Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 11

Abgabe am 23. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Archimedische Körper; 4 Punkte)

Wir betrachten $S^{<}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Sprache der angeordneten Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ sei t_n der variablenfreie Term $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$. Wir erinnern uns: ein angeordneter Körper $\mathfrak{K}$ heißt *archimedisch*, falls für alle $a \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a <^{\mathfrak{K}} t_n^{\mathfrak{K}}$.

Zeigen Sie: Gilt ein $S^{<}_{\mathrm{Ar}}$-Satz ϕ in allen nicht-archimedisch angeordneten Körpern, so gilt ϕ in allen angeordneten Körpern.

Aufgabe 2 (Äquivalenzrelationen; 4 Punkte)

Sei $S = \{\sim\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol $\sim$. Für eine Struktur $\mathfrak{A} = \left(A, \sim^{\mathfrak{A}}\right)$ definiert $\sim^{\mathfrak{A}}$eine Äquivalenzrelation auf A, falls $A \models \Phi_{\text{Äq}}$, wobei $\Phi_{\text{Äq}}$ aus den folgenden Sätzen besteht

$$\begin{array}{ll} \forall v_0\ v_0 \sim v_0 & \text{(Reflexivität)}, \\ \forall v_0 \forall v_1\ (v_0 \sim v_1 \to v_1 \sim v_0) & \text{(Symmetrie)}, \\ \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ ((v_0 \sim v_1 \wedge v_1 \sim v_2) \to v_0 \sim v_2) & \text{(Transitivität)}. \end{array}$$

Seien ϕ_1 und ϕ_2 die Sätze:

$$\begin{array}{ll} \phi_1 := & \exists v_0 \exists v_1 \exists v_2\ ((\neg v_0 \sim v_1 \wedge \neg v_0 \sim v_2) \wedge \neg v_1 \sim v_2), \\ \phi_2 := & \forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3\ (((((v_0 \sim v_1 \vee v_0 \sim v_2) \vee v_0 \sim v_3) \vee v_1 \sim v_2) \vee v_1 \sim v_3) \vee v_2 \sim v_3). \end{array}$$

Wir betrachten $\Phi := \Phi_{\text{Äq}} \cup \{\phi_1, \phi_2\}$.

1. Zeigen Sie, dass Φ nicht abzählbar kategorisch ist.
2. Finden Sie eine Erweiterung von Φ, die abzählbar kategorisch ist.

Aufgabe 3 (Erweiterung um eine Konstante; 2 Punkte)

Sei $S^{<}_{\mathrm{Ar}} = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ die Sprache der geordneten Körper. Wir betrachten den archimedischen Körper $\mathfrak{Q} = \left(\mathbb{Q}, +^{\mathbb{Q}}, \cdot^{\mathbb{Q}}, <^{\mathbb{Q}}, 0^{\mathbb{Q}}, 1^{\mathbb{Q}}\right)$ der rationalen Zahlen und die Theorie

$$\Phi := \mathrm{Th}\,(\mathfrak{Q}) \cup \{t_n < c \mid n \in \mathbb{N}\},$$

wobei t_n sei der Term $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ und c ein neues Konstantensymbol.

Ist es möglich ein Modell $\mathfrak{A} = \left(A, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}\right)$ von Φ zu finden, so dass die Redukte $\left(A, <^{\mathfrak{A}}\right) \cong \left(\mathbb{Q}, <^{\mathbb{Q}}\right)$ isomorph als lineare Ordnungen sind?

Aufgabe 4 (Diskrete lineare Ordnungen; 4 Punkte)

Wir betrachten die Sprache $S_{\mathrm{Ord}} := \{<\}$ der Ordnungstheorie. Die folgende Theorie nennen wir die Theorie der diskreten linearen Ordnungen und bezeichnen sie mit Φ_{dislO}:

$$\begin{aligned}
&\forall x \ (\neg x < x)\,,\\
&\forall x \forall y \forall z \ ((x < y \wedge y < z) \rightarrow y < z)\,,\\
&\forall x \forall y \ (x = y \vee x < y \vee y < x)\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall x \ (\exists y \ x < y \rightarrow (\exists y \ x < y \wedge \forall z \ (x < z \rightarrow (y < z \vee y = z))))\,,\\
&\forall x \ (\exists y \ y < x \rightarrow (\exists y \ y < x \wedge \forall z \ (z < x \rightarrow (z < y \vee y = z))))\,.
\end{aligned}$$

Fügt man zu Φ_{dislO} die zwei folgende Axiome, so nennen wir die entstehende Menge von Sätzen die Theorie der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte und bezeichnen sie mit Φ_{dislOoE}:

$$\begin{aligned}
&\forall x \ (\exists y \ x < y)\,,\\
&\forall x \ (\exists y \ y < x)\,.
\end{aligned}$$

Finden Sie unendlich viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle der Theorie Φ_{dislOoE}. Können Sie überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle der Theorie Φ_{dislOoE} viele finden?

(Wenn Sie nur endlich viele verschiedene Modelle (mindestens zwei) finden, gibt es die Hälfte der Punkte. Es gibt sogar überabzahlbar viele paarweise nicht-isomorpher Modelle: zwei Extrapunkte für einen Beweis dieser Tatsache.)