Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 7

Abgabe am 19. Mai 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Ableitbarkeit; 6 Punkte) Man zeige, dass die folgenden Regeln ableitbar sind:

(a1) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x}}$, (a2) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi}$,

(b1) $\dfrac{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}$, (b2) $\dfrac{\Gamma \quad \phi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\phi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\forall x\phi$,

(b3) $\dfrac{\Gamma \quad \phi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}$, (b4) $\dfrac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad \forall x\phi}$, falls x nicht frei in Γ.

Lösung:
(a1)

$$\frac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x}}.$$

Wir leiten die vorgegebene Regel aus der $(\exists S)$ mittels der Kontraposition her. Formale Ableitung:

1. $\Gamma \ \forall x\phi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \ (\neg\phi)\frac{t}{x} \ (\neg\phi)\frac{t}{x}$ (Voraussetzungsregel)
3. $\Gamma \ (\neg\phi)\frac{t}{x} \ \exists x\neg\phi$ $(\exists S)$
4. $\Gamma \ \neg\exists x\neg\phi \ (\neg\neg\phi)\frac{t}{x}$ (Kontraposition)
5. $\Gamma \ \neg\exists x\neg\phi \ \phi\frac{t}{x}$ (Übungsblatt 6, Aufgabe 3 (a2))
6. $\Gamma \ \forall x\phi \ \phi\frac{t}{x}$ (Def. von $\forall$)
7. $\Gamma \ \phi\frac{t}{x}$ (Kettenschlussregel auf (1) und (7))

(a2) Einsetzen von $t = x$ in (a1) liefert die Regel

$$\frac{\Gamma \quad \forall x\phi}{\Gamma \quad \phi}.$$

(b1)

$$\frac{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}$$

1. $\Gamma \ \phi\frac{t}{x} \ \psi$ (Prämisse)
2. $\Gamma \ \neg\psi \ \neg\phi\frac{t}{x}$ (Kontraposition)
3. $\Gamma \ \neg\psi \ \exists x\neg\phi$ $(\exists S)$

4. $\Gamma\ \neg\exists x\neg\phi\ \neg\neg\psi$ (Kontraposition)

5. $\Gamma\ \neg\exists x\neg\phi\ \psi$ (Übungsblatt 6, Aufgabe 3 (a2))

6. $\Gamma\ \forall x\phi\ \psi$ (Def. von $\forall$)

(b2)
Wir leiten zuerst eine Hilfsregel ab.

$$\frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad \neg\neg\phi}.$$

1. $\Gamma\ \phi$ (Prämisse)

2. $\Gamma\ \phi\ \phi$ (Anzedenzregel auf (1))

3. $\Gamma\ \neg\phi\ \neg\phi$ (Kontraposition)

4. $\Gamma\ \neg\neg\phi\ \neg\neg\phi$ (Kontraposition)

5. $\Gamma\ \neg\phi\ \phi$ (Anzedenzregel auf (1))

6. $\Gamma\ \neg\phi\ \neg\neg\phi$ (Kontraposition)

7. $\Gamma\ \neg\neg\neg\phi\ \neg\neg\phi$ (Kontraposition)

8. $\Gamma\ \neg\neg\phi$ (Fallunterscheidungsregel auf (4) und (7))

Nun leiten wir die verlangte Regel ab.

$$\frac{\Gamma \quad \phi\frac{y}{x}}{\Gamma \quad \forall x\phi}\text{ , falls } y \text{ nicht frei in } \Gamma\forall x\phi.$$

1. $\Gamma\ \phi\frac{y}{x}$ (Prämisse)

2. $\Gamma\ \exists x\phi$ ($\exists S$)

3. $\Gamma\ \neg\neg\exists x\phi$ (unsere Hilfregel)

4. $\Gamma\ \exists x\phi\ \phi\frac{y}{x}$ (Anzedenzregel auf (1))

5. $\Gamma\ \neg\phi\frac{y}{x}\ \neg\exists x\phi$ (Kontraposition)

6. $\Gamma\ \exists x\neg\phi\ \neg\exists x\phi$ ($\exists A$, y nicht frei in $\Gamma\exists x\neg\phi\ \neg\exists x\phi$)

