Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 11

Abgabe am 23. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Archimedische Körper; 4 Punkte)

Wir betrachten $S_{\mathrm{Ar}}^{<} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Sprache der angeordneten Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ sei t_n der variablenfreie Term $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}$. Wir erinnern uns: ein angeordneter Körper $\mathfrak{K}$ heißt *archimedisch*, falls für alle $a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a <^{\mathfrak{K}} t_n^{\mathfrak{K}}$.

Zeigen Sie: Gilt ein $S_{\mathrm{Ar}}^{<}$-Satz ϕ in allen nicht-archimedisch angeordneten Körpern, so gilt ϕ in allen angeordneten Körpern.

Lösung:

Sei ϕ ein Satz in der Sprache $S_{\mathrm{Ar}}^{<}$, welcher in allen nicht-archimedisch angeordneten Körpern gilt. Sei Φ_{gKp} die Theorie der angeordneten Körper und sei ϕ_{gKp} die Konjuktion von diesen endlich vielen Axiomen. Sei S^* die Sprache $S_{\mathrm{Ar}}^{<}$ zusammen mit einem neuen Konstantensymbol c. Dann gilt

$$\{\phi_{\mathrm{gKp}}\} \cup \{t_n < c \mid n \in \mathbb{N}\} \models \phi.$$

Mit dem Endlichkeitssatz folgt

$$\{\phi_{\mathrm{gKp}}\} \cup \{t_n < c \mid n < n_0\} \models \phi$$

für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Ist nun $\mathfrak{K}$ ein geordneter Körper, d.h. $\mathfrak{K} \models \phi_{\mathrm{gKp}}$, so gilt

$$\mathfrak{K} \models \{t_n < c \mid n < n_0\},$$

wenn man $c^{\mathfrak{K}}$ als $t_{n_0}^{\mathfrak{K}}$ interpretiert. Also folgt $\mathfrak{K} \models \phi$.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen; 4 Punkte)

Sei $S = \{\sim\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol $\sim$. Für eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \sim^{\mathfrak{A}})$ definiert $\sim^{\mathfrak{A}}$eine Äquivalenzrelation auf A, falls $A \models \Phi_{\text{Äq}}$, wobei $\Phi_{\text{Äq}}$ aus den folgenden Sätzen besteht

$$\begin{array}{ll} \forall v_0\ v_0 \sim v_0 & \text{(Reflexivität)}, \\ \forall v_0 \forall v_1\ (v_0 \sim v_1 \to v_1 \sim v_0) & \text{(Symmetrie)}, \\ \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ ((v_0 \sim v_1 \land v_1 \sim v_2) \to v_0 \sim v_2) & \text{(Transitivität)}. \end{array}$$

Seien ϕ_1 und ϕ_2 die Sätze:

$$\begin{array}{ll} \phi_1 := & \exists v_0 \exists v_1 \exists v_2\ ((\neg v_0 \sim v_1 \land \neg v_0 \sim v_2) \land \neg v_1 \sim v_2), \\ \phi_2 := & \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\ (((((v_0 \sim v_1 \lor v_0 \sim v_2) \lor v_0 \sim v_3) \lor v_1 \sim v_2) \lor v_1 \sim v_3) \lor v_2 \sim v_3). \end{array}$$

Wir betrachten $\Phi := \Phi_{\text{Äq}} \cup \{\phi_1, \phi_2\}$.

1. Zeigen Sie, dass Φ nicht abzählbar kategorisch ist.
2. Finden Sie eine Erweiterung von Φ, die abzählbar kategorisch ist.

Lösung:

Die Modelle von $\Phi = \Phi_{\text{Äq}} \cup \{\phi_1, \phi_2\}$ sind genau die Strukturen $\mathfrak{A} = \left(A, \sim^{\mathfrak{A}}\right)$ bestehend aus eine Grundmenge und einer Äquivalenzrelation $\sim^{\mathfrak{A}}$ auf A, die genau drei Äquivalenzklassen hat.

