Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 9

Abgabe am 9. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Kompaktheit im Raum der Modelle; 4 Punkte)

Wir erinnern uns an die Begriffe aus Topologie.

Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, τ), bestehend aus einer Menge X und $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}&\varnothing, X \in \tau\\ &U \subseteq \tau \implies \bigcup U \in \tau\\ &U \subseteq \tau \text{ endlich } \implies \bigcap U \in \tau\end{aligned}$$

Eine Basis einer Topologie ist eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \tau$, so dass jedes $U \in \tau$, sich darstellen lässt als $\bigcup \mathcal{B}'$ für ein $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$. Eine Mengenfamilie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert Basis einer Topologie, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

$$\forall x \in X \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B,$$

$$\forall B_1, B_1 \in \mathcal{B} \; \forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Eine offene Überdeckung von X ist eine Familie $U \subseteq \tau$ mit $X = \bigcup U$.

Sei S eine Symbolmenge. Zu jeder erfüllbaren Menge Φ von S-Sätzen sei $\mathfrak{A}_\Phi$ eine S-Struktur mit $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$. Ferner sei $\Sigma := \left\{\mathfrak{A}_\Phi \mid \Phi \subseteq L_0^S, \text{Erf } \Phi\right\}$. Für jeden S-Satz ϕ setze man $X_\phi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \mid \mathfrak{A} \models \phi\}$.

1. Man zeige, dass das System $\left\{X_\phi \mid \phi \in L_0^S\right\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet. Wir bezeichnen diese Topologie mit τ.
2. Man zeige, dass jede Menge X_ϕ abgeschlossen bzgl. τ ist.
3. Man zeige mit dem Endlichkeitssatz, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält. Diese Eigenschaft des topologischen Raumes Σ wird auch als Kompaktheit bezeichnet.

Lösung:

1. Ein Mengensystem $\mathcal{B}$ ist bildet eine Basis einer Topologie des Raumes Σ, wenn die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt sind:

   $$\forall A \in \Sigma \; \exists B \in \mathcal{B} \; A \in B,$$

   $$\forall B_1, B_1 \in \mathcal{B} \; \forall x \in B_1 \cap B_2 \; \exists B \in \mathcal{B} \; x \in B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

   Wir prüfen also die Eigenschaften für das System $\mathcal{B} := \left\{X_\phi \mid \phi \in L_0^S\right\}$.

   Sei $\mathfrak{A}_\Phi \in \Sigma$, also $\Phi \subseteq L_0^S$, Erf Φ. Sei ϕ die Formel $\forall v_0 \; v_0 = v_0$. Dann ist $\mathfrak{A}_\Phi \models \phi$, d.h. $\mathfrak{A}_\Phi \in X_\phi$. Die erste Eigenschaft ist somit erfüllt.

   Seien jetzt ϕ_1, ϕ_2 S-Sätze und sei $\Phi \subseteq L_0^S$, Erf Φ mit $\mathfrak{A}_\Phi \in X_{\phi_1} \cap X_{\phi_2}$. Sei ψ der Satz $\phi_1 \wedge \phi_2$, dann ist offensichtlich $X_\psi = X_{\phi_1} \cap X_{\phi_2}$ und $\mathfrak{A}_\Phi \in X_\psi$. Die zweite Eigenschaft ist also auch erfüllt.

   Somit ist gezeigt, dass das System $\left\{X_\phi \mid \phi \in L_0^S\right\}$ die Basis einer Topologie auf Σ bildet.

2. Sei $\phi \in L_0^S$. Dann gilt $X_\phi = \Sigma \backslash X_{\neg\phi}$, denn nach Definition von X_ϕ ist für alle $\mathfrak{A}_\Phi \in \Sigma$

$$\mathfrak{A}_\Phi \in X_\phi \iff \mathfrak{A}_\Phi \models \phi \iff \mathfrak{A}_\Phi \not\models \neg\phi \iff \mathfrak{A}_\Phi \notin X_{\neg\phi}.$$

Somit ist X_ϕ als Komplement einer offenen Menge $X_{\neg\phi}$ abgeschlossen.

