ln a_i \to c \in \mathbb{R}$ erreichen. Der Grenzwert c muß außerdem nichtnegativ sein, weil a_i eine Nullfolge ist (siehe den Beweis von Lemma 5.5). Demnach strebt die rechte Seite in Gleichung 5.6 nach Übergang zu einer Teilfolge fast überall punktweise gegen $c \cdot \mathrm{Id}_E$, was

$$K^0_{E_i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} c \cdot \mathrm{Id}_E \qquad \text{stark in } L^2(\mathrm{End}\, E|_{M\setminus Z}),$$

impliziert (Lebesguescher Konvergenzsatz), denn $|K^0_{E_i}|_{\mathrm{End}\, E}$ ist beschränkt. Die schwache L^2_{loc}-Konvergenz $K_{E_i} \to K_{E_\infty}$ (Bemerkung 5.3,5) zeigt schließlich

$$K^0_{E_\infty} = c \cdot \mathrm{Id}_E \qquad \text{fast überall in } M \setminus Z,\ c \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{5.7}$$

denn

$$\Big(K^0_{E_\infty} - c \cdot \mathrm{Id}_E\,, \varphi\Big)_{\mathrm{End}\,E|_{M\setminus Z}} = \lim_{i\to\infty} \Big(K^0_{E_i} - c \cdot \mathrm{Id}_E\,, \varphi\Big)_{\mathrm{End}\,E|_{M\setminus Z}} = 0$$

für alle $\varphi \in C^\infty_0(\mathrm{End}\,E|_{M\setminus Z})$. Man setzt die Resultate zusammen:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{k}\int_{M\setminus Z} c_1(\det\tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z}, H_S) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\qquad\overset{(5.4)}{=} \frac{1}{k}\int_{M\setminus Z} \mathrm{Tr}\,K_Q \wedge \frac{\Phi^n}{n!} \overset{(5.5)}{\geq} \frac{1}{k}\int_{M\setminus Z} \mathrm{Tr}\,(\pi_Q \circ K_{E_\infty} \circ i_Q)\frac{\Phi^n}{n!} \\
&\qquad= \frac{1}{k}\int_{M\setminus Z} \mathrm{Tr}\,\Big(\pi_Q \circ (K^0_{E_\infty} + \mu \cdot \mathrm{Id}_E) \circ i_Q\Big)\,\frac{\Phi^n}{n!} \\
&\qquad\overset{(5.7)}{\geq} \frac{1}{k}\int_{M\setminus Z} \mathrm{Tr}\,(\mu \cdot \mathrm{Id}_Q)\,\frac{\Phi^n}{n!} = \mathrm{Vol}(M) \cdot \mu.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt mit Lemma 5.8 und $\mu = \mu(E)$

$$\mu(\tilde{\mathcal{F}})\cdot \;=\; \frac{2\pi}{k \cdot \mathrm{Vol}(M)} \int_{M\setminus Z} c_1(\det\tilde{\mathcal{F}}|_{M\setminus Z}, H_S) \wedge \frac{\Phi^{n-1}}{(n-1)!} \;\geq\; \mu(E)\,.$$

$\diamond$

Der Beweis des Hauptsatzes Theorem 1.6 ist jetzt klar:

Beweis von Theorem 1.6: Sei E Φ-stabil. Der Fall $\overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\|\ln h_\varepsilon\|_{\mathrm{End}\,E} = \infty$ aus Theorem 4.5 kann nicht auftreten, weil sonst gemäß Satz 5.6 eine kohärente Untergarbe $\tilde{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{O}(E)$ existieren würde, die nach Satz 5.9 der Stabilität von E widerspräche. Demnach ist $\|\ln h_\varepsilon\|_{\mathrm{End}\,E}$ uniform beschränkt und Theorem 4.5 garantiert die Existenz einer Hermite-Einstein-Metrik für E.
Die Umkehrung folgt daraus, daß jedes Hermite-Einstein-Bündel in eine direkte Summe stabiler Unterbündel spaltet [Kobayashi, Theorem V.8.3], die aus nur einem Summanden bestehen kann, wenn E irreduzibel ist. $\diamond$

