Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 10

Abgabe am 16. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Δ-Elementarität der unendlichen Strukturen; 3 Punkte)

Sei $\mathfrak{K}$ eine Δ-elementare Klasse von Strukturen. Man zeige, dass die Klasse $\mathfrak{K}^\infty$ der Strukturen in $\mathfrak{K}$ mit unendlichem Träger auch Δ-elementar ist.

Lösung:
Eine Klasse $\mathfrak{K}$ heißt Δ-elementar, falls es eine Menge von S-Sätzen gibt mit $\mathrm{Mod}^S\Phi = \mathfrak{K}$.
Sei $\mathfrak{K}$ eine Δ-elementare Klasse von Strukturen. Nach Definition nehmen wir also eine Menge von S-Sätzen Φ mit $\mathrm{Mod}^S\Phi = \mathfrak{K}$. Betrachte jetzt die folgenden Formeln für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$:

$$\phi_n \text{ sei die Formel } \exists v_0 \exists v_1 \ldots \exists v_n \bigwedge_{\substack{i,j<n+1 \\ i\neq j}} \neg v_i = v_j.$$

Definiere $\Phi^\infty := \Phi \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. Dann sind die Modelle von Φ^∞ genau die Modelle von Φ, die unendlichen Träger haben. Also $\mathrm{Mod}^S(\Phi^\infty) = \mathfrak{K}^\infty$ und damit ist $\mathfrak{K}^\infty$ auch Δ-elementar.

Aufgabe 2 (Komplementklasse; 6 Punkte)

Es seien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ Klassen von S-Strukturen mit $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$. Weiter sei $\mathfrak{K}_2$ die Klasse der S-Strukturen, die zu $\mathfrak{K}$, aber nicht zu $\mathfrak{K}_1$ gehören: $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K}\setminus\mathfrak{K}_1$. Weiterhin seien $\mathfrak{K}$ elementar und $\mathfrak{K}_1$ sei Δ-elementar. Man zeige, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

1. $\mathfrak{K}_1$ ist elementar.
2. $\mathfrak{K}_2$ ist Δ-elementar.
3. $\mathfrak{K}_2$ ist elementar.

Lösung:
"(1) $\Longrightarrow$ (2)"
Angenommen $\mathfrak{K}_1$ ist elementar. Nach Definition sei also ϕ_1 ein S-Satz mit $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}^S\phi_1$. Da $\mathfrak{K}$ auch elementar ist so sei ϕ ein S-Satz mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\phi$. Dann gilt $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}^S\{\phi, \neg\phi_1\}$, denn für eine S-Struktur $\mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A} \models \{\phi, \neg\phi_1\} & \text{gdw.} & \mathcal{A} \models \phi \text{ und } \mathcal{A} \models \neg\phi_1 \\ & \text{gdw.} & \mathcal{A} \models \phi \text{ und } \mathcal{A} \not\models \phi_1 \\ & \text{gdw.} & \mathcal{A} \in \mathrm{Mod}^S\phi \text{ und } \mathcal{A} \notin \mathrm{Mod}^S\phi_1 \\ & \text{gdw.} & \mathcal{A} \in \mathfrak{K} \text{ und } \mathcal{A} \notin \mathfrak{K}_1 \\ & \text{gdw.} & \mathcal{A} \in \mathfrak{K}\setminus\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2 \end{array}$$

Dies zeigt, dass $\mathfrak{K}_2$ somit Δ-elementar ist.

"(2) $\Longrightarrow$ (3)"

Angenommen $\mathfrak{K}_2$ ist Δ-elementar. Sei also Φ_2 eine Menge von S-Sätzen mit $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}^S \Phi_2$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{K}_1$ Δ-elementar, sei also Φ_1 eine Menge von S-Sätzen mit $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}^S \Phi_1$. Genauso nach Voraussetzung sei ϕ_0 ein S-Satz mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S \phi_0$ da $\mathfrak{K}$ elementar ist. Nun gilt $\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2 = \varnothing$, d.h. es gibt keine S-Struktur, die $\Phi_1 \cup \Phi_2$ erfüllt, d.h. $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ist nicht erfüllbar. Nach dem Endlichkeitssatz gibt es eine endliche Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi_1 \cup \Phi_2$, die nicht erfüllbar ist. Da Φ_1, Φ_2 beide erfüllbar sind und Φ' nicht, so ist $\Phi' \cap \Phi_1 \neq \varnothing \neq \Phi' \cap \Phi_2$. Sei ψ die Formel

$$\left(\bigvee_{\phi \in \Phi' \cap \Phi_1} \neg\phi \right) \wedge \phi_0.$$

Behauptung: $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}^S \psi$ und damit $\mathfrak{K}_2$ elementar.

