Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie
Sommersemester 2015

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Probeklausur, 2. Juli 2015

Es gibt insgesamt 127 Punkte. Zum Bestehen der Klausur reichen 64 Punkte. Sollten Sie Fragen haben, melden Sie sich bitte. Die Abgabe der Klausur ist um 16:00.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1	(24 Punkte)	**Aufgabe 4**	(24 Punkte)
Aufgabe 2	(20 Punkte)	**Aufgabe 5**	(24 Punkte)
Aufgabe 3	(12 Punkte)	**Aufgabe 6**	(23 Punkte)
		GESAMT	(127 Punkte)
		NOTE	

Aufgabe 1 (24 Punkte). Sagen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Falls die Aussage wahr ist, reicht es "wahr" zu schreiben. Für eine falsche Aussage geben Sie bitte ein Gegenbeispiel an (ohne weitere Begründung).

1. Jeder Term ist ein Ausdruck.
2. Jeder Ausdruck ist ein Term.
3. Jeder Hauptfilter ist ein Ultrafilter.
4. Jede partielle Ordnung hat ein maximales Element.
5. Ist ϕ ein universeller S-Satz und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, so folgt aus $\mathfrak{B} \models \phi$ auch $\mathfrak{A} \models \phi$.
6. Für jede Menge von S-Sätzen Φ gilt: Falls jede endliche Teilmenge von S-Sätzen Φ_0 von Φ erfüllbar ist, so ist auch Φ erfüllbar.
7. Jede abzählbare lineare Ordnung ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$.

8. Für jede unendliche Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es eine abzählbare Gruppe $\mathfrak{H}$, die elementar äquivalent zu $\mathfrak{G}$ ist.

Aufgabe 2 (20 Punkte). Betrachten Sie die folgenden Formelmengen und bestimmen Sie, ob diese Formelmengen abzählbar kategorisch sind. Wenn ja, reicht die Antwort "Ja". Wenn nein, geben Sie bitte zwei abzählbare Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Phi$ an, die nicht isomorph sind (ohne Beweis).

1. Es sei $S_0 = \{<\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol. Betrachten Sie die S_0-Formelmenge, die aus den Axiomen der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x\ (\neg x < x)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)\,,\\
&\forall x \forall y\ ((x = y \vee x < y) \vee y < x)\,,\\
&\forall x \forall y\ (x < y \rightarrow \exists z\ (x < z \wedge z < y))\,.
\end{aligned}$$

2. Es sei $S_1 = \{\circ, e\}$ mit einem zweistelligen Funktionssymbol $\circ$ und einem Konstantensymbol e. Betrachten Sie die S_1-Formelmenge, die aus den Gruppenaxiomen besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)\,,\\
&\forall x\ (x \circ e = x \wedge e \circ x = x)\,,\\
&\forall x \exists y\ (x \circ y = e \wedge y \circ x = e)\,.
\end{aligned}$$

3. Es sei $S_2 = \{+, \cdot, 0, 1\}$ mit zweistelligen Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ und Konstantensymbolen 0 und 1. Betrachten Sie die S_2-Formelmenge, die aus den Körperaxiomen besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z\ (x + y) + z = x + (y + z)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\,,\\
&\forall x \exists y\ x + y = 0,\\
&\forall x \forall y\ x + y = y + x,\\
&\neg 0 = 1,\\
&\forall x \forall y \forall z\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\,,\\
&\forall x\ x + 0 = x,\\
&\forall x\ x \cdot 1 = x,\\
&\forall x\ (\neg x = 0 \rightarrow \exists y\ x \cdot y = 1)\,,\\
&\forall x \forall y\ x \cdot y = y \cdot x.
\end{aligned}$$

4. Betrachten Sie die S_0-Formelmenge, die aus den Axiomen der Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte besteht, also

$$\begin{aligned}
&\forall x\ (\neg x < x)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow y < z)\,,\\
&\forall x \forall y\ ((x = y \vee x < y) \vee y < x)\,,\\
&\forall x\ (\exists y\ x < y \rightarrow \exists y\ (x < y \wedge \forall z\ (x < z \rightarrow (y < z \vee y = z))))\,,\\
&\forall x\ (\exists y\ y < x \rightarrow \exists y\ (y < x \wedge \forall z\ (z < x \rightarrow (z < y \vee y = z))))\,,\\
&\forall x\ \exists y\ x < y,\\
&\forall x\ \exists y\ y < x.
\end{aligned}$$

5. Sei $S_3 := \varnothing$ und betrachten Sie die leere Formelmenge.

Aufgabe 3 (12 Punkte). Sie erhalten jeweils eine Symbolmenge S und eine S-Zeichenkette. Bestimmen Sie, ob die Zeichenkette ein S-Term ist (keine Begründung nötig; Antworten "ja" oder "nein" genügen).

1. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, ^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, ^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left(^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$$\circ\left(v_0, v_1\right).$$
2. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, ^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, ^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left(^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$$\circ\left(\circ\left(v_0, v_1\right), v_2\right).$$
3. Betrachten Sie $S = \left\{\circ, e, ^{-1}\right\}$. Dabei seien $\circ, ^{-1}$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(\circ) = 2$, $\operatorname{ar}\left(^{-1}\right) = 1$, e ein Konstantensymbol. Zeichenkette:
$$^{-1}\left(v_1 \circ v_2\right).$$
4. Betrachten Sie $S = \{+, \times, <, 0, 1\}$. Dabei seien $+, \times$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(+) = \operatorname{ar}(\times) = 2$, $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$ und $0, 1$ seien Konstantensymbole. Zeichenkette:
$$<(0,1) \wedge 1 = 1.$$
5. Betrachten Sie $S = \{+, \times, <, 0, 1\}$. Dabei seien $+, \times$ Funktionssymbole, $\operatorname{ar}(+) = \operatorname{ar}(\times) = 2$, $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$ und $0, 1$ seien Konstantensymbole. Zeichenkette:
$$\times\left(+\left(1,1\right), 1\right).$$
6. Betrachten Sie $S = \{<\}$. Dabei sei $<$ ein Relationssymbol mit $\operatorname{ar}(<) = 2$. Zeichenkette:
$$v_0 < v_1.$$

Aufgabe 4 (24 Punkte). Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

ZL_1 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede endliche Kette in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein maximales Element."

ZL_2 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede Kette in $(P, \leqslant)$ eine obere Schranke, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein maximales Element."

ZL_3 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede Kette in $(P, \leqslant)$ eine obere Schranke, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element."

ZL_4 "Ist $(P, \leqslant)$ eine nicht-leere partielle Ordnung und hat jede endliche Kette in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element, so existiert in $(P, \leqslant)$ ein größtes Element."

Genau eine dieser vier Aussagen ist die korrekte Formulierung des Zornschen Lemmas, die anderen sind widerlegbar. Geben Sie an welche (ohne Begründung) und geben Sie für die anderen jeweils ein Beispiel, um diese zu widerlegen.

Aufgabe 5 (24 Punkte). Sei $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ das Alphabet mit paarweise verschiedenen Symbolen a, b, c und d. Wir betrachen die folgenden Ableitungsregeln für nicht-leere Wörter z, z':

$$R_1 : \frac{}{ab} \quad , \qquad R_2 : \frac{z}{abz} \quad ,$$

$$R_3 : \frac{z}{zcd} \quad , \qquad R_4 : \frac{zbcz'}{zz'} \quad ,$$

$$R_5 : \frac{zadz'}{zz'} \quad .$$

1. Geben Sie eine Ableitung für das Wort ad an (6 Punkte).
2. Eine Zeichenkette heiße *ab-Kette*, falls sie entweder leer oder eine endliche Wiederholung der Zeichenkette ab ist. Ebenso heisse eine Zeichenkette eine *cd-Kette*, falls sie entweder leer oder eine endliche Wiederholung der Zeichenkette cd ist

   Zeigen Sie die folgende Aussage: Angenommen, z sei ein ableitbares Wort. Dann ist $z = z_1 z_2 z_3$, wobei z_1 eine ab-Kette ist, z_3 eine cd-Kette ist und $z_2 \in \{ab, ad\}$ (18 Punkte).

Aufgabe 6 (23 Punkte). Beweisen Sie:

1. Es gibt lineare Ordnungen, deren direktes Produkt keine lineare Ordnung ist (8 Punkte).
2. Die Klasse der nicht-linearen partiellen Ordnungen besitzt keine universelle Axiomatisierung (15 Punkte).