A Anhang

A.1 Linkskomposition in Sobolevräumen

Satz A.1 *Sei* $f \in H^p_k(U,V)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand,* $V \subset \mathbb{R}^m$, $k > n/p$, *ferner* $W \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* $\overline{V} \subset W$, $\varphi \in C^\infty(W,\mathbb{R})$.
Nach dem Sobolev-Einbettungssatz für Gebiete mit Lipschitz-Rand [Alt, Satz 8.8,3] ist f *stetig und stetig auf den Rand von* U *fortsetzbar (also* $f \in C^0(\overline{U},\mathbb{R}^m)$*). Die daher punktweise erklärte Komposition* $\varphi \circ f \in C^0(U,\mathbb{R})$ *ist dann ein Element des Sobolevraumes* $H^p_k(U,\mathbb{R})$.

Beweis: Sei $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, $f_\nu \in C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ eine f in $H^p_k(U,\mathbb{R}^m)$ approximierende Folge. Der Sobolev-Einbettungssatz für Gebiete mit Lipschitz-Rand [Alt, Satz 8.8,3] liefert die Abschätzung $\|g\|_{C^0(\overline{U},\mathbb{R}^m)} \le c_{p,k}\|g\|_{H^p_k(U,\mathbb{R}^m)}$ für beliebige $g \in H^p_k(U,\mathbb{R}^m)$, $c_{p,k}$ eine Konstante. Man darf $\|f_\nu - f\|_{H^p_k(U,\mathbb{R}^m)} \le \delta/c_{p,k}$ für alle ν annehmen, $\delta := d_{\mathbb{R}^m}(f(\overline{U}),\mathbb{R}^m \setminus W)/2 > 0$ der halbe euklidische Abstand der kompakten Menge $f(\overline{U}) \subset \overline{V} \subset W$ von der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}^m \setminus W$. Dann gilt $f_\nu(\overline{U}) \subset K \subset W$ für alle ν, $K := \overline{B_\delta(f(\overline{U}))}$ die abgeschlossene δ-Umgebung von $f(\overline{U})$, denn

$$|f_\nu(x) - f(x)|_{\mathbb{R}^m} \le \|f_\nu - f\|_{C^0(\overline{U},\mathbb{R}^m)} \le c_{p,k}\|f_\nu - f\|_{H^p_k(U,\mathbb{R}^m)} \le \delta$$

für alle $x \in \overline{U}$. φ ist mit allen Ableitungen $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} \circ \ldots \circ \partial_n^{\mu_n}\varphi$, $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)$, auf dem Kompaktum K beschränkt, also ist auch $(\partial^\mu\varphi) \circ f_\nu(U)$ unabhängig von ν beschränkt. Nach der gewöhnlichen Kettenregel ist $\partial^\mu(\varphi\circ f_\nu)$ eine Linearkombination von Termen der Form $(\partial^{\mu'} \circ \varphi) \cdot \partial^{\mu''} f_\nu$, $\mu' + \mu'' = \mu$. Daher gilt

$$\|\partial_\mu(\varphi \circ f_\nu)\|_{H^p_k(U,\mathbb{R})} \le C_\mu \|f_\nu\|_{H^p_k(U,\mathbb{R})},$$

C_μ eine Konstante, die von μ, φ und K abhängt, nicht jedoch von ν. Weil die Einbettung $H^p_k(U,\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(U,\mathbb{R})$ kompakt ist [Alt, Satz 8.8,3], läßt sich eine Teilfolge $\{f_{\nu_i}\}_i$ auswählen, so daß $\partial^\mu(\varphi \circ f_{\nu_i})$ eine Cauchy-Folge in $L^p(U,\mathbb{R})$ bildet. Durch induktive Wahl weiterer Teilfolgen kann das simultan für alle μ mit $|\mu| \le k$ erreicht werden, was das gewünschte Resultat $\varphi \circ f = \lim_{i\to\infty} \varphi \circ f_{\nu_i} \in H^p_k(U,\mathbb{R})$ ergibt. $\diamond$

