

Übungsblatt 10

Abgabetermin: 12. Januar in der Vorlesung.

Aufgabe 1. (4 Punkte.)

Für die Schraubenlinie $\gamma(t) := (2\cos(t), 2\sin(t), 3t)$ in \mathbb{R}^3 Berechnen Sie das Längenelement und die Länge des Bogens $\gamma([0, 2])$.

Aufgabe 2. (4 Punkte.)

Die Krümmungsfunktion einer C^2 glatten Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ in \mathbb{R}^2 ist gegeben durch

$$k_\gamma(t) := \frac{\det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

Für die Parabel $\gamma(t) := (t, t^2)$ in \mathbb{R}^2 Berechnen Sie das Integral $\int_{t=0}^1 k_\gamma(t) |\gamma'(t)| dt$ und vergleichen Sie das Integral mit dem Winkel zwischen Tangentialvektoren $\gamma'(0)$ und $\gamma'(1)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte.)

Das Kabel der Länge 10 m hat die Widerstandsdichte $\rho(s) = 2 + 3\sin^2(s)$. Wieviel Wärme erzeugt das Kabel bei Spannung $U = 100$ V?

Aufgabe 4. (4 Punkte.)

Auf das Teilchen, das sich entlang der Ellipse $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$ bewegt, wirkt das Kraftfeld $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y, y - 3x^2)$. Wieviel Energie wird bei einer Umdrehung verloren? (Hinweis: Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$.)