Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie

Tabea Beese
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Ilya Sharankou, Dipl.-Math.

Übungsblatt 4

Abgabe am 28. April 2015 am Anfang der Vorlesung.

Aufgabe 1 (Gebundene Variable in einer Formel; 4 Punkte).
Sei S eine beliebige Symbolmenge, x eine Variable und ϕ eine S-Formel. Angenommen x kommt in ϕ vor und $x \notin \text{frei}(\phi)$. Zeigen Sie: Es gibt Zeichenketten ζ, ζ' und S-Formeln ψ, ψ', so dass

1. x kommt weder in ζ noch in ζ' vor,
2. $\phi = \zeta\psi\zeta'$, und
3. ψ ist entweder gleich $\exists x\psi'$ oder gleich $\forall x\psi'$.

Aufgabe 2 (Semantische Folgerung; 4 Punkte).
Man zeige für beliebige Ausdrücke ϕ, ψ, χ:

(a) $(\phi \vee \psi) \models \chi$ gdw. $\phi \models \chi$ und $\psi \models \chi$.

(b) $\models (\phi \to \psi)$ gdw. $\phi \models \psi$.

(c) $\exists x\,(\phi \wedge \psi) \mathrel{=\!\!|\!\models} (\phi \wedge \exists x\psi)$, falls $x \notin \text{frei}(\phi)$

(d) Man zeige, dass man in (c) auf die Voraussetzung "$x \notin \text{frei}(\phi