Korollar A.2 *In der Situation von Satz A.1 ist die induzierte Abbildung*

$$\varphi_* : H^p_k(U,V) \longrightarrow H^p_k(U,\mathbb{R}),\ f \longmapsto \varphi \circ f$$

glatt, das heißt C^∞ *im Sinne von Frechét-Ableitungen.*

Beweis: Sei $f \in H^p_k(U,V)$, $\eta \in H^p_k(U,\mathbb{R}^m) \simeq T_f H^p_k(U,V)$ ein Tangentialvektor an f. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $(f + t \cdot \eta)(U) \subset K$ für alle t mit $|t| < \varepsilon$ ist,

$K \subset W$ kompakt (siehe die Konstruktion von K im obigen Beweis). Offensichtlich ist $\varphi(f(x) + t \cdot \eta(x))$ für alle $x \in U$, $|t| < \varepsilon$ definiert ($k > n/p!$) und differenzierbar nach t; es gilt

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(f(x) + t \cdot \eta(x)) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i \varphi \circ f(x)) \cdot \eta^{(i)}(x),$$

$\eta^{(i)}$ die i-te Komponente von η. Nach Satz A.1 ist $\partial_i \varphi \circ f \in H_k^p(U, \mathbb{R})$, ferner die Multiplikation in $H_k^p(U, \mathbb{R})$ stetig (klar wegen der Inklusion $H_k^p(U, \mathbb{R}) \subset C^0(\overline{U}, \mathbb{R})$); es folgt

$$(D\varphi_*(f))(\eta) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(f + t \cdot \eta) \in H_k^p(U, \mathbb{R}),$$

das ist stetige Differenzierbarkeit von φ_*. Höhere Ableitungen bestehen aus Linearkombinationen der Form

$$(\partial_{i_1} \circ \ldots \circ \partial_{i_r} \varphi) \cdot \eta_1^{(i_1)} \cdot \ldots \cdot \eta_r^{(i_r)},$$

$\eta_j \in T_f H_k^p(U, V)$, und sind daher ebenfalls Elemente von $H_k^p(U, \mathbb{R})$. $\diamond$

A.2 Erweiterung kohärenter Untergarben lokal-freier Garben

Gebiete der Form

$$\left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \max_{1 \le \nu \le i} |z_\nu| < R_2,\ R_1 < \max_{i+1 \le \nu \le n} |z_\nu| < R_2 \right\},$$

$0 < R_1 < R_2$, $0 \le i \le n$, werden als Ring-Gebiete der Ordnung i bezeichnet [Siu, S.2]. Ihre Holomorphiehülle ist der Polyzylinder

$$\{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} < R_2\}.$$

Der folgende Satz untersucht die Fortsetzbarkeit gewisser analytischer Garben von einem Ring-Gebiet auf den einhüllenden Polyzylinder.

Satz A.3 *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein Ring-Gebiet der Ordnung $n - 2$, $\mathcal{F}$ eine kohärente Untergarbe von $\mathcal{O}_U^r$, $r \in \mathbb{N}$. Wenn die Quotientengarbe $\mathcal{Q} := \mathcal{O}_U^r / \mathcal{F}$ torsionsfrei ist, dann gibt es eine Fortsetzung von $\mathcal{F}$ zu einer kohärenten Untergarbe $\tilde{\mathcal{F}}$ von $\mathcal{O}_{\tilde{U}}^r$ mit $\mathcal{O}_{\tilde{U}}^r / \tilde{\mathcal{F}}$ torsionsfrei, wobei $\tilde{U}$ der U einhüllende Polyzylinder sei.*

Beweis: Weil $\mathcal{Q}$ kohärent ist, ist ihre Singularitätenmenge $S(\mathcal{Q}) := \{z \in U \mid \mathcal{Q}_z$ ist kein freier $\mathcal{O}_z$-Modul$\}$ eine analytische Menge der Kodimension ≥ 1 [Kobayashi, Theorem V.5.8], $\mathcal{Q}_z$ der Halm von $\mathcal{Q}$ über z. Sei $u \in U \setminus S(\mathcal{Q})$, $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^r)$

