Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 13 (Bonusblatt)

Abgabe am 7. Juli 2015 am Anfang der Vorlesung.

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind freiwillig und werden als Bonuspunkte gezählt. Nichtdestotrotz ist es empfehlenswert sich mit allen Aufgaben auseinanderzusetzen.

Aufgabe 1 (Ultraprodukt bzgl. Hauptfilters; 4 Punkte)

Seien S eine Symbolmenge, I eine nicht-leere Menge, U ein Hauptfilter auf I und $\mathfrak{A}_i$ eine S-Struktur für $i \in I$. Zeigen Sie, dass es ein $j \in I$ gibt, so dass $\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i / U \cong \mathfrak{A}_j$.

Aufgabe 2 (Produkte von Körpern; 6 Punkte)

Sei I eine nicht-leere Indexmenge und für $i \in I$ sei $\mathfrak{F}_i$ ein Körper. Bilden wir das direkte Produkt $\mathfrak{R} = \prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, so wissen wir, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist. Ist U ein Ultrafilter auf I, so sei

$$M_U := \{r \in R \mid \{i \in I \mid r(i) = 0\} \in U\},$$

wobei R die Grundmenge der Struktur $\mathfrak{R}$ ist.

Wir nennen eine nicht-leere Teilmenge $M \subseteq R$ ein *Ideal*, falls für alle $a, b \in M$ gilt $a - b \in M$ und für alle $a \in M, r \in R$ gilt $r \cdot a \in M$. Ein Ideal $M \subseteq R$ heißt *maximal*, falls kein Ideal $N \subseteq R$ existiert mit $M \subsetneq N \subsetneq R$.

Zeigen Sie:

1. Für jeden Ultrafilter U, ist M_U ein maximales Ideal im Ring $\mathfrak{R}$.
2. Für jedes maximale Ideal M im Ring $\mathfrak{R}$ existiert ein Ultrafilter U auf I mit $M = M_U$.
3. Das Ultraprodukt $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i / U$ ist isomorph zum Quotientenring $\mathfrak{R}/M_U$. Da M_U ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ ist, so folgern wir, dass $\mathfrak{R}/M_U$ und damit auch $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}_i / U$ ein Körper ist.

Aufgabe 3 (Ultraprodukt der Körper mit $\mathrm{Char}\ \mathfrak{K}_i = p_i$; 4 Punkte)

Sei $S = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Symbolmenge der Körper. Angenommen für $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{F}_i$ ein Körper der Primzahlcharakteristik p_i, wobei p_i die i-te Primzahl sei, und U ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, welcher kein Hauptfilter ist. Bestimmen Sie die Charakteristik des Körpers $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_i / U$.

Aufgabe 4 (Ultrapotenz von $\mathbb{R}$; 4 Punkte)

Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen, U ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, welcher kein Hauptfilter ist. Wir betrachten die Ultrapotenz $\mathfrak{A} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}/U$ von $\mathfrak{R}$

1. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathfrak{A}$ nicht-archimedisch ist, indem Sie eine Funktion $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ angeben, so dass $u \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{R}$ und $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} <^{\mathfrak{A}} [u]_U$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Geben Sie explizit die Funktionen $u_+ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $u_\times : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass $[u_+]_U = [u]_U +^{\mathfrak{A}} [u]_U$ und $[u_\times]_U = [u]_U \cdot^{\mathfrak{A}} [u]_U$.