Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 5

Abgabe am 5. Mai 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Substrukturen; 3 Punkte) Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ S-Strukturen, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und t ein Term mit $\operatorname{var}(t) \subseteq \{v_0, \ldots, v_n\}$ und $b_0, \ldots, b_n \in A'$. Wir erinnern uns, wir in der Vorlesung gezeigt hatten, dass

$$\left(\mathcal{A}, \beta\frac{b_0}{v_0}\ldots\frac{b_n}{v_n}\right)(t) = \left(\mathcal{A}', \beta\frac{b_0}{v_0}\ldots\frac{b_n}{v_n}\right)(t)\,.$$

Eine Formel ϕ heißt quantorenfrei, falls in ϕ keine Quantoren vorkommen.

1. Ist $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ eine quantorenfreie S-Formel, so gilt

$$\mathcal{A} \models \phi[b_0, \ldots, b_n] \iff \mathcal{A}' \models \phi[b_0, \ldots, b_n]$$

2. Geben Sie ein Beispiel von Strukturen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ und einem universellen Satz $\phi \in L^S$ mit $\mathcal{A} \models \phi$ aber $\mathcal{A}' \not\models \phi$.

3. Wir sagen dass eine Formel $\phi \in L^S$ unter Substrukturen erhalten bleibt, falls für alle Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ und alle $\mathcal{A}'$-Belegungen β gilt

$$\text{falls } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \text{ so } \left(\mathcal{A}', \beta\right) \models \phi \implies (\mathcal{A}, \beta) \models \phi.$$

   Geben Sie ein Beispiel einer Formel an, die die Zeichen $\neg$ und $\forall$ enthält, aber nicht $\exists$, und die unter Substrukturen erhalten bleibt.

Aufgabe 2 (Hornsätze; 4 Punkte) Wir definieren eine Teilmenge der Formeln, die Menge der so genannten *Hornformeln* durch Induktion:

- Sind $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi$ atomar, so sind $((\ldots(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \vee \ldots \vee \neg\phi_n) \vee \phi)$ und $(\ldots(\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2) \vee \ldots \vee \neg\phi_n)$ Hornformeln;
- Sind ϕ, ψ Hornformeln, so sind auch $(\phi \wedge \psi)$ und $\forall\phi$ und $\exists\phi$ Hornformeln.

Ein Satz, der eine Hornformel ist, nennt man auch einen Hornsatz.
Man zeige:

1. Ist ϕ ein Hornsatz und sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ ein Modelle von ϕ so auch $\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \models \phi$. Für die Definition von direkten Produkten aus Übungsblatt 3, Aufgabe 4.
2. Für die Theorie der Körper gibt es kein Axiomensystem, welches nur aus Hornsätzen besteht.

Aufgabe 3 (Elementare Definierbarkeit; 4 Punkte) Man zeige:

1. In $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ ist die Kleiner-Beziehung $<$ *elementar definierbar*, d.h. es gibt ein $\phi(v_0, v_1) \in L^{\{+,\cdot,0\}}$ mit freien Variablen v_0, v_1, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \phi[a, b]$ gdw. $a < b$.

2. In $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist die Kleiner-Beziehung $<$ nicht elementar definierbar.

   (*Hinweis.* Finden Sie einen geeigneten *Automorphismus* von $(\mathbb{R}, +, 0)$, d.h. einen geeigneten Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +, 0)$ auf sich selbst, mit dem Sie die Behauptung beweisen können.)

Aufgabe 4 (Substitution; 4 Punkte) Seien P ein Relationssymbol und f ein Funktionssymbol mit $\mathrm{ar}(P) = \mathrm{ar}(f) = 2$. Berechnen Sie schrittweise gemäß der Definition der Substitution:

1. $\exists v_3 \exists v_4 (P(v_3, v_0) \wedge P(v_4, v_1)) \frac{v_0}{v_3} \frac{v_0}{v_4} \frac{v_0}{v_1}$

2. $\exists v_3 \exists v_4 (P(v_3, v_0) \wedge P(v_4, v_1)) \frac{v_1}{v_0} \frac{f(v_0,v_1)}{v_1}$

3. $\exists v_3 \exists v_4 (P(v_3, v_0) \wedge P(v_4, v_1)) \frac{v_0}{v_3} \frac{v_3}{v_0} \frac{f(v_0,v_1)}{v_1}$

4. $[\forall v_3 \exists v_4 (P(v_3, v_4) \wedge P(v_3, v_0)) \vee \exists v_0 \; f(v_0, v_0) = v_3] \frac{v_3}{v_3} \frac{f(v_3,v_4)}{v_0}$