die kanonischen Erzeuger von $\mathcal{O}_U^r$ ($e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, 1 an der i-ten Stelle), $\check{e}_1,\ldots,\check{e}_r$ die Bilder von $e_1,\ldots,e_r$ unter der Restklassenabbildung $q : \mathcal{O}_U^r \to \mathcal{Q} = \mathcal{O}_U^r/\mathcal{F}$. Aus der Surjektivität von q folgt die Existenz von Indizes $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r$, $k = \mathrm{Rang}(\mathcal{Q})$, so daß $\check{e}_{i_1}(u),\ldots,\check{e}_{i_k}(u)$ den Halm $\mathcal{Q}_u$ erzeugen (Nakayama). Man definiert einen Garbenmorphismus $\varphi : \mathcal{O}_U^k \to \mathcal{Q}$ durch folgende Abbildung der assoziierten Prägarben ($W \subset U$ offen)

$$\Gamma(W, \mathcal{O}_U^k) \ni (f_1,\ldots,f_k) \longmapsto \sum_{\nu=1}^{k} f_\nu \cdot \check{e}_{i_\nu}|_W \in \Gamma(W, \mathcal{Q}).$$

Sei $\varphi_u : \mathcal{O}_u^k \to \mathcal{Q}_u$ der zugehörige Homomorphismus der Halme über u. Nach Konstruktion ist φ_u surjektiv, also ein Isomorphismus wegen $k = \mathrm{Rang}(\mathcal{Q})$. Insbesondere ist $\mathrm{Supp}(\mathrm{Kern}\,\varphi)$ eine echte Untervarietät von U; aber $\mathrm{Kern}\,\varphi$ ist torsionsfrei als Untergarbe der Garbe $\mathcal{O}_U^k$. Demnach $\mathrm{Supp}(\mathrm{Kern}\,\varphi) = \emptyset$ und φ ist injektiv.
Bevor der Beweis beendet werden kann, beweist man folgendes

Lemma A.4 *Es gibt genau einen injektiven Garbenmorphismus $\psi : \mathcal{Q} \to \mathcal{M}_U^k$, so daß rechtsstehendes Diagramm kommutiert, wobei $\mathcal{M}_U$ die Garbe der Keime meromorpher Funktionen auf U bezeichnet und $\kappa : \mathcal{O}_U^k \hookrightarrow \mathcal{M}_U^k$ die kanonische Injektion.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_U^k \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\kappa"'] & \mathcal{Q} \arrow[dl, "\psi"] \\ \mathcal{M}_U^k & \end{tikzcd}$$

Beweis: Zunächst die Eindeutigkeit: Seien $\psi_1, \psi_2 : \mathcal{Q} \to \mathcal{M}_U^k$ zwei solche Morphismen. Außerhalb der echten Untervarietät $A := \mathrm{Supp}(\mathrm{Kokern}\,\varphi)$ ist φ ein Isomorphismus. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt $\psi_1|_{U\setminus A} = \psi_2|_{U\setminus A}$, also $\{z \in U \mid \psi_1(z) \neq \psi_2(z)\} \subset A$, das heißt $\mathrm{Im}(\psi_1 - \psi_2)$ ist eine Torsionsuntergarbe der torsionsfreien Garbe $\mathcal{M}_U^k$, daher gleich 0 und $\psi_1 = \psi_2$.
Analog folgt die Injektivität von ψ: ψ ist außerhalb von A injektiv, deshalb $\mathrm{Kern}\,\psi$ eine Torsionsuntergarbe von $\mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ war aber torsionsfrei, also $\mathrm{Kern}\,\psi = 0$.
Wegen der Eindeutigkeit braucht ψ nur noch lokal definiert zu werden. Für $z \in U \setminus A$ gibt es eine Umgebung W mit $W \subset U \setminus A$. $\varphi|_W$ ist dann ein Isomorphismus und man kann einfach