1. Betrachte zwei folgende Strukturen: $\mathfrak{A}_1 = \left(A_1, \sim^{\mathfrak{A}_1}\right)$, $\mathfrak{A}_2 = \left(A_2, \sim^{\mathfrak{A}_2}\right)$ mit

   $$A_1 = \mathbb{N},\ \sim^{\mathfrak{A}_1} = \{\{0\}, \{1\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}\}$$

   und

   $$A_2 = \mathbb{N},\ \sim^{\mathfrak{A}_2} = \{\{0,1\}, \{2\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 3\}\}.$$

   Offensichtlich sind beide $\sim^{\mathfrak{A}_1}$ und $\sim^{\mathfrak{A}_2}$ Äquivalenzrelationen mit genau drei Äquivalenzklassen, also sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ beide Modelle von Φ.

   Die Strukturen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ sind nicht-isomorph: Wir können folgende Aussage formalisieren

   es gibt eine Äquivalenzklasse mit genau 2 Elementen

   durch die Formel ψ

   $$\exists v_0 \exists v_1\ \left((\neg v_0 = v_1 \wedge v_0 \sim v_1) \wedge \forall v_2\ \left((\neg v_2 = v_0 \wedge \neg v_2 = v_1) \rightarrow (\neg v_0 \sim v_2 \wedge \neg v_1 \sim v_2)\right)\right).$$

   D.h. für alle Modelle $\mathfrak{A}$ von Φ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$ gdw. $\sim^{\mathfrak{A}}$ hat eine Äquivalenzklasse mit genau 2 Elementen. Nun, es ist $\mathfrak{A}_1 \not\models \psi$ aber $\mathfrak{A}_2 \models \psi$. Nach dem Isomorphiesatz können $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht isomorph sein.

   Da wir zwei abzählbar unendliche nicht-isomorphe Modelle von Φ gefunden haben, ist Φ nicht abzählbar kategorisch.

2. Betrachte die drei folgenden Formeln ψ_1, ψ_2, χ_n mit

   $$\psi_1 = \quad \exists v_0\ \forall v_1\ (\neg v_1 = v_0 \rightarrow \neg v_0 \sim v_1),$$

   $$\begin{aligned}\psi_2 = \quad & \exists v_0 \exists v_1\ \left((\neg v_0 = v_1 \wedge v_0 \sim v_1)\right. \\ & \wedge \forall v_2\ \left((\neg v_2 = v_0 \wedge \neg v_2 = v_1) \rightarrow (\neg v_0 \sim v_2 \wedge \neg v_1 \sim v_2)\right) \text{ (wie oben)},\end{aligned}$$

   $$\chi_n = \quad \exists v_1 \exists v_1 \ldots \exists v_n \left(\bigwedge_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \neg v_i = v_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leqslant i,j \leqslant n} v_i \sim v_j \right).$$

   Es gilt: $\mathfrak{A} \models \chi_n$ gdw. es gibt eine Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}}$ mit mindestens n Elementen. Betrachte nun die Theorie

   $$\Phi' := \Phi \cup \{\psi_1, \psi_2\} \cup \{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

   Ist $\mathfrak{A} \models \Phi'$, so ist $\sim^{\mathfrak{A}}$ eine Äquivalenzrelation mit genau 3 Äquivalenzklassen, wobei eine Äquivalenzklasse aus genau einem Element besteht, eine Äquivalenzklasse aus genau 2 Elementen besteht, und eine Äquivalenzklasse unendlich viele Elemente hat. Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \models \Phi'$ beide abzählbar, so gibt es eine Bijektion zwischen A_1 und A_2, die

   - die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_1}$ der Kardinalität 1 bijektiv auf die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_2}$ der Kardinalität 1 abbildet,
   - die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_1}$ der Kardinalität 2 bijektiv auf die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_2}$ der Kardinalität 2 abbildet,
   - die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_1}$ der abzählbar unendlichen Kardinalität auf die Äquivalenzklasse von $\sim^{\mathfrak{A}_2}$, die auch abzählbar unendlich ist, bijektiv abbildet.