7. $\Gamma\ \neg\neg\exists x\phi\ \neg\exists x\neg\phi$ (Kontraposition)

8. $\Gamma\ \neg\neg\exists x\phi\ \forall x\phi$ (Def. von $\forall$)

9. $\Gamma\ \forall x\phi$ (Kettenschlussregel auf (3) und (8))

(b3) Einsetzen von $t = x$ in (b1) liefert

$$\frac{\Gamma \quad \phi \quad \psi}{\Gamma \quad \forall x\phi \quad \psi}.$$

(b4) Einsetzen von $y = x$ in (b2) liefert

$$\frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma \quad \forall x\phi}\text{, falls } x \text{ nicht frei in } \Gamma.$$

Aufgabe 2 (($\exists\forall$)-Regel; 4 Punkte) Sei ($\exists\forall$) die Regel

$$\frac{}{\Gamma \quad \exists x\phi \quad \forall x\phi}.$$

1. Man prüfe, ob ($\exists\forall$) eine ableitbare Regel ist.
2. $\mathfrak{S}'$ entstehe aus dem Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ durch Hinzunahme der Regel ($\exists\forall$). Ist jede Sequenz in $\mathfrak{S}'$ ableitbar?

Lösung:

1. Jede ableitbare Regel ist korrekt, da unser Sequenzenkalkül korrekt ist. Wir zeigen, dass die Regel ($\exists\forall$) nicht korrekt ist, somit auch nicht ableitbar. Dazu betrachte

   $$\phi \text{ sei die Formel } x = y \vee x = z$$

   und $\Gamma = \emptyset$. Wir zeigen, dass $\exists x\phi \not\models \forall x\phi$. Dazu sei $\mathfrak{J} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathcal{A} = (\{0,1,2\}, \ldots)$, wobei Funktions-, Relations- und Konstanten-symbole beliebig interpretiert seien, und β mit $\beta(y) = 0, \beta(z) = 1$. Dann ist offensichtlich

   $$\mathfrak{J} \models \exists x\phi \text{ aber } \mathfrak{J} \not\models \forall x\phi.$$

2. Die ($\exists\forall$)-Regel ist eine Regel, die *bzgl. der einelementigen Strukturen korrekt* ist, d.h. für alle S-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit einer einelementigen Grundmenge gilt: Falls $\mathfrak{A} \models \Gamma\ \exists x\phi$ so auch $\mathfrak{A} \models \forall x\phi$. Also ist auch jede Regel des Kalküls $\mathfrak{S}'$ und damit auch jede darin ableitbare Regel korrekt bzgl. der einelementigen Strukturen. Wäre also jede Sequenz ableitbar in $\mathfrak{S}'$, so insbesondere die Sequenz $\Gamma\phi\psi$ mit $\Gamma = \emptyset$, ϕ der Formel $v_0 = v_0$ und ψ der Formel $\exists v_0 \exists v_1\ v_0 \neq v_1$. Nun ist aber ϕ in jeder (einelementigen) Struktur wahr, ψ aber nicht. Also kann diese Sequenz nicht in $\mathfrak{S}'$ ableitbar sein.

Aufgabe 3 (Lineare Ordnungen; 4 Punkte) Betrachten Sie die Sprache mit der Symbolmenge $S = \{<, s\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol und s ein einstelliges Funktionssymbol ist. Betrachten Sie die Axiome

$$\begin{aligned}
\phi_1 &: \forall x \forall y \left(x < y \vee y < x \vee x = y\right), \\
\phi_2 &: \forall x \forall y \forall z \left((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\right), \\
\phi_3 &: \forall x \neg x < x, \\
\phi_4 &: \forall x\ x < s(x), \\
\phi &:= \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: es gibt eine einstellige Funktion s auf A mit $(A, , <, s)$ ein Modell von ϕ genau dann, wenn $(A, <)$ eine lineare Ordnung ohne größtes Element ist.

(b) Betrachten Sie das Termmodell $\mathfrak{T}^\phi$ und beschreiben Sie es. Ist es ein Modell von ϕ?