$$\psi|_W := \kappa|_W \circ \varphi^{-1}|_W$$

setzen. Wenn $z \in A$ ist, dann existiert eine Umgebung W von z und eine holomorphe Funktion $f \neq 0$ auf W, so daß $A \cap W \subset \{z \in W \mid f(z) = 0\}$. Weil $\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}/\mathrm{Im}\,\varphi) = A$ gilt, existiert eine offene Umgebung $W' \subset W$ von z und ein $t \in \mathbb{N}$ mit $f^t \cdot (\mathcal{Q}/\mathrm{Im}\,\varphi)|_{W'} = 0$ (Rückert-Nullstellensatz [Grauert/Remmert, Theorem 3.2.2]), das heißt $f^t \cdot \mathcal{Q}|_{W'} \subset \mathrm{Im}\,\varphi$. Für $\sigma \in \mathcal{Q}_w$, $w \in W'$ definiert man

$$\psi(\sigma) := \varphi^{-1}(f_w^t \cdot \sigma)/f_w^t,$$

$f_w \in \mathcal{O}_w$ der durch f in w induzierte Keim. Offensichtlich ist diese Definition mit der Definition auf $U \setminus A$ verträglich und macht das Diagramm kommutativ. $\diamond$

Fortfahrend im Beweis von Satz A.3 setzt man $t_i := \psi \circ q(e_i) \in \Gamma(U, \mathcal{M}_U^k)$ für $1 \leq i \leq r$. Als Tupel meromorpher Funktionen auf U lassen sich die t_i nach einem Satz von Levi [Siu, Theorem 1.1 und S.5f] zu einem r-Tupel meromorpher Funktionen $\tilde{t}_i$ auf $\tilde{U}$ fortsetzen (sogar eindeutig nach dem Identitätssatz für meromorphe Funktionen). Sei $\tilde{\mathcal{Q}}$ die von $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_r$ erzeugte $\mathcal{O}_{\tilde{U}}$-Garbe. $\tilde{\mathcal{Q}}$ ist dann von endlichem Typ und eine Untergarbe von $\mathcal{M}_{\tilde{U}}^k$, also kohärent [Grauert/Remmert, Proposition 6.3.1]. Schließlich definiert man

$$\tilde{\mathcal{F}} := \text{Kern}\left(\mathcal{O}_{\tilde{U}}^r \longrightarrow \tilde{\mathcal{Q}},\ (f_1, \ldots, f_r)_z \longmapsto \sum_{\nu=1}^{r} (f_i \cdot \tilde{t}_i)_z,\ z \in \tilde{U}\right).$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ ist dann kohärent, weil $\mathcal{O}_{\tilde{U}}^r$ und $\tilde{\mathcal{Q}}$ kohärent sind. Ferner gilt wegen der Injektivität von ψ (siehe Lemma)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}|_U &= \text{Kern}\left(\mathcal{O}_U^r \longrightarrow \tilde{\mathcal{Q}}|_U,\ (f_1, \ldots, f_r)_z \longmapsto \sum_{\nu=1}^{r} (f_i \cdot \tilde{t}_i)_z = \sum_{\nu=1}^{r} (f_i \cdot t_i)_z\right) \\ &= \text{Kern}\left(\mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{Q},\ (f_1, \ldots, f_r)_z \longmapsto \sum_{\nu=1}^{r} (f_i \cdot q(e_i))_z\right) = \mathcal{F}, \end{aligned}$$

denn $\sum f_i t_i = \sum f_i \cdot \psi \circ q(e_i) = \psi(\sum f_i q(e_i))$. $\mathcal{O}_{\tilde{U}}^r / \tilde{\mathcal{F}} \simeq \tilde{\mathcal{Q}}$ ist dann auch torsionsfrei, wie behauptet. $\diamond$

Bemerkung A.5 Die verwendete Erweiterbarkeit meromorpher Funktionen auf Ring-Gebiete der Ordnung $n-2$ erhält man ziemlich elementar durch die Verwendung von Laurent-Reihen. Der sehr elegante Beweis findet sich in dem angegebenen Buch von Siu. $\diamond$

Der folgende Satz zeigt, daß kohärente Untergarben lokal-freier Garben durch einen Halm bereits vollständig charakterisiert werden, sofern ihre Quotientengarbe torsionsfrei ist.

