Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 8

Abgabe am 4. Juni 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Die Bedeutung von "Unterfall 1"; 2 Punkte)

In der Vorlesung hatten wir im Beweis des Vollständigkeitssatzes zunächst *Unterfall 1* betrachtet: Formelmengen Φ in denen nur endliche viele Variablen frei vorkommen. Wir hatten bewiesen, dass für widerspruchsfreie solche Formelmengen Φ eine widerspruchsfreie Obermenge Φ' existiert, die Beispiele enthält.

Sei S beliebig und $\Phi = \{v_0 = t\ ;\ t \in T^S\} \cup \{\exists v_0 \exists v_1\ \neg v_0 = v_1\}$. Zeigen Sie, dass Wf Φ und dass es in L^S keine widerspruchsfreie Obermenge von Φ gibt, die Beispiele enthält. Folgern Sie daraus, dass das o.g. Lemma aus der Vorlesung nicht ohne die Voraussetzung über die Endlichkeit der Menge der frei vorkommenden Variablen bewiesen werden kann.

Aufgabe 2 (Termmodelle in der Gruppentheorie; 9 Punkte)

Im folgenden sei $S_{\mathrm{GrmI}} = \{\circ, ^{-1}, e\}$ die Symbolmenge der Sprache der Gruppen mit der Inversenoperation. Es sei Z eine beliebige Menge, die keine Elemente von $\mathcal{A}_{S_{\mathrm{GrmI}}}$ enthält. Für jedes $z \in Z$ nehmen wir ein neues Konstantensymbol c_z und setzen $S_Z := S_{\mathrm{GrmI}} \cup \{c_z \mid z \in Z\}$. Mit Φ_{Gr} bezeichnen wir die drei Axiome der Gruppentheorie:

$$\forall v_0\ (v_0 \circ e = v_0 \wedge e \circ v_0 = v_0)\,,$$

$$\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ (v_0 \circ v_1) \circ v_2 = v_0 \circ (v_1 \circ v_2)\,,$$

$$\forall v_0\ v_0 \circ (v_0)^{-1} = e.$$

Wir bezeichnen die abzählbare Menge von Variablen mit $V := \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Wir betrachten das Termmodell $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{Gr}}}$ in der Sprache mit Symbolmenge S_Z. Für einen S_Z-Term t bezeichnen wir seine Äquivalenzklasse im Termmodell mit $\overline{t}$.

1. Zeigen Sie, dass für jede Wahl von Z die Struktur $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{Gr}}}$ eine Gruppe ist (3 Punkte)
2. Zeigen Sie, dass für jede Gruppe $\mathfrak{G} = (G, \times, ^{-1}, 1)$ und jede Abbildung $g : V \cup Z \to G$ ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $f : \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{Gr}}} \to G$ existiert, so dass $g(v_i) = f(\overline{v}_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $g(z) = f(\overline{c_z})$ für alle $z \in Z$ (2 Punkte).
3. Angenommen Z ist höchstens abzählbar. Zeigen Sie,d ass $\mathfrak{T}_{\varnothing}^{\Phi_{\mathrm{Gr}}} \cong \mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{Gr}}}$ (2 Punkte).
4. Beweisen Sie oder widerlegen Sie: Es gibt Z und Z', so dass $\mathfrak{T}_Z^{\Phi_{\mathrm{Gr}}} \not\cong \mathfrak{T}_{Z'}^{\Phi_{\mathrm{Gr}}}$ (2 Punkte).

Aufgabe 3 (Kategorizität; 2 Punkte)

Sei S eine Symbolmenge. Wir nennen eine Menge Φ von S-Sätzen *kategorisch*, falls für je zwei S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt: falls $\mathfrak{A} \models \Phi$ und $\mathfrak{B} \models \Phi$, so gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Zeigen Sie: jede kategorische Menge von Sätzen ist negationstreu bzgl. der Sätze, d.h. für alle S-Sätze ϕ gilt $\Phi \vdash \phi$ oder $\Phi \vdash \neg\phi$.

Aufgabe 4 (Erzeugen negationstreuer Ausdrucksmengen; 3 Punkte)

Sei eine höchstens abzählbare Symbolmenge S gegeben und sei $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Aufzählung aller S-Formeln. Sei Φ eine widerspruchsfreie Menge von S-Formeln. In der Vorlesung haben wir definiert:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &:= \Phi, \\
\Psi_{n+1} &:= \begin{cases} \Psi_n \cup \{\psi_n\} & \text{falls } \Psi_n \cup \{\psi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist,} \\ \Psi_n \cup \{\neg\psi_n\} & \text{sonst,} \end{cases} \\
\Phi' &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n.
\end{aligned}$$

Wir hatten bewiesen, dass für alle n die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist und dass Φ' widerspruchsfrei und negationstreu ist. Wir hatten ausserdem betont, dass die Definition der Ψ_n von der Auflistung $\{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abhängt.

Wir setzen nun $S := S_{\mathrm{Gr}} = \{\circ, e\}$ und $\Phi := \Phi_{\mathrm{Gr}}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\phi_0 &:= \forall v_0 \; v_0 = v_0, \\
\phi_1 &:= \forall v_1 \forall v_1 \; v_0 \circ v_1 = v_1 \circ v_0, \\
\phi_2 &:= \forall v_1 \forall v_1 \forall v_2 \; \left(v_0 = v_1 \vee (v_0 = v_2 \vee v_1 = v_2)\right), \\
\phi_3 &:= \neg\phi_1.
\end{aligned}$$

1. Nehmen Sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$, $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_2$ und $\psi_3 = \phi_3$. Bestimmen Sie die Modelle von Ψ_4.

2. Nehmen sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$ und $\psi_2 = \phi_2$. Finden Sie geeignete Formeln für ψ_1 und ψ_4, so dass Ψ_4 unendliche Modelle hat.

3. Nehmen Sie an, dass $\psi_0 = \phi_0$, $\psi_1 = \phi_1$, und $\psi_2 = \phi_2$. Finden Sie eine geeignete Formel für ψ_3, so dass Ψ_4 kategorisch ist (s. Aufgabe 3).