Lösung:

1. " $\Longrightarrow$ "

   Sei s eine einstellige Funktion auf A, so dass $(A, <, s)$ ein Modell von $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4$ ist. Wegen $(A, <, s) \models \phi_1$ ist sind je zwei Elemente in A vergleichbar bzgl. $<$;
   Wegen $(A, <, s) \models \phi_2$ ist $<$ transitiv;

Wegen $(A, <, s) \models \phi_3$ ist $<$ irreflexiv.

Also ist $(A, <)$ eine lineare Ordnung. Weiter gilt $(A, <, s) \models \phi_4$ und somit gilt für alle $a \in A$, dass $a < s(a) \in A$. Also hat $(A, <)$ kein größtes Element.

"$\Longleftarrow$"

Angenommen $(A, <)$ ist eine lineare Ordnung ohne größtes Element. Da $a \in A$ kein größtes Element von $(A, <)$ ist, so können wir für jedes $a \in A$ ein $s(a) \in A$ wählen mit $a < s(a)$. (Dabei benutzen wir das Auswahlaxiom.) Nun gilt $(A, <, s) \models \phi_i$ für $i = 1, 2, 3$, denn $(A, <)$ ist eine lineare Ordnung. Es gilt aber auch $(A, <, s) \models \phi_4$ nach der Definition von $s(a)$. Also $(A, <, s) \models \phi$.

2. Das Termmodell $\mathfrak{T}^\phi$ hat als Grundmenge die Menge der Äquivalenzklassen aller Terme über $S = \{<, s\}$, d.h.

$$\mathfrak{T}^\phi = \left\{\bar{t} \mid t \in T^S\right\} = \left\{\overline{s(t)} \mid t \in T^S\right\} \cup \{\overline{v}_i \mid i \in \mathbb{N}\},$$

wobei

$$\bar{t}_1 = \bar{t}_2 \iff \{\phi\} \vdash t_1 = t_2,$$

und die Interpretationen von S sind

$$s^{\mathfrak{T}^\phi}(\bar{t}) = \overline{s(t)},$$

$$\bar{t}_1 <^{\mathfrak{T}^\phi} \bar{t}_2 \iff \{\phi\} \vdash t_1 < t_2.$$

Wir beschreiben zuerst die Grundmenge etwas genauer. Jedes Element von $\mathfrak{T}^\phi$ hat die Form $\overline{s^n(v_i)}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und wir verabreden $s^0(v_i) := v_i$.

Behauptung: $\overline{s^n(v_i)} = \overline{s^m(v_j)}$ gdw. $n = m$ und $i = j$.

Sei $\overline{s^n(v_i)} = \overline{s^m(v_j)}$. Dies bedeutet $\{\phi\} \vdash s^n(v_i) = s^m(v_j)$, insbesondere wegen der Korrektheit des Ableitungskalküls gilt $\{\phi\} \models s^n(v_i) = s^m(v_j)$. Wäre $n \neq m$, betrachte die lineare Ordnung der natürlichen Zahlen $\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right)$ mit $s^{\mathbb{N}}$ der Nachfolgeroperation. Es ist $\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right) \models \phi$ aber belgt man v_i und v_j mit 0, so ist $\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right) \not\models s^n(v_i) = s^m(v_j)$. Also muss $n = m$ gelten. Genauso sieht man, dass $i = j$ sein muss, sonst belege v_i mit 0 und v_j mit 1.

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{T}^\phi$ die Ausdrücke ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 erfüllt, aber nicht ϕ_1.

"$\mathfrak{T}^\phi \models \phi_3$"

Sei $\overline{s^n(v_i)} \in \mathfrak{T}^\phi$. Es gilt

$\{\phi\} \vdash \phi$	(Voraussetzunsregel)
$\{\phi\} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4$	(Def. von ϕ)
$\{\phi\} \vdash \phi_3$	(Übungsblatt 6, Aufgabe 3, (c1)-(c2))
$\{\phi\} \vdash \forall x \neg x < x$	(Def. von ϕ_3)
$\{\phi\} \vdash \neg s^n(v_i) < s^n(v_i)$	(Aufgabe 1, (a1)).