Satz A.6 *Seien $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ zwei kohärente Untergarben der freien Garben $\mathcal{O}_{U_1}^r$ bzw. $\mathcal{O}_{U_2}^r$, $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}^n$ offen, mit torsionsfreien Quotientengarben $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{O}_{U_1}^r / \mathcal{F}_1$ bzw. $\mathcal{Q}_2 := \mathcal{O}_{U_2}^r / \mathcal{F}_2$. Wenn $(\mathcal{F}_1)_{z_0} = (\mathcal{F}_2)_{z_0}$ für ein $z_0 \in U_1 \cap U_2$, dann ist $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ auf der Zusammenhangskomponente U von z_0 in $U_1 \cap U_2$.*

Beweis: Sei $A := \{z \in U \mid (\mathcal{F}_1)_z \neq (\mathcal{F}_2)_z\}$. A läßt sich als Vereinigung der Träger der kohärenten Garben $\mathcal{F}_1|_U / (\mathcal{F}_1|_U \cap \mathcal{F}_2|_U)$ und $\mathcal{F}_2|_U / (\mathcal{F}_1|_U \cap \mathcal{F}_2|_U)$ schreiben, ist also eine analytische Menge, und zwar der Kodimension ≥ 1, denn $z_0 \in U \setminus A$ schließt

$A = U$ aus.
Sei $z \in U$, $\sigma \in (\mathcal{F}_1)_z$. Es gibt eine offene Umgebung $W \subset U$ und ein $\tilde{\sigma} \in \Gamma(W, \mathcal{F}_1)$ mit $\tilde{\sigma}_z = \sigma$. Dann ist $\tilde{\sigma}|_{W \cap (U \setminus A)} \in \Gamma(W \cap (U \setminus A), \mathcal{F}_1) = \Gamma(W \cap (U \setminus A), \mathcal{F}_2)$ nach Definition von A. Weil $W \cap A$ eine echte analytische Teilmenge von W ist und $q_2(\tilde{\sigma}) \in \Gamma(W, \mathcal{Q}_2)$ auf $W \cap (U \setminus A)$ verschwindet ($q_2 : \mathcal{O}_U^r \to \mathcal{Q}_2$ die Restklassenabbildung), folgt aus dem Rückertschen Nullstellensatz, daß $q_2(\tilde{\sigma})$ ein Schnitt der Torsionsgarbe von $\mathcal{Q}_2$ ist. $\mathcal{Q}_2$ ist aber als torsionsfrei angenommen, also folgt $q_2(\tilde{\sigma}) = 0$, das heißt $\tilde{\sigma} \in \Gamma(W, \mathcal{F}_2)$ und $\sigma \in (\mathcal{F}_2)_z$. Das zeigt $\mathcal{F}_1|_U \subset \mathcal{F}_2|_U$. Die andere Inklusion beweist man genauso. $\diamond$

Für die Anwendung der oben stehenden Sätze in Kapitel 5 braucht man auch das folgende

Lemma A.7 *[Siu, S.6f], [Shiffman, S.113ff]. Sei $W \subset \mathbb{C}^n$ offen, $0 \in W$, und $A \subset W$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $(2n-3)$-dimensionalem Hausdorffmaß $\mathcal{H}^{2n-3}(A) = 0$.*
Dann gibt es Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ des $\mathbb{C}^n$ und ein Ring-Gebiet

$$U_\varepsilon := \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \max_{1 \le \nu \le n-2} |z_\nu| < \varepsilon, 1 - \varepsilon < \max\{|z_{n-1}|, |z_n|\} < 1 + \varepsilon \right\},$$

so daß für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon \cap A = \emptyset$ gilt.

Beweis: Nach [Shiffman, Lemma 2] (mit $k = n-2$, $\alpha = 1$) gibt es eine komplexe 2-Ebene P, $0 \in P$ mit $\mathcal{H}^1(A \cap P) = 0$. Seien Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ im $\mathbb{C}^n$ so gewählt, daß

$$P = \{z_1 = \ldots = z_{n-2} = 0\}.$$

Weil das eindimensionale Hausdorffmaß von $A \cap P$ verschwindet, zeigt [Shiffman, Corollary 2], daß der Rand des Polyzylinders vom Radius r (in der 2-Ebene P) für $\mathcal{H}^1$-fast alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ von $A \cap P$ disjunkt liegt. Nach eventueller Änderung der Koordinaten z_{n-1} und z_n darf man annehmen, daß dies für $r = 1$ der Fall ist:

$$U_0 \cap A = \{z \in A \cap P \mid \max\{|z_{n-1}|, |z_n|\} = 1\} = \emptyset.$$

