Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie
Sommersemester 2015

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Probeklausur, 2. Juli 2015

Es gibt insgesamt 127 Punkte. Zum Bestehen der Klausur reichen 64 Punkte. Sollten Sie Fragen haben, melden Sie sich bitte. Die Abgabe der Klausur ist um 16:00.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1	(24 Punkte)	**Aufgabe 4**	(24 Punkte)
Aufgabe 2	(20 Punkte)	**Aufgabe 5**	(24 Punkte)
Aufgabe 3	(12 Punkte)	**Aufgabe 6**	(23 Punkte)
		GESAMT	(127 Punkte)
		NOTE	

Aufgabe 1 (24 Punkte). Sagen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Falls die Aussage wahr ist, reicht es "wahr" zu schreiben. Für eine falsche Aussage geben Sie bitte ein Gegenbeispiel an (ohne weitere Begründung).

1. Jeder Term ist ein Ausdruck.

   Lösung: Falsch. Gegenbeispiel: $S = \varnothing$, der Term v_0 ist ein S-Term aber kein S-Ausdruck.

2. Jeder Ausdruck ist ein Term.

   Lösung: Falsch. Gegenbeispiel: $S = \varnothing$, $v_0 = v_0$ ist ein S-Ausdruck aber kein S-Term.

3. Jeder Hauptfilter ist ein Ultrafilter.

   Lösung: Wahr.

4. Jede partielle Ordnung hat ein maximales Element.

   Lösung: Falsch. Gegenbeispiel: $(\mathbb{N}, <)$ ist eine partielle Ordnung ohne maximalen Element.

5. Ist ϕ ein universeller S-Satz und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so folgt aus $\mathfrak{B} \models \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \phi$.

   Lösung: Wahr. (Substrukturlemma).

6. Für jede Menge von S-Sätzen Φ gilt: Falls jede endliche Teilmenge von S-Sätzen Φ_0 von Φ erfüllbar ist, so ist auch Φ erfüllbar.

   Lösung: Wahr. (Endlichkeitssatz).

7. Jede abzählbare lineare Ordnung ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$.

   Lösung: Falsch. Gegenbeispiel: Die lineare Ordnung $(\mathbb{N}, <)$ hat ein kleinstes Element, $(\mathbb{Q}, <)$ aber nicht. Also $(\mathbb{N}, <) \not\cong (\mathbb{Q}, <)$.

8. Für jede unendliche Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es eine abzählbare Gruppe $\mathfrak{H}$, die elementar äquivalent zu $\mathfrak{G}$ ist.

   Lösung: Wahr. (absteigender Satz von Löwenheim-Skolem).

Aufgabe 2 (20 Punkte). Betrachten Sie die folgenden Formelmengen und bestimmen Sie, ob diese Formelmengen abzählbar kategorisch sind. Wenn ja, reicht die Antwort "Ja". Wenn nein, geben Sie bitte zwei abzählbare Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Phi$ an, die nicht isomorph sind (ohne Beweis).

1. Es sei $S_0 = \{<\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol. Betrachten Sie die S_0-Formelmenge, die aus den Axiomen der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x \ (\neg x < x)\,, \\
&\forall x \forall y \forall z \ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\,, \\
&\forall x \forall y \ ((x = y \vee x < y) \vee y < x)\,, \\
&\forall x \forall y \ (x < y \rightarrow \exists z \ (x < z \wedge z < y))\,.
\end{aligned}$$

   Lösung: Ja.

2. Es sei $S_1 = \{\circ, e\}$ mit einem zweistelligen Funktionssymbol $\circ$ und einem Konstantensymbol e. Betrachten Sie die S_1-Formelmenge, die aus den Gruppenaxiomen besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z \ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\,, \\
&\forall x \ (x \circ e = x \wedge e \circ x = x)\,, \\
&\forall x \exists y \ (x \circ y = e \wedge y \circ x = e)\,.
\end{aligned}$$

   Lösung: Nein. $(\mathbb{Z}, +, 0) \not\cong (\mathbb{Q}, +, 0)$.