Wegen der Korrektheit des Ableitungskalküls ist somit $\{\phi\} \not\vdash s^n(v_i) < s^n(v_i)$. Nun gilt $\overline{s^n(v_i)} \not<^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{s^n(v_i)}$ gdw. $\{\phi\} \not\vdash s^n(v_i) < s^n(v_i)$ und wir haben nachgeprüft, dass $<^{\mathfrak{T}^\phi}$ irreflexiv ist.

"$\mathfrak{T}^\phi \models \phi_4$"

Sei $\overline{s^n(v_i)} \in \mathfrak{T}^\phi$. Es gilt

$\{\phi\} \vdash \phi$	(Voraussetzunsregel)
$\{\phi\} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4$	(Def. von ϕ)
$\{\phi\} \vdash \phi_4$	(Übungsblatt 6, Aufgabe 3, (c1)-(c2))
$\{\phi\} \vdash \forall x\, x < s(x)$	(Def. von ϕ_4)
$\{\phi\} \vdash s^n(v_i) < s(s^n(v_i))$	(Aufgabe 1, (a1))
$\overline{s^n(v_i)} <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{s^{n+1}(v_i)}$	(Def. von $<^{\mathfrak{T}^\phi}$).

Wir haben soeben nachgeprüft, dass $\mathfrak{T}^\phi \models \phi_4$.

"$\mathfrak{T}^\phi \models \phi_2$"

Seien $\overline{s^l(v_i)}, \overline{s^m(v_j)}, \overline{s^n(v_k)} \in \mathfrak{T}^\phi$ mit $\overline{s^l(v_i)} <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{s^m(v_j)}$ und $\overline{s^m(v_j)} <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{s^n(v_k)}$. Dies bedeutet

$$\{\phi\} \vdash s^l(v_i) < s^m(v_j) \text{ und } \{\phi\} \vdash s^m(v_j) < s^n(v_k),$$

und somit

$$\{\phi\} \vdash \left(s^l(v_i) < s^m(v_j) \wedge s^m(v_j) < s^n(v_k)\right)$$

nach der Regel aus Übungsblatt 6, Aufgabe 3, (b).

Wir rechnen nun

$$\begin{array}{ll}
\{\phi\} \vdash \phi & \text{(Voraussetzunsregel)} \\
\{\phi\} \vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4 & \text{(Def. von } \phi) \\
\{\phi\} \vdash \phi_2 & \text{(Übungsblatt 6, Aufgabe 3, (c1)-(c2))} \\
\{\phi\} \vdash \forall x \forall y \forall z \left((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\right) & \text{(Def. von } \phi_2) \\
\{\phi\} \vdash \left(\left(s^l(v_i) < s^m(v_j) \wedge s^m(v_j) < s^n(v_k)\right) \rightarrow s^l(v_i) < s^n(v_k)\right) & \text{(Aufgabe 1, (a1))} \\
\{\phi\} \vdash s^l(v_i) < s^n(v_k) & \text{(Modus ponens).}
\end{array}$$

Also $\overline{s^l(v_i)} <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{s^n(v_k)}$ und die Relation $<^{\mathfrak{T}^\phi}$ ist transitiv.

Wir können also feststellen, dass $\left(\mathfrak{T}^\phi, <^{\mathfrak{T}^\phi}\right)$ eine partielle Ordnung ist. Eigentlich haben wir sogar gezeigt, dass $\left\{\overline{s^n(v_i)} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ eine lineare Teilordnung in $<^{\mathfrak{T}^\phi}$ bildet. Wir zeigen, dass $\mathfrak{T}^\phi \not\models \phi_1$, d.h. ganz $\mathfrak{T}^\phi$ ist keine lineare Ordnung.