"$\mathfrak{K}_2 \subseteq \mathrm{Mod}^S \psi$"

Sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_2$. Dann wegen $\mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{K}$ ist $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ und somit $\mathcal{A} \models \phi_0$. Weiter muss es ein $\phi \in \Phi' \cap \Phi_1$ geben mit $\mathcal{A} \models \neg\phi$. Sonst wäre$\mathcal{A} \models \phi$ für alle $\phi \in \Phi' \cap \Phi_1$ und da $\mathcal{A} \models \phi$ für alle $\phi \in \Phi' \cap \Phi_2$ sowieso (wegen $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}_2$) würde folgen $\mathcal{A} \models \Phi'$ aber Φ' nicht erfüllbar. Also $\mathcal{A} \models \psi$.

"$\mathfrak{K}_2 \supseteq \mathrm{Mod}^S \psi$"

Sei $\mathcal{A}$ eine S-Struktur mit $\mathcal{A} \models \psi$. Dann $\mathcal{A} \models \phi_0$, d.h. $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}^S \phi = \mathfrak{K}$. Weiter gibt es ein $\phi \in \Phi' \cap \Phi_1 \neq \varnothing$ mit $\mathcal{A} \models \neg\phi$ bzw. $\mathcal{A} \not\models \phi$, insbesondere $\mathcal{A} \not\models \Phi_1$, also $\mathcal{A} \notin \mathfrak{K}_1$. Insgesamt also $\mathcal{A} \notin \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$.

"(3) $\Longrightarrow$ (1)"

Angenommen $\mathfrak{K}_2$ ist elementar. So sei ϕ_2 ein S-Satz mit $\mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}^S \phi_2$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{K}$ elementar ist, so sei ϕ ein S-Satz mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S \phi$. Dann ist $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K} \setminus \mathfrak{K}_2 = \mathrm{Mod}^S (\phi \wedge \neg\phi_2)$ und damit elementar. Hier benutzen wir, dass $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$.

Aufgabe 3 (Unabhängigkeit von Axiomensystemen; 2 Punkte)

Eine Menge Φ von S-Sätzen heißt *unabhängig*, wenn kein $\phi \in \Phi$ aus $\Phi \setminus \{\phi\}$ (semantisch) folgt. Man zeige, daß jede endliche Menge Φ von S-Sätzen eine unabhängige Teilmenge Φ_0 hat, so daß $\mathrm{Mod}^S \Phi = \mathrm{Mod}^S \Phi_0$.

Lösung:

Sei Φ eine endliche Menge von S-Sätzen. Wir definieren induktiv die Mengen Γ_n, $n \in \mathbb{N}$ wiefolgt

$$\Gamma_0 := \Phi,$$
$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n & \text{falls } \Gamma_n \text{ unabhängig ist,} \\ \Gamma_n \setminus \{\phi\} & \text{falls ein } \phi \in \Gamma_n \text{ existiert mit } \Gamma_n \setminus \{\phi\} \models \phi. \end{cases}$$

Es gilt $|\Gamma_{n+1}| \leqslant |\Gamma_n|$ für alle n und da $\Gamma_0 = \Phi$ endlich ist, so existiert ein n_0 mit $\Gamma_{n_0+1} = \Gamma_{n_0}$. Sei n_0 minimal mit der Eigenschaft. Definiere $\Phi_0 := \Gamma_{n_0}$, dann ist Φ_0 unabhängig nach dem Verfahren. Außerdem gilt $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und damit $\mathrm{Mod}^S \Phi \subseteq \mathrm{Mod}^S \Phi_0$.