   Die oben beschriebene Abbildung ist somit ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Somit ist Φ' eine abzählbar kategorische Erweiterung von Φ.

Aufgabe 3 (Erweiterung um eine Konstante; 2 Punkte)

Sei $S_{\mathrm{Ar}}^{<} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Sprache der geordneten Körper. Wir betrachten den archimedischen Körper $\mathfrak{Q} = \left(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}\right)$ der rationalen Zahlen und die Theorie

$$\Phi := \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \cup \{t_n < c \mid n \in \mathbb{N}\}\,,$$

wobei t_n sei der Term $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ und c ein neues Konstantensymbol.

Ist es möglich ein Modell $\mathfrak{A} = \left(A, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}\right)$ von Φ zu finden, so dass die Redukte $\left(A, <^{\mathfrak{A}}\right) \cong \left(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\right)$ isomorph als lineare Ordnungen sind?

Lösung:
Endlichkeitssatz impliziert, dass die Theorie Φ konsistent ist. Sei $\mathfrak{B}$ ein beliebiges Modell von Φ. Nach dem absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$ von Φ, welches abzählbar unendlich ist. Nun wissen wir, dass die Struktur $\left(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\right)$ eine abzählbare dichte lineare Ordnung ist, d.h. $\left(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\right) \models \Phi_{\mathrm{dlO}}$. Da die Theorie der dichten linearen Ordnungen in Φ enthalten ist, d.h. $\Phi_{\mathrm{dlO}} \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \subseteq \Phi$, insbesondere $\mathfrak{A} \models \Phi_{\mathrm{dlO}}$. Damit ist $\left(A, <^{\mathfrak{A}}\right)$ eine abzählbare dichte lineare Ordnung. Nach dem Satz von Cantor sind je zwei abzählbare dichte lineare Ordnungen isomorph, $\left(A, <^{\mathfrak{A}}\right) \cong \left(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\right)$.

Aufgabe 4 (Diskrete lineare Ordnungen; 4 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $S_{\mathrm{Ord}} := \{<\}$ der Ordnungstheorie. Die folgende Theorie nennen wir die Theorie der diskreten linearen Ordnungen und bezeichnen sie mit Φ_{dislO}:

$$\begin{aligned}
&\forall x\ \ (\neg x < x)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z\ \ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow y < z)\,,\\
&\forall x \forall y\ \ (x = y \vee x < y \vee y < x)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall x\ \ (\exists y\ x < y \rightarrow (\exists y\ x < y \wedge \forall z\ \ (x < z \rightarrow (y < z \vee y = z))))\,,\\
&\forall x\ \ (\exists y\ y < x \rightarrow (\exists y\ y < x \wedge \forall z\ \ (z < x \rightarrow (z < y \vee y = z))))\,.
\end{aligned}$$

Fügt man zu Φ_{dislO} die zwei folgende Axiome, so nennen wir die entstehende Menge von Sätzen die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte und bezeichnen sie mit Φ_{dislOoE}:

$$\begin{aligned}
&\forall x\ \ (\exists y\ x < y)\,,\\
&\forall x\ \ (\exists y\ y < x)\,.
\end{aligned}$$

Finden Sie unendlich viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle der Theorie Φ_{dislOoE}. Können Sie überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle der Theorie Φ_{dislOoE} viele finden?

(Wenn Sie nur endlich viele verschiedene Modelle (mindestens zwei) finden, gibt es die Hälfte der Punkte. Es gibt sogar überabzahlbar viele paarweise nicht-isomorpher Modelle: zwei Extrapunkte für einen Beweis dieser Tatsache.)