"$\mathfrak{T}^\phi \not\models \phi_1$"

Angenommen $\mathfrak{T}^\phi \models \phi_1$. Dann gilt insbesondere für $\overline{v}_i \neq \overline{v}_j$

$$\begin{array}{ll}
\Longrightarrow & \left(\mathfrak{T}^\phi, \beta\frac{\overline{v}_i}{x}\frac{\overline{v}_j}{y}\right) \models x < y \vee y < x \vee x = y \\
\Longrightarrow & \overline{v}_i <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{v}_j \text{ oder } \overline{v}_j <^{\mathfrak{T}^\phi} \overline{v}_i \text{ oder } \overline{v}_i = \overline{v}_j \\
\Longrightarrow & \{\phi\} \vdash v_i < v_j \text{ oder } \{\phi\} \vdash v_j < v_i \text{ oder } \{\phi\} \vdash v_i = v_j \\
\Longrightarrow & \{\phi\} \models v_i < v_j \text{ oder } \{\phi\} \models v_j < v_i \text{ oder } \{\phi\} \models v_i = v_j.
\end{array}$$

Jetzt bemerken wir aber, dass die Schlussbehauptung falsch ist. Man nehme z.B $\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right) \models \phi$ und mit Belegung ist $\left(\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right), \beta\frac{0}{v_i}\frac{1}{v_j}\right) \not\models v_i = v_j$ und $\left(\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right), \beta\frac{0}{v_i}\frac{1}{v_j}\right) \not\models v_j < v_i$ und $\left(\left(\mathbb{N}, <^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}\right), \beta\frac{1}{v_i}\frac{0}{v_j}\right) \not\models v_i < v_j$. Genauso kann man für $\overline{s^n(v_i)} \neq \overline{s^m(v_j)}$ argumentieren und zeigen, dass

$$\overline{s^n(v_i)} \text{ und } \overline{s^m(v_j)} \text{ sind unvergleichbar, falls } i \neq j.$$

Wir fassen zusammen: $\mathfrak{T}^\phi$ ist kein Modell von ϕ, denn $\mathfrak{T}^\phi$ erfüllt ϕ_1 nicht (Dichotomie scheitert). Somit ist $\mathfrak{T}^\phi$ keine lineare Ordnung. Man kann aber $\mathfrak{T}^\phi$ als disjunkte Vereinigung von zu $\mathbb{N}$ isomorphen linearen Ordnungen darstellen:

$$\mathfrak{T}^\phi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left\{\overline{s^n(v_i)} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Aufgabe 4 ($\mathfrak{J}^\Phi$; 2 Punkte) Die Symbolmenge S sei fest vorgegeben. Man bestimme $\mathfrak{J}^\Phi$ für widerspruchsvolles Φ. Hängt $\mathfrak{J}^\Phi$ von der widerspruchsvollen Menge Φ ab?

Lösung:

$\mathfrak{J}^\Phi$ ist die Terminterpretation $\mathfrak{J}^\Phi = \left(\mathfrak{T}^\Phi, \beta^\Phi\right)$ gegeben durch das Termmodell $\mathfrak{T}^\Phi$ zusammen mit der Belegung $\beta^\Phi(x) = \overline{x}$. Da Φ widerspruchsvoll ist, kann jeder S-Ausdruck ϕ aus Φ abgeleitet werden, d.h. $\Phi \vdash \phi$ für alle S-Ausdrücke ϕ. Sind also $t_1, t_2 \in T^S$ Terme, so gilt

$$\Phi \vdash t_1 = t_2 \implies \overline{t}_1 = \overline{t}_2.$$

Das Termmodell $\mathfrak{T}^\Phi$ ist somit einelementig, etwa $\mathfrak{T}^\Phi = \left\{\overline{t}\right\}$. Ist f ein Funktionssymbol, so ist $f^{\mathfrak{T}^\Phi}\left(\overline{t}, \ldots, \overline{t}\right) = \overline{t}$ und es gilt $R^{\mathfrak{T}^\Phi}\left(\overline{t}, \ldots, \overline{t}\right)$ und $c^{\mathfrak{T}^\Phi} = \overline{t}$ für alle Funktions-, Relations- bzw. Konstantensymbole. Die Belegung β^Φ belegt alle Variablen natürlich mit dem einzig verfügbaren Element $\overline{t}$.

Die Terminterpretation $\mathfrak{J}^\Phi$ hängt nicht von der widerspruchsvollen Menge Φ ab, denn wir haben in unseren obigen Argumenten nur gebraucht, dass $\Phi \vdash \phi$ für alle S-Ausdrücke ϕ.