Weil U_0 kompakt und A abgeschlossen ist, haben U_0 und A positiven Abstand

$$d(U_0, A) := \inf_{z \in U_0, w \in A} \max_{1 \le i \le n} |z_i - w_i|,$$

und für alle $\varepsilon < d(U_0, A)$ gilt $U_\varepsilon \cap A = \emptyset$, denn $U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid d(z, U_0) < \varepsilon\}$. $\diamond$

Die verwendeten maßtheoretischen Lemmata beruhen auf einer ganz elementar beweisbaren integralgeometrischen Ungleichung, siehe [Shiffman, Lemma 1].

Literatur

[Alt] H. W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*, (Hochschultext), Springer-Verlag 1985.

[Aubin] T. Aubin: *Nonlinear analysis on manifolds, Monge-Ampère Equations*, (Grundlehren der math. Wiss. **252**), Springer-Verlag 1982.

[Bauer/Okonek] S. Bauer und C. Okonek: *The algebraic geometry of representation spaces associated to Seifert-fibered homology 3-spheres*, preprint Max-Planck-Institut Bonn **MPI89**-27, 1989.

[Booss/Bleecker] B. Booss und D. D. Bleecker: *Topology and Analysis*, (Universitext), Springer-Verlag 1983.

[Donaldson 1] S. K. Donaldson: *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3), **50** (1985), 1–26.

[Donaldson 2] S. K. Donaldson: *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Differential Geometry **26** (1987), 141-168.

[Donaldson 3] S. K. Donaldson: *Infinite determinants, stable bundles and curvature*, Duke Math. J. **54** (1987), 231-247.

[Falconer] K. J. Falconer: *The geometry of fractal sets*, (Cambridge tracts in mathematics **85**), Cambridge University Press 1985.

[Freed/Uhlenbeck] D. Freed und K. Uhlenbeck: *Instantons and four-manifolds*, (MSRI Publ. Vol.1), Springer-Verlag 1984.

[Gilbarg/Trüdinger] D. Gilbarg und N. S. Trüdinger: *Elliptic partial differential equations of second order*, (Grundlehren der math. Wiss. **224**), Springer-Verlag 1977

[Grauert/Remmert] H. Grauert und R. Remmert: *Coherent Analytic Sheaves* (Grundlehren der math. Wiss. **265**), Springer-Verlag 1984.

[Griffiths/Harris] P. Griffiths und J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, Wiley 1978.

[Itoh/Nakajima] M. Itoh und H. Nakajima: *Yang-Mills connections and Einstein-Hermitian metrics*, preprint 1989, (erscheint in Advanced Studies in Pure Math. **18 II**).

[Kobayashi] S. Kobayashi: *Differential geometry of complex vector bundles*, (Publ. Math. Soc. Japan **15**), Iwanami Shoten Publishers und Princeton University Press 1987.

[Lang] S. Lang: *Differential manifolds*, Addison-Wesley 1972.

[Okonek] C. Okonek: *Fake Enriques Surfaces*, Topology **27** (1988), 415-427.

[Palais] R. S. Palais: *Foundations of global nonlinear analysis*, Benjamin 1968.

[Shiffman] B. Shiffman: *On the removal of singularities of analytic sets*, Michigan Math. J. **15** (1968), 111-120.

[Siu] Y.-T. Siu: *Techniques of Extension of Analytic Objects*, (Lecture Notes in Pure and Applied Math. **8**), Marcel Dekker 1974.

[Uhlenbeck1] K. Uhlenbeck: *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys. **83** (1982), 31–42.

[Uhlenbeck2] K. Uhlenbeck: *A priori estimates for Yang-Mills fields*, preprint.

[Uhlenbeck/Yau] K. Uhlenbeck und S.-T. Yau: *On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), S257–S293.