Lösung:
Sei $\mathcal{Z} = \left(\mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}}\right)$, die Struktur der ganzen Zahlen als lineare Ordnungen. Man vergewissert sich leicht, dass $\left(\mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}}\right)$ eine diskrete lineare Ordnung ohne Endpunkte bildet, d.h. $\mathcal{Z} \models \Phi_{\mathrm{disLOoE}}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Definiere die Struktur $\mathcal{Z}_n = \left(Z_n, <^{\mathcal{Z}_n}\right)$ wiefolgt

$$Z_n := \{(i, x) \ \mid 1 \leqslant i \leqslant n, x \in \mathbb{Z}\}\,,$$

$$(i,x) <^{\mathcal{Z}_n} (j,y) :\iff i = j \wedge x <^{\mathbb{Z}} y \text{ oder } i < j.$$

Grob gesagt, die Struktur $\mathcal{Z}_n$ entsteht, indem man n Kopien von $\left(\mathbb{Z}, <^{\mathbb{Z}}\right)$ hintereinander anfügt.

Man überlegt sich, dass $\mathcal{Z}_n$ eine diskrete lineare Ordnung ohne Endpunkte ist. Aus der Definition von $<^{\mathcal{Z}_n}$ ist es recht klar, dass es eine lineare Ordnung ist. Jedes Element (i,x) von Z_n hat einen unmittelbaren Vorgänger, nämlich $(i, x-1)$. Genauso ist $(i, x+1)$ der unmittelbarer Nachfolger von (i,x). Die Struktur $\mathcal{Z}_n$ hat kein größtes Element, denn für (i,x) ist $(i,x+1)$ stets echt größer. Ebenso hat sie kein kleinstes Element, denn für (i,x) ist $(0, x-1)$ stets echt kleiner. Somit ist $\mathcal{Z} \models \Phi_{\text{disLOoE}}$.

Behauptung: Für $n \neq m$ ist $\mathcal{Z}_n \not\cong \mathcal{Z}_m$.

Angenommen $n < m$ sind natürliche Zahlen. Betrachte die Formelmenge Φ mit freien Variablen $x_0, \ldots, x_m$

$$\Phi = \left\{ \exists v_0 \exists v_1 \ldots \exists v_{k-1} \left(\bigwedge_{i,j;k} v_i \neq v_j \wedge \bigwedge_{i<k} (x_j < v_i \wedge v_i < x_{j+1}) \;\middle|\; k \in \mathbb{N},\, j < m \right) \right\}.$$

Eine Struktur $\mathfrak{A} = \left(A, <^{\mathfrak{A}}\right)$ erfüllt: $\left(\mathfrak{A}, \beta \frac{a_0}{x_0} \ldots \frac{a_m}{x_{m-1}}\right) \models \Phi$ gdw. für alle $j < m$ liegen zwischen a_j und a_{j+1} liegen unendlich viele Elemente bzgl. $<^{\mathfrak{A}}$. Es gilt

$$\left(\mathcal{Z}_m, \beta \frac{(0,0)}{x_0} \frac{(1,0)}{x_1} \ldots \frac{(m,0)}{x_m}\right) \models \Phi,$$

aber für alle $a_0, \ldots, a_m \in Z_n$ ist

$$\left(\mathcal{Z}_n, \beta \frac{a_0}{x_0} \ldots \frac{a_m}{x_m}\right) \not\models \Phi.$$

Dies ist der Fall, denn $n < m$ und damit gibt es $i, j < m$ mit $a_i = (k, x)$ und $a_j = (k, y)$ und damit liegen zwischen a_i und a_j nur endlich viele Elemente. Somit können $\mathcal{Z}_n$ und $\mathcal{Z}_m$ nicht isomorph sein.

Man hat somit abzählbar viele nicht-isomorphe diskrete lineare Ordnungen ohne Endpunkte gefunden.

