Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 12

Abgabe am 30. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Deduktiver Abschluss; 4 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge und Φ eine Menge von S-Sätzen. Mit $\mathrm{DA}(\Phi) := \{\phi \in L_0^S \mid \Phi \vdash \phi\}$ bezeichnen wir den *deduktiven Abschluss* von Φ. Es sei $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S(\Phi)$, die durch Φ definierte Δ-elementare Klasse von Strukturen. Zeigen Sie:

$$\mathrm{DA}(\Phi) = \bigcap \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathfrak{K}\}.$$

Aufgabe 2 (Nicht-archimedische Erweiterung von $\mathbb{R}$; 4 Punkte)

Falls $(K, <)$ eine lineare Ordnung ist und $\varnothing \neq X \subseteq K$, so nennen wir $s \in K$ *obere Schranke von* X, falls für alle $x \in X$ gilt, dass $x \leqslant s$. Falls eine obere Schranke existiert, so sagen wir, dass X beschränkt sei. Wir nennen s das *Supremum von* X, falls für alle oberen Schranken s' von X gilt, dass $s \leqslant s'$. Im Allgemeinen hat nicht jede beschränkte Teilmenge einer linearen Ordnung ein Supremum. Eine lineare Ordnung heißt *vollständig*, falls für jede nicht-leere beschränkte Teilmenge X ein Supremum von X existiert.

In der Vorlesung hatten wir einen beliebigen angeordneten Körper mit Hilfe von zusätzlichen Konstanten zu einem nicht-archimedischen Körper erweitert. Sei $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen und sei $\mathfrak{A} = (A, +, \cdot, <, 0, 1)$ eine nicht-archimedische Erweiterung davon, d.h. $\mathbb{R} \subseteq A$ und es gibt ein $u \in A$, so dass für alle $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dass $n < u$.

1. Zeigen Sie:
   (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $u + x < u + u$,
   (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gilt $0 < \frac{1}{u} < x$,
   (c) Es gilt $u + u < u \cdot u$.
2. Zeigen Sie, dass $(A, <)$ nicht vollständig ist.

Aufgabe 3 (Lokal abzählbare lineare Ordnungen; 4 Punkte)

Falls $(L, <)$ eine lineare Ordnung ist und $x \in L$, so schreiben wir $L_x := \{y \in L \mid y < x\}$. Wir nennen $(L, <)$ *lokal abzählbar*, falls für alle $x \in L$ die Menge L_x höchstens abzählbar ist.

1. Zeigen Sie unter Verwendung des Zorn'schen Lemmas, dass es eine überabzählbare, aber lokal abzählbare lineare Ordnung gibt.

   (Hinweis: Sei X eine überabzählbare Menge. Betrachten Sie die partielle Ordnung $\mathcal{P}$ bestehend aus lokal abzählbaren linearen Ordnungen, die auf einer Teilmenge von X definiert sind, mit einer geeignet gewählten Ordnungsrelation $\leqslant_{\mathcal{P}}$.)

2. Verwenden Sie die partielle Ordnung aus (1), um zu zeigen, dass es zwei nicht-isomorphe Modelle von Φ_{DLO} derselben (überabzählbaren) Kardinalität gibt.

   Folgern Sie daraus, dass Φ_{DLO} nicht kardinalkategorisch ist.

Aufgabe 4 (Quantorenelimination; 4 Punkte)

Sei $S = \{<\}$ die Symbolmenge der Ordnungen. Sei ψ ein S-Ausdruck, welcher Konjunktion von atomaren Ausdrücken ist. Zeigen Sie: Es gibt eine quantorenfreie Formel χ, so dass

$$\Phi_{\mathrm{DLO}} \models (\exists x \psi \leftrightarrow \chi)\,.$$