3. Es sei $S_2 = \{+, \cdot, 0, 1\}$ mit zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und Konstantensymbolen 0 und 1. Betrachten Sie die S_2-Formelmenge, die aus den Körperaxiomen besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z \ (x + y) + z = x + (y + z)\,, \\
&\forall x \forall y \forall z \ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,, \\
&\forall x \forall y \ x + y = y + x, \\
&\forall x \forall y \ x \cdot y = y \cdot x, \\
&\forall x \ x + 0 = x, \\
&\forall x \ x \cdot 1 = x, \\
&\forall x \exists y \ x + y = 0, \\
&\forall x \ (\neg x = 0 \rightarrow \exists y \ x \cdot y = 1)\,, \\
&\forall x \forall y \forall z \ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\,, \\
&\neg 0 = 1,
\end{aligned}$$

   Lösung: Nein. $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \cdot, 0, 1\right) \not\cong (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$, wobei $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ ein abzählbarer Körper sei, welcher den Satz $\exists x \ x \cdot x = 1 + 1$ erfüllt.

4. Betrachten Sie die S_0-Formelmenge, die aus den Axiomen der Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x\ (\neg x < x)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \to y < z)\,,\\
&\forall x \forall y\ ((x = y \vee x < y) \vee y < x)\,,\\
&\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge \forall z\ (x < z \to (y < z \vee y = z)))\,,\\
&\forall x\ \exists y\ (y < x \wedge \forall z\ (z < x \to (z < y \vee y = z))).
\end{aligned}$$

Lösung: Nein. $(\mathbb{Z}, <) \ncong (Z_1 \cup Z_2, <)$, wobei $Z_1 = \{(1, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $Z_2 = \{(2, z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ und $(i, z_1) \leqslant (j, z_2)$ gdw. $i = j \wedge z_1 \leqslant z_2$ oder $i < j$.

5. Sei $S_3 := \varnothing$ und betrachten Sie die leere Formelmenge.

   Lösung: Ja.

Aufgabe 3 (12 Punkte). Sie erhalten jeweils eine Symbolmenge S und eine S-Zeichenkette. Bestimmen Sie, ob die Zeichenkette ein S-Term ist (keine Begründung nötig; Antworten "ja" oder "nein" genügen).

Verwenden Sie die formal korrekte Definition ***ohne*** vereinfachende Schreibweise (z.B. Weglassen von Klammern).

1. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, {}^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, {}^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left({}^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$$\circ\left(v_0, v_1\right).$$
Lösung: Ja.

2. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, {}^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, {}^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left({}^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$$\circ\left(\circ\left(v_0, v_1\right), v_2\right).$$
Lösung: Ja.

3. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, {}^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, {}^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left({}^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$${}^{-1}\left(v_1 \circ v_2\right).$$
Lösung: Nein.

4. Betrachten Sie $S = \{+, \times, <, 0, 1\}$. Dabei seien $+, \times$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(+) = \operatorname{ar}(\times) = 2$, $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$ und $0, 1$ seien Konstantensymbole. Zeichenkette:
$$<(0, 1) \wedge 1 = 1.$$
Lösung: Nein.

5. Betrachten Sie $S = \{+, \times, <, 0, 1\}$. Dabei seien $+, \times$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(+) = \operatorname{ar}(\times) = 2$, $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$ und $0, 1$ seien Konstantensymbole. Zeichenkette:
$$\times\left(+\left(1, 1\right), 1\right).$$
Lösung: Ja.

6. Betrachten Sie $S = \{<\}$. Dabei sei $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$. Zeichenkette:
$$v_0 < v_1.$$
Lösung: Nein.

Aufgabe 4 (24 Punkte). Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

ZL_1 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede endliche Kette in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein maximales Element."

ZL_2 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede Kette in $(P, \leqslant)$ eine obere Schranke, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein maximales Element."

ZL_3 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede Kette in $(P, \leqslant)$ eine obere Schranke, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element."

ZL_4 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede endliche Kette in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element."