Wir können sogar überabzählbare viele nicht-isomorphe diskrete lineare Ordnungen ohne Endpunkte finden. Das geschieht auf etwas andere Weise und braucht ein wenig Vorüberlegung:

1. Wir definieren eine Operation $L_1 * L_2$ auf zwei linearen Ordnungen $(L_1, <_{L_1})$ und $(L_2, <_{L_2})$.
2. Wir stellen fest: Sind L_1 und L_2 nicht-isomorphe lineare Ordnungen, so sind auch $L_1 * \mathbb{Z}$ und $L_2 * \mathbb{Z}$ nicht-isomorph.
3. Für jede lineare Ordnung L ist $L * \mathbb{Z}$ eine diskrete lineare Ordnung.
4. Wir finden überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe lineare Ordnungen. (Genauer, finden wir genauso viele paarweise nicht-isomorphe lineare Orndungen wie die Größe von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, der Potenzmenge der natürlichen Zahlen.)

Wir führen diese Einzelschritte aus.

1. Sind $(L_1, <_{L_1})$ und $(L_2, <_{L2})$ lineare Ordnungen, so definieren Wir *das Produkt von L_1 und L_2*, bezeichnet durch $(L_1 * L_2, <_{L_1 * L_2})$, wiefolgt

$$L_1 * L_2 := \{(a,b) \mid a \in L_1, b \in L_2\},$$

$$(a,b) <_{L_1 * L_2} (c,d) :\iff a = c \wedge b <_{L_2} d \text{ oder } a <_{L_1} c.$$

Es ist nicht schwer sich klarzumachen, dass $(L_1 * L_2, <_{L_1 * L_2})$ auch eine lineare Ordnung ist. Anschaulich entsteht $(L_1 * L_2, <_{L_1 * L_2})$ dadurch, dass man jeden Punkt von L_1 durch eine Kopie der Ordnung $(L_2, <_{L_2})$ ersetzt. Man beachte, dass $L_1 * L_2$ und $L_2 * L_1$ im Allgemeinen verschieden sind.

Die oben definierte Struktur $\mathcal{Z}_n$ kann man jetzt auch wiefolgt bennen:

$$\mathcal{Z}_n = \{1, \dots, n\} * \mathbb{Z},$$

wobei $\{1, \dots, n\}$ und $\mathbb{Z}$ die üblichen Ordnungen mit sich tragen.

2. Als nächstets überlegen wir uns folgendes: Sind $(L_1, \leqslant_{L_1})$ und $(L_2, \leqslant_{L_2})$ nicht-isomorphe lineare Ordnungen, so sind auch $L_1 * \mathbb{Z}$ und $L_2 * \mathbb{Z}$ nicht-isomorph. Wir beweisen das indirekt. Angenommen $h : L_1 * \mathbb{Z} \to L_2 * \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus zwischen diesen linearen Ordnungen. Es gilt: falls $(b_1, m_1) = h((a,0))$ und $(b_2, m_2) = h((a,n))$, so ist $b_1 = b_2$. Dies gilt, denn es ist ausdrückbar, dass (a,n) der n-te Nachfolger von $(a,0)$ ist. Also muss auch in $L_1 * \mathbb{Z}$ der Wert von $h((a,n))$ der n-te Nachfolger von $h((a,0))$ sein, dieser hat aber dieselbe erste Komponente. Wir können nun definieren $h' : L_1 \to L_2$, wobei $h'(a)$ soll die erste Koordinate von $h((a,0))$ sein, und das ist ein Isomorphismus von linearen Ordnungen.

3. Es gilt: Ist $(L, \leqslant_L)$ eine beliebige lineare Ordnung, so ist $L * \mathbb{Z}$ eine diskrete lineare Ordnung ohne Endpunkte. Der direkte Nachfolger von (a,n) ist $(a, n+1)$ und er direkte Vorgänger ist $(a, n-1)$. Daran sieht man auch, dass $L * \mathbb{Z}$ kein minimales und kein maximales Element besitzt.

4. Mit den zwei obigen Überlegungen reicht uns überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe lineare Ordnungen L_i, $i \in I$ zu finden. Denn dann sind $L_i * \mathbb{Z}$ paarweise nicht-isomorphe diskrete lineare Ordnungen ohne Punkte.

