Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 12

Abgabe am 30. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Deduktiver Abschluss; 4 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge und Φ eine Menge von S-Sätzen. Mit $\mathrm{DA}(\Phi) := \{\phi \in L_0^S \mid \Phi \vdash \phi\}$ bezeichnen wir den *deduktiven Abschluss* von Φ. Es sei $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S(\Phi)$, die durch Φ definierte Δ-elementare Klasse von Strukturen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{DA}(\Phi) = \bigcap \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{K}\}.$$

Lösung:
"$\subseteq$"
Sei $\phi \in L_0^S$ mit $\Phi \vdash \phi$. Um zu zeigen, dass $\phi \in \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{K}\}$, sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S(\Phi)$, d.h. $\mathcal{A} \models \Phi$. Jetzt gilt wegen der Korrektheit des Ableitungskalküls $\Phi \models \phi$, also $\mathcal{A} \models \phi$ was $\phi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ bedeutet.
"$\supseteq$"
Sei ϕ ein S-Satz mit $\phi \in \bigcap\{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{K}\}$. Also gilt: Für jede S-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$ ist auch $\mathcal{A} \models \phi$. Dies bedeutet $\Phi \models \phi$ und nach dem Vollständigkeitssatz ist $\Phi \vdash \phi$.

Aufgabe 2 (Nicht-archimedische Erweiterung von $\mathbb{R}$; 4 Punkte)

Falls $(K, <)$ eine lineare Ordnung ist und $\varnothing \neq X \subseteq K$, so nennen wir $s \in K$ *obere Schranke von* X, falls für alle $x \in X$ gilt, dass $x \leqslant s$. Falls eine obere Schranke existiert, so sagen wir, dass X beschränkt sei. Wir nennen s das *Supremum von* X, falls für alle oberen Schranken s' von X gilt, dass $s \leqslant s'$. Im Allgemeinen hat nicht jede beschränkte Teilmenge einer linearen Ordnung ein Supremum. Eine lineare Ordnung heißt *vollständig*, falls für jede nicht-leere beschränkte Teilmenge X ein Supremum von X existiert.

In der Vorlesung hatten wir einen beliebigen angeordneten Körper mit Hilfe von zusätzlichen Konstanten zu einem nicht-archimedischen Körper erweitert. Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen und sei $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, <, 0, 1)$ eine nicht-archimedische Erweiterung davon, d.h. $\mathbb{R} \subseteq A$ und es gibt ein $u \in A$, so dass für alle $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dass $n < u$.

1. Zeigen Sie:
   (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $u + x < u + u$,
   (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt $0 < \frac{1}{u} < x$,
   (c) Es gilt $u + u < u \cdot u$.
2. Zeigen Sie, dass $(A, <)$ nicht vollständig ist.

Lösung:

1. (a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$. Wegen $n < u$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Transitivität von $<$ folgt $x < u$. Aus den Axiomen für geordnete Körper folgt
$$x < u \implies u + x < u + u.$$

   (b) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x} < n$. Es ist $n < u$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also folgt
$$\frac{1}{x} < u \implies 1 < x \cdot u \implies \frac{1}{u} < x.$$

   Wir brauchen einige Tatsachen über angeordnete Körper, die man leicht aus der Theorie der angordneten Körpern folgert:

   - In jedem angeordneten Körper gilt: Ist $x < 0$, so ist $0 < -x$.
   - In jedem angeordneten Körper ist $0 < 1$. Sonst $1 \leqslant 0$ und wegen dem Axiom $\neg 0 = 1$ muss $1 < 0$ gelten. Nun liefert aber folgendes einen Widerspruch
$$1 < 0 \implies 0 < -1 \implies 0 \cdot (-1) < (-1) \cdot (-1) \implies 0 < 1.$$
   - Schließlich zeigen wir, dass in jedem angeordneten Körper gilt
$$\forall x \ \left(0 < x \to 0 < x^{-1}\right).$$
     Denn angenommen $0 < x$ aber $x^{-1} \leqslant 0$. Dann
$$x^{-1} < 0 \implies x^{-1} \cdot x < 0 \cdot x \implies 1 < 0$$
     widerspruch der Tatsache, dass $0 < 1$.

   Nun gilt $0 < u$ und damit auch $0 < (u)^{-1} = \frac{1}{u}$.

   (c) Es gilt
$$u + u = u \cdot 1 + u \cdot 1 = u \cdot (1 + 1) = u \cdot 2 < u \cdot u.$$

2. Wir betrachten die lineare Ordnung $(A, <)$ und sei $X := \mathbb{R} \subseteq A$. So ist X beschränkt, denn u ist eine obere Schranke für x. Es gibt aber kein Supremum von X: Wäre s ein Supremum von $X = \mathbb{R}$ so sei $s' := s - \frac{1}{u}$. Dann ist $s - \frac{1}{u} < s$, denn $0 < \frac{1}{u}$. Es gilt auch $x < s'$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sei dazu $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt $\frac{1}{u} < \varepsilon$ bzw. $0 < \varepsilon - \frac{1}{u}$ und es folgt
$$x + \varepsilon < s \implies x + \varepsilon - \frac{1}{u} < s - \frac{1}{u} \implies x + \varepsilon - \frac{1}{u} < s' \implies x < s'.$$
   Also folgt, dass s' eine kleinere obere Schranke von $\mathbb{R}$ ist als das Supremum s. Widerspruch. Somit ist $(A, <)$ nicht vollständig.