3. Angenommen I ist eine Menge und die Mengen $U_i, i \in I$ sind offen mit

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Da $\{X_\phi \mid \phi \in L_0^S\}$ die Basis der Topologie τ bilden, so kann man jedes U_i darstellen als

$$U_i = \bigcup_{j \in J_i} X_{\phi_{i,j}}$$

mit Mengen J_i und $\phi_{i,j} \in L_0^S$. Somit ist

$$\Sigma = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} X_{\phi_{i,j}}$$

eine Überdeckung von Σ duch offene Basismengen. Angenommen es gibt keine endliche Teilüberdeckung von Σ, d.h. es gibt keine endlich viele Paare $(i_0, j_0), \ldots, (i_m, j_m)$ mit

$$\Sigma \neq X_{\phi_{i_0,j_0}} \cup \ldots \cup X_{\phi_{i_m,j_m}}.$$

Also für alle endlich viele von solchen Paaren finden wir $\mathfrak{A}_\Phi \in \Sigma$ mit $\mathfrak{A}_\Phi \notin X_{\phi_{i_0,j_0}} \cup \ldots \cup X_{\phi_{i_m,j_m}}$. Jetzt betrachte die Menge $\overline{\Phi} := \{\neg\phi_{i,j} \mid i \in I, j \in J_i\}$.

Behauptung: $\overline{\Phi}$ ist erfüllbar.

Nach dem Endlichkeitssatz reicht es aus zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $\overline{\Phi}$ erfüllbar ist. Seien also $(i_0, j_0), \ldots, (i_m, j_m)$ endliche viele Paare von Indizes, wir zeigen, dass $\{\neg\phi_{i_0,j_0}, \neg\phi_{i_1,j_1}, \ldots, \neg\phi_{i_m,j_m}\}$ efüllbar ist. Nach der obigen Überlegung können wir ein $\mathfrak{A}_\Phi \in \Sigma$ mit $\mathfrak{A}_\Phi \notin X_{\phi_{i_0,j_0}} \cup \ldots \cup X_{\phi_{i_m,j_m}}$ finden. Dies bedeutet aber gerade, dass $\mathfrak{A}_\Phi \not\models \phi_{i_0,j_0}, \ldots, \mathfrak{A}_\Phi \not\models \phi_{i_m,j_m}$, d.h. $\mathfrak{A}_\Phi \models \neg\phi_{i_0,j_0}, \ldots, \mathfrak{A}_\Phi \models \neg\phi_{i_m,j_m}$. Also ist $\overline{\Phi}$ ist erfüllbar.

Da $\overline{\Phi}$ ist erfüllbar ist, können wir den Punkt $\mathfrak{A}_{\overline{\Phi}} \in \Sigma$ betrachten. Es ist $\mathfrak{A}_{\overline{\Phi}} \models \overline{\Phi}$, d.h. $\mathfrak{A}_{\overline{\Phi}} \models \neg\phi_{i,j}$ für alle $i \in I, j \in J_i$, d.h. $\mathfrak{A}_{\overline{\Phi}} \in X_{\neg\phi_{i,j}}$, d.h. $\mathfrak{A}_{\overline{\Phi}} \notin X_{\phi_{i,j}}$ für alle $i \in I, j \in J$. Nun das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $X_{\phi_{i,j}}$ eine Überdeckung von Σ bilden.

Somit muss es eine endliche Überdeckung von Σ von der Form $\Sigma = X_{\phi_{i_1,j_1}} \cup \ldots \cup X_{\phi_{i_n,jn}}$ geben und dann ist $\Sigma = U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$ eine Überdeckung von Σ duch offene Mengen U_i (wegen $X_{\phi_{i_l,j_l}} \subseteq U_{i_l}$).

Aufgabe 2 (Eine Anwendung des Zorn'schen Lemmas; 4 Punkte)

Sei X eine Menge und $\leqslant_0$ und $\leqslant_1$ binäre Relationen auf X. Wir sagen, dass $\leqslant_1$ eine *Erweiterung* von $\leqslant_0$ ist, falls gilt: für alle $x, y \in X$, falls $x \leqslant_0 y$, so auch $x \leqslant_1 y$. (Wenn man die binären Relationen mengentheoretisch auffasst, ist dies äquivalent zu $\leqslant_0 \subseteq \leqslant_1$.)