   Wir geben für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ eine lineare Ordnung L_A an, so dass für $A \neq B \subseteq \mathbb{N}$ die Ordnungen L_A und L_B nicht-isomorph sind. Dann haben wir so viele paarweise nicht-isomorphe lineare Ordnungen wie es Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt, und das sind überabzählbar viele. Sei $A \subseteq \mathbb{N}$, die lineare Ordnung $(L_A, <_A)$ sei gegeben durch

$$L_A = \mathbb{N} \backslash A \cup \{(n,z) \mid n \in A, z \in \mathbb{Z}\},$$

$$\begin{aligned} <_{L_A} := \quad \{(n,m) \mid n, m \notin A,\, n <_{\mathbb{Z}} m\} \quad & \cup \{((n,z),(n,z')) \mid n \in A,\, z <_{\mathbb{Z}} z'\} \\ & \cup \{((n,z),(m,z')) \mid n, m \in A,\, n <_{\mathbb{Z}} m\} \\ & \cup \{(n,(m,z')) \mid n \notin A,\, m \in A,\, n <_{\mathbb{Z}} m\} \\ & \cup \{((n,z),m) \mid n \in A,\, m \notin A,\, n <_{\mathbb{Z}} m\}. \end{aligned}$$

   Diese Ordnung entsteht dadruch, dass man die Ordnung der natürlichen Zahlen modifiziert, indem man Punkte aus A durch Kopien von $\mathbb{Z}$ ersetzt.
   Behauptung: Für $A \neq B$ ist $L_A \ncong L_B$.
   Angenommen $h : L_A \to L_B$ ist ein Isomorphismus zwischen $(L_A, <_{L_A})$ und $(L_B, <_{L_B})$. Wie oben überlegt man sich, dass für $n \in A$ falls $(b_1, m_1) = h((n,0))$ und $(b_2, m_2) = h((n,z))$, so $b_1 = b_2$. Sei n_0 die kleinste natürliche Zahl n mit $n \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. OBdA sei $n_0 \in A \backslash B$. Es gilt für alle $n < n_0$ mit $n \notin A$, dass $n \notin B$ und $h(n) = n$. Falls $n < n_0$ und $n \in A$, so auch $n \in B$ und h bildet $\{(n,z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ bijekiv auf $\{(n,z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ab.
   Ist $n_0 = 0$, so hat die Ordnung $(L_A, <_{L_A})$ kein kleinstes Element (wegen $n_0 = 0 \in A$). In $(L_B, <_{L_B})$ ist aber $n_0 = 0$ das kleinste Element ($n_0 = 0 \notin B$). Da h ein Isomorphismus ist, muss also $n_0 > 0$ gelten.
   Betrachte zwei Fälle:
   Falls $n_0 - 1 \in A$, so auch $n_0 - 1 \in B$ nach der Wahl von n_0. Da h ein Isomorphismus ist, so existiert ein $x \in L_A$ mit $h(x) = n_0$. Da n_0 in $(L_B, \leqslant_B)$ keinen unmittelbaren Vorgänger hat, so hat auch x in $(L_A, \leqslant_A)$ keinen unmittelbaren Vorgänger. Da jedes Element von der Form $(n_0, z) \in L_A$ einen unmittelbaren Vorgänger hat, ist $x \neq (n_0, z)$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

Damit kann h z.B. das Element $(n_0, 0)$ nicht ordnungerhaltend abbilden und ist kein Isomorphismus.
Falls $n_0 - 1 \notin A$, so auch $n_0 - 1 \notin B$ nach der Wahl von n_0. Da $n_0 \notin B$, so ist n_0 der unmittelbarer Nachfolger von $n_0 - 1$ und damit muss $h^{-1}(n_0)$ auch der unmittelbarer Nachfolger von $h^{-1}(n_0 - 1) = n_0 - 1$ sein. Aber $n_0 - 1$ hat keinen unmitelbaren Nachfolger in $(L_A, <_A)$. Widerspruch zu h Isomorphismus.