Genau eine dieser vier Aussagen ist die korrekte Formulierung des Zornschen Lemmas, die anderen sind widerlegbar. Geben Sie an welche Formulierung korrekt ist (ohne Begründung) und geben Sie für die anderen jeweils ein Beispiel, um diese zu widerlegen.

Lösung: Die richtige Formulierung des Zorn'schen Lemmas ist die Aussage ZL_2.
Gegenbeispiel für ZL_1: $(\mathbb{N}, <)$.
Gegenbeispiel für ZL_3: $(\{0,1,2\}, <)$ mit $<=\{(0,1),(0,2)\}$.
Gegenbeispiel für ZL_4: $(\mathbb{N}, <)$.

Aufgabe 5 (24 Punkte). Sei $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ das Alphabet mit paarweise verschiedenen Symbolen a, b, c und d. Wir betrachen die folgenden Ableitungsregeln für nicht-leere Wörter z, z':

$$R_1 : \frac{}{ab} \quad , \qquad R_2 : \frac{z}{abz} \quad ,$$

$$R_3 : \frac{z}{zcd} \quad , \qquad R_4 : \frac{zbcz'}{zz'} \quad ,$$

$$R_5 : \frac{zadz'}{zz'} \quad .$$

1. Geben Sie eine Ableitung für das Wort ad an (6 Punkte).

2. Eine Zeichenkette heiße *ab-Kette*, falls sie entweder leer oder eine endliche Wiederholung der Zeichenkette ab ist. Ebenso heisse eine Zeichenkette eine *cd-Kette*, falls sie entweder leer oder eine endliche Wiederholung der Zeichenkette cd ist

   Zeigen Sie die folgende Aussage: Angenommen, z sei ein ableitbares Wort. Dann ist $z = z_1 z_2 z_3$, wobei z_1 eine ab-Kette ist, z_3 eine cd-Kette ist und $z_2 \in \{ab, ad\}$ (12 Punkte).

Lösung:

1. Ableitung für as Wort ab:

   ab (Regel R_1)

   $abcd$ (Regel R_3 mit $z = cd$)

   ad (Regel R_4 mit $z = a$, $z' = d$)

2. Wir zeigen die folgende Behauptung durch Induktion über den Aufbau des Wortes z.

   Induktionsbehauptung: Ist z Wort ableitbar, so ist $z = z_1 z_2 z_3$, wobei z_1 eine ab-Kette ist, z_3 eine cd-Kette ist und $z_2 \in \{ab, ad\}$.

   Induktionsanfang: Ist z ein Wort, welches nach der Regel R_1 abgeleitet wurde, so ist $z = ab$ und damit $z = z_1 z_2 z_2$ mit $z_1 = \square$ einer ab-Kette, $z_3 = \square$ einer cd-Kette und $z_2 = ab$ ($\square$ bezeichnet das leere Wort).

   Induktionsschritt.

   Angenommen das Wort z wurde abgeleitet und die zuletzt angewadte Regel war R_2. So ist $z = abw$ mit einem ableitbaren nicht-leeren Wort w. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w = w_1 w_2 w_3$ mit w_1 einer ab-Kette, w_3 einer cd-Kette und $w_2 \in \{ab, ad\}$. So ist $z = abw_1 w_2 w_3$. Setze $z_1 := abw_1$, dann ist z_1 eine ab-Kette und $z_2 := w_2$, $z_3 := w_3$. Es ist $z = z_1 z_2 z_3$ wie behauptet.

   Angenommen das Wort z wurde abgeleitet und die zuletzt angewadte Regel war R_3. So ist $z = wcd$ mit einem ableitbaren nicht-leeren Wort w. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w = w_1 w_2 w_3$ mit w_1 einer ab-Kette, w_3 einer cd-Kette und $w_2 \in \{ab, ad\}$. So ist $z = w_1 w_2 w_3 cd$. Setze $z_1 := w_1$, $z_2 := w_2$, $z_3 := w_3 cd$. Dann ist z_3 eine cd-Kette und $z = z_1 z_2 z_3$ wie behauptet.