Wir begründen die umgekehrte Inklusion. Es gilt: für jedes $\phi \in \Phi$ ist $\Gamma_n \models \phi$ für alle n. Wir zeigen dies durch Induktion über n. Ist $n = 0$ und $\phi \in \Phi$, so ist $\Gamma_0 = \Phi \models \phi$ trivialerweise. Angenommen für alle $m \leqslant n$ und alle $\phi \in \Phi$ gilt $\Gamma_m \models \phi$. Sei $\phi \in \Phi$. Dann gibt es zwei Fälle. Falls $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ so $\Gamma_{n+1} \models \phi$. Im zweiten Fall ist $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \setminus \{\phi_n\}$ für ein $\phi_n \in \Gamma_n$ mit $\Gamma_n \setminus \{\phi_n\} \models \phi_n$. Dann ist $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \setminus \{\phi_n\} \models \phi$, denn jedes Modell $\mathcal{A}$ von $\Gamma_n \setminus \{\phi_n\}$ ist auch Modell von ϕ_n, damit auch von ganz Γ_n, nach Induktionsvoraussetzung ist $\Gamma_n \models \phi$, also $\mathcal{A} \models \phi$. Dies zeigt $\Gamma_{n+1} \models \phi$.

Somit ist $\Phi_0 = \Gamma_{n_0}$ eine unabhängige Teilmenge von Φ und für alle $\phi \in \Phi$ folgt $\Phi_0 \models \phi$. Ist also $\mathcal{A}$ ein Modell von Φ_0, so ist A Modell von ganz Φ.

Aufgabe 4 (Universelle Axiomatisierung; 3 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge. Falls $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$, so nennen wir Φ ein *Axiomensystem für* $\mathfrak{K}$. Wir sagen, $\mathfrak{K}$ sei *universell axiomatisierbar*, falls ein Axiomensystem existiert, welches aus universellen Sätzen besteht. Wir nennen eine Klasse $\mathfrak{K}$ *abgeschlossen unter Unterstrukturen*, falls gilt:

wenn $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ und wenn $\mathcal{B}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$ ist, dann ist $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$.

Zeigen Sie: Jede universell axiomatisierbare Klasse ist abgeschlossen unter Unterstrukturen.

Lösung:

Sei $\mathfrak{K}$ eine universell axiomatisierbare Klasse. Sei also Φ eine Menge von universellen S-Sätzen mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{K}$ unter Unterstrukturen abgeschlossen ist, sei $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ und $\mathcal{B}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ ist $\mathcal{A} \models \phi$ für alle $\phi \in \Phi$. Da jedes $\phi \in \Phi$ universell und $\mathcal{B}$ eine Substruktur von $\mathcal{A}$ ist, so folgt mit dem Substrukturlemma: $\mathcal{B} \models \phi$ für alle $\phi \in \Phi$, d.h. $\mathcal{B} \models \Phi$, d.h. $\mathcal{B} \in \mathrm{Mod}^S\Phi = \mathfrak{K}$. Somit ist die Klasse $\mathfrak{K}$ abgeschlossen unter Substrukturen.

Aufgabe 5 (Körper mit Primzahlcharakteristik; 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse der Körper mit Primzahlcharakteristik nicht Δ-elementar ist.

Lösung:

Wir betrachten $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Körper und $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$ die Klasse der Körper der Charakteristik 0. Da jeder Körper die Charakteristik gleich 0 oder gleich einer Primzahl hat, ist $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{K} \backslash \mathfrak{K}_1$ die Klasse aller Körper mit Primzahlcharakteristik. Es ist die Klasse der Körper $\mathfrak{K}$ elementar, denn man hat nur endlich viele Körperaxiome und deren Konjunktion ϕ_K zeigt $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\ \phi_K$. Die Klasse $\mathfrak{K}_1$ der Körper der Charakterstik 0 ist Δ elementar, denn es gilt

$$\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}^S \{\phi_K\} \cup \{\neg\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

mitχ_n der Formel

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}} = 0.$$

Nach Aufgabe 2 gilt

$$\mathfrak{K}_2 \text{ ist } \Delta\text{-elementar gdw. } \mathfrak{K}_1 \text{ ist elementar.}$$

Wäre also $\mathfrak{K}_2$ Δ-elementar, so wäre die Klasse $\mathfrak{K}_1$ der Körper der Charakterstik 0 elementar, etwa $\mathfrak{K}_1 = \mathrm{Mod}^S\phi_0$ für ein S-Satz ϕ_0. Dann wäre insbesondere $\{\phi_K\} \cup \{\neg\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \models \phi_0$ und nach dem Endlichkeitssatz gibt es ein n_0 mit $\{\phi_K\} \cup \{\neg\chi_n \mid n < n_0\} \models \phi_0$. Dann würde aber jeder Körper der Charakteristik $p > n_0$ den Satz ϕ_0 erfüllen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass ϕ_0 genau die Körper der Charakteristik 0 modelliert.