Aufgabe 3 (Lokal abzählbare lineare Ordnungen; 4 Punkte)

Falls $(L, <)$ eine lineare Ordnung ist und $x \in L$, so schreiben wir $L_x := \{y \in L \mid y < x\}$. Wir nennen $(L, <)$ *lokal abzählbar*, falls für alle $x \in L$ die Menge L_x höchstens abzählbar ist.

1. Zeigen Sie unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas, dass es eine überabzählbare, aber lokal abzählbare lineare Ordnung gibt.

   (Hinweis: Sei X eine überabzählbare Menge. Betrachten Sie die partielle Ordnung $\mathcal{P}$ bestehend aus lokal abzählbaren linearen Ordnungen, die auf einer Teilmenge von X definiert sind, mit einer geeignet gewählten Ordnungsrelation $\leqslant_{\mathcal{P}}$.)

2. Verwenden Sie die partielle Ordnung aus (1), um zu zeigen, dass es zwei nicht-isomorphe Modelle von Φ_{DLO} derselben (überabzählbaren) Kardinalität gibt.

   Folgern Sie daraus, dass Φ_{DLO} nicht kardinalkategorisch ist.

Lösung:

1. Wir fixieren eine überabzählbare Menge X. Sei $\mathcal{P} = (P, \leqslant_{\mathcal{P}})$ die partielle Ordnung definiert durch

$$P := \{(L, <_L) \mid L \subseteq X,\ (L, <_L) \text{ ist eine lokal abzählbare lineare Ordnung}\},$$

$$(L_1, <_{L_1}) \leqslant_{\mathcal{P}} (L_2, <_{L_2}) : \Longleftrightarrow L_1 \subseteq L_2,\ <_{L_1} \subseteq <_{L_2} \text{ und für alle } x \in L_1, y \in L_2 \backslash L_1 \text{ gilt } x <_{L_2} y.$$

   Wir wollen das Zorn'sche Lemma auf $\mathcal{P}$ anwenden. Es ist $\varnothing \in P$, also $P \neq \varnothing$. Wir prüfen, dass jede Kette in $\mathcal{P}$ eine obere Schranke besitzt. Sei also $K \subseteq P$ eine Kette in $(P, \leqslant_{\mathcal{P}})$. Sei $L^* := \bigcup_{(L,<_L) \in K} L$ und $<_L^* := \bigcup_{(L,<_L) \in K} <_L$. Dann ist $(L^*, <_{L^*})$ eine lineare Ordnung und $L \subseteq L^*$, $<_L \subseteq <_{L^*}$ für alle $(L, <_L) \in K$. Sei $(L, <_L) \in K$ und $x \in L^* \backslash L, y \in L$. Es ist dann $x \in L'$ mit $(L', <_{L'}) \in K$ und somit $x \in L' \backslash L, y \in L$. Nach Definition von $\leqslant_{\mathcal{P}}$ folgt $x <_{L'} y$ und wegen $<_{L'} \subseteq <_{L^*}$ ist auch $x <_{L^*} y$. Somit haben wir überprüft, dass $(L, <_L) \leqslant_{\mathcal{P}} (L^*, <_{L^*})$ für alle $(L, <_L) \in P$. Es ist $(L^*, <_{L^*})$ lokal abzählbar und somit eine obere Schranke von K.

   Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es ein maximales Element von $\mathcal{P}$, etwa $(L_{\max}, <_{L_{\max}})$. Falls $L_{\max}$ überabzählbar, so sind wir fertig. Falls $L_{\max}$ abzählbar, so $L_{\max} \neq X$. Sei $x \in X \backslash L_{\max}$. Erweitere $L_{\max}$ zu

$$L'_{\max} := L_{\max} \cup \{x\}$$

   und betrachte diese Menge mit der Ordnung

$$<_{L'_{\max}} := <_{L_{\max}} \cup \{(y, x) \mid y \in L_{\max}\}.$$

   Da $L_{\max}$ maximal in $\mathcal{P}$ ist, muss $L'_{\max} \notin \mathcal{P}$ gelten. Dies bedeutet, dass $L'_{\max}$ nicht lokal abzählbar ist und es muss wegen der Hinzunahme von x zu $L_{\max}$ scheitern. D.h. aber $(L'_{\max})_x = L_{\max}$ ist überabzählbar. Also $L_{\max}$ überabzählbar, aber lokal abzählbar.