   Angenommen das Wort z wurde abgeleitet und die zuletzt angewadte Regel war R_4. So ist $z = uv$ und wurde aus $w = ubcv$ abgeleitet, mit nicht-leeren Wörtern u, v. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w_1 = w_1 w_2 w_3$ mit w_1 einer ab-Kette, w_3 einer cd-Kette und $w_2 \in \{ab, ad\}$. Wegen $w = ubcv$ wissen wir, dass bc als Teilwort in w vorkommt. Da w_1 eine ab-Kette ist, so kann bc kein Teilwort von w_1 sein. Da w_3 eine cd-Kette ist, kann bc kein Teilwort von w_3 sein. Die einzige Stelle, wo bc sein kann ist genau die Grenze zwischen w_2 und w_3. Somit muss $w_2 = ab$ sein. Da w_3 nicht-leer ist, können wir schreiben $w_3 = cdw_3'$

mit w_3' einer cd-Kette. So ist $w = w_1 abcdw_3'$ und $z = w_1 adw_3'$. Setzt man $z_1 = w_2$, $z_2 = ad$ und $z_3 = w_3'$, so ist z wie behauptet.

Angenommen das Wort z wurde abgeleitet und die zuletzt angewadte Regel war R_5. So ist $z = uv$ und wurde aus $w = uadv$ abgeleitet, mit nicht-leeren Wörtern u, v. Nach Induktionsvoraussetzung ist $w_1 = w_1 w_2 w_3$ mit w_1 einer ab-Kette, w_3 einer cd-Kette und $w_2 \in \{ab, ad\}$. Wegen $w = uadv$ wissen wir, dass ad als Teilwort in w vorkommt. Da w_1 eine ab-Kette ist, so kann ad kein Teilwort von w_1 sein. Da w_3 eine cd-Kette ist, kann ad kein Teilwort von w_3 sein. Es muss also $w_2 = ad$ sein, sonst wäre ad kein Teilwort von z. Da w_1 nicht-leer ist, können wir schreiben $w_1 = w_1' ab$ mit w_1' einer ab-Kette. So ist $w = w_1' abadw_3$ und $z = w_1' abw_3$. Setzt man $z_1 = w_1'$, $z_2 = ab$ und $z_3 = w_3$, so ist z wie behauptet.

Aufgabe 6 (23 Punkte). Beweisen Sie:

1. Es gibt lineare Ordnungen, deren direktes Produkt keine lineare Ordnung ist (8 Punkte).
2. Die Klasse der nicht-linearen partiellen Ordnungen besitzt keine universelle Axiomatisierung (15 Punkte).

Lösung:

1. Sei $X = \{0, 1\}$ und $<_X = \{(0, 1)\}$. Dann ist $(X, <_X)$ eine zweielementige lineare Ordnung. Nach der Definition des direkten Produktes gilt für $(X \times X, <_{X \times X})$

$$X \times X = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

und

$$<_{X \times X} = \{(0,0), (1,1)\}.$$

Die elemente $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sind in $(X \times X, <_{X \times X})$ nicht vergleichbar, also ist $X \times X$ keine lineare Ordnung.

2. Sei $S = \{<\}$. Angenommen Φ ist eine Menge, bestehend aus universellen S-Sätzen, die eine Axiomatisierung der nicht-linearen partiellen Ordnungen darstellt. Sei $\mathfrak{A} = (P, <)$ eine nicht-lineare partielle Ordnung, d.h. $\mathfrak{A} \models \Phi$. So hat $\mathfrak{A}$ eine lineare Teilordnung, d.h. eine Substruktur $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, die eine lineare Ordnung bildet, denn $\mathfrak{B} = (\{p\}, \varnothing)$ ist ein Beispiel. Da Φ eine universelle Axiomatisierung der nicht-linearen partiellen Ordnung ist, folgt $\mathfrak{B} \models \Phi$ nach Substrukturlemma. Nun ist aber $\mathfrak{B}$ linear. Widerpsruch.