Verwenden Sie das Zorn'sche Lemma um die folgende Aussage zu zeigen: Jede partielle Ordnung auf X hat eine Erweiterung, die eine lineare Ordnung ist.

Lösung:
Sei X eine Menge und $\leqslant$ eine partielle Ordnung auf X. Wir betrachten die partielle Ordnung

$$\mathcal{P} := \{R \subseteq X \times X \mid R \text{ ist eine partielle Ordnung auf } X \text{ und eine Erweiterung von } \leqslant\}$$

mit $\subseteq$ als Ordnung. Es ist $\leqslant \in \mathcal{P}$, also $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Wir zeigen, dass jede Kette in $(\mathcal{P}, \subseteq)$ eine obere Schranke besitzt. Sei also $K \subseteq \mathcal{P}$ eine Kette, dann ist $\bigcup K$ eine partielle Ordnung auf X. Außerdem, wegen $K \subseteq \mathcal{P}$ ist jedes $R \in K$ eine Erweiterung von $\leqslant$, d.h. $\leqslant \subseteq R$. Daraus folgt, dass $\leqslant \subseteq \bigcup K$, also ist $\bigcup K$ auch eine Erweiterung von $\leqslant$. Somit ist $\bigcup K$ eine obere Schranke von K. Nach dem Zorn'schen Lemma folgt, dass $(\mathcal{P}, \subseteq)$ ein maximales Element besitzt, nennen wir es $\leqslant_L \in \mathcal{P}$.

Wir zeigen, dass $\leqslant_L$ eine lineare Ordnung ist. Angenommen nicht, dann gibt es $x, y \in X$ mit $x \nleqslant_L y$ und $y \nleqslant_L x$. Wir erweitern $\leqslant_L$ zu $\leqslant_{L'}$ wie folgt.

$$\leqslant_{L'} := \leqslant_L \cup \{(x,y)\} \cup \{(x,z) \mid x \leqslant_L y\} \cup \{(z,y) \mid z \leqslant_L x\} \cup \{(w,z) \mid w \leqslant_L x \text{ und } y \leqslant_L z\}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass $\leqslant_{L'}$ eine partielle Ordnung ist und $\leqslant_L$ echt erweitert. Widerspruch zu $\leqslant_L$ maximal.

Aufgabe 3 ((Kardinal-)kategorizität; 4 Punkte)

Wir erinnern uns daran, dass eine Menge T von Sätzen *kategorisch* heißt, falls je zwei Modelle von T isomorph sind. Wir nennen eine Menge T von Sätzen *kardinalkategorisch*, falls je zwei Modelle von T der gleichen Kardinalität isomorph sind.

1. Zeigen Sie: Falls T ein unendliches Modell hat, dann ist T nicht kategorisch.

2. Zeigen Sie, dass es eine widerspruchsfreie kardinalkategorische Menge von Sätzen gibt, die unendliche Modelle hat. Diese Menge ist somit nach (1) nicht kategorisch.

Lösung:

1. Sei $\mathcal{A} \models T$ ein unendliches Modell von T. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem gibt es ein Modell $\mathcal{B}$ von T mit der Kardinalität mindestens $\mathcal{P}(A)$. Aus Kardinalitätsgründen kann es keine Bijektion zwischen A und B geben, also sind die Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nicht isomorph. Somit ist T nicht kategorisch.

2. Betrachte die Symbolmenge $S = \varnothing$. Sei T die Menge von Sätzen, die in allen S-Strukturen wahr sind, die Menge der sogenannten Tautologien. Also sei

$$T := \left\{\phi \in L_0^S \mid \text{für jede } S\text{-Struktur } \mathcal{A} \text{ gilt } \mathcal{A} \models \phi\right\}.$$

Offensichtlich ist die Menge T widerspruchsfrei und hat unendliche Modelle. Zwei Modelle davon sind isomorph gdw. sie die gleiche Kardinalität haben, denn $S = \varnothing$. Somit ist T kardinalkategorisch aber nicht kategorisch.