2. Wir benutzen die Notation der Lösung der Aufgabe 4, Übungsblatt 11. Sei $(L, <_L)$ eine überabzhälbare, aber lokal labzählbare lineare Ordnung nach Aufgabenteil (1). Dann ist $L * \mathbb{Q}$ eine dichte lineare Ordnung, die auch lokal abzählbar ist. Sei L', die Ordnung die aus L ensteht, indem man ein zusätzliches Element rechts von L anfügt, d.h. $L' := L \cup \{x\}$ und $<_{L'} := <_L \cup \{(y, x) \mid y \in L\}$. Dann ist auch $L' * \mathbb{Q}$ eine dichte lineare Ordnung, die aber nicht lokal abzählbar ist. Die Ordnungen $L * \mathbb{Q}$ und $L' * \mathbb{Q}$ haben dieselbe Kardinalität und sind nicht isomorph. Somit ist Φ_{DLO} nicht kardinalkategorisch.

Aufgabe 4 (Quantorenelimination; 4 Punkte)

Sei $S = \{<\}$ die Symbolmenge der Ordnungen. Sei ψ ein S-Ausdruck, welcher Konjunktion von atomaren Ausdrücken ist. Zeigen Sie: Es gibt eine quantorenfreie Formel χ, so dass

$$\Phi_{\text{DLO}} \models (\exists x \psi \leftrightarrow \chi).$$

Lösung:
Die atomare S-Ausdrücke sind genau die Ausdrücke von der Form

- $t_1 = t_2$
- $t_1 < t_2$

mit S-Termen t_1, t_2. Da $S = \{<\}$, so sind die Variablen die einzigen Terme in dieser Sprache. Dies bedeutet, dass die atomare Ausdrücke sind genau die Ausdrücke von der Form

- $x_i = x_j$
- $x = x_j$
- $x_i = x$
- $x_i < x_j$
- $x < x_j$
- $x_i < x$
- $x = x$
- $x < x$

wenn wir die Variablenmenge mit $V = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ bezeichnen. Nun sind die Ausdrücke $x = x_i$ und $x_i = x$ äquivalent, nehme also OBdA, dass nur Ausdrücke von der Form $x = x_i$ vorkommen. Falls $x < x$ in ψ vorkommt, so ist $\Phi_{\text{DLO}} \models (\exists x\psi \leftrightarrow x < x)$. Der S-Ausdruck ψ kann also geschrieben werden als

$$\psi = \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} x = x_i \wedge \bigwedge_{j \in J} x < x_j \wedge \bigwedge_{kseK} x_k < x \wedge \bigwedge_{l \in L} x = x,$$

wobei α ein S-Ausdruck mit $x \notin \text{var}(\alpha)$ und $\{x_i \mid i \in I \cup J \cup K\} \subseteq \text{var}(\alpha)$ und I, J, K sind endliche Indexmengen. Wir machen folgende Fallunterscheidung.

Falls $I \neq \emptyset$, so sei $i^* \in I$ und es ist

$$\Phi_{\text{DLO}} \models \left(\exists x\psi \leftrightarrow \psi \frac{x_{i^*}}{x}\right),$$

denn die Teilformel $x = x_{i^*}$ gibt vor, dass die Belegung von x_{i^*} und x dieselbe sein muss um ψ zu erfüllen.

Falls $I = \emptyset$ und $J = \emptyset$, so ist

$$\Phi_{\text{DLO}} \models (\exists x\psi \leftrightarrow \alpha),$$

Denn jedes Modell $\mathcal{A} \models \Phi_{\text{DLO}}$ mit $(\mathcal{A}, \beta) \models \exists x\psi$ erfüllt auch α, da α Teilformel von ψ ist. Andersrum, falls $\mathcal{A} \models \Phi_{\text{DLO}}$ mit $(\mathcal{A}, \beta) \models \alpha$, so sei $a \in A$ mit $a > \beta(x_i)$, $x_i \in \text{var}(\alpha)$. Dann ist $\left(\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x}\right) \models \psi$.

Falls $I = \emptyset$ und $J \neq \emptyset$ und $K = \emptyset$, so ist

$$\Phi_{\text{DLO}} \models (\exists x\psi \leftrightarrow \alpha),$$

analog zum vorigen Fall.

Falls $I = \emptyset$ und $J \neq \emptyset \neq K$, so ist

$$\Phi_{\text{DLO}} \models \left(\exists x\psi \leftrightarrow \left(\alpha \wedge \bigwedge_{j \in J, k \in K} x_k < x_j\right)\right),$$

denn ist $\mathcal{A} \models \Phi_{\text{DLO}}$ mit $(\mathcal{A}, \beta) \models \exists x\psi$, so folgt $(\mathcal{A}, \beta) \models x < x_j \wedge x_k < x$ für alle $j \in J, k \in K$. Es folgt $(\mathcal{A}, \beta) \models x_k < x_j$ für alle $j \in J, k \in K$. Andersrum, falls $\mathcal{A} \models \Phi_{\text{DLO}}$ mit

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \left(\alpha \wedge \bigwedge_{i \in J, k \in K} x_k < x_j\right),$$

dann sei $a := \max\ \{\beta(x_k) \mid k \in K\}$ und $b := \min\ \{\beta(x_j) \mid j \in J\}$. Da $\mathcal{A}$ eine dichte lineare Ordnung ist, gibt es ein $c \in A$ mit $a < c < b$. So ist $\left(\mathcal{A}, \beta\frac{c}{x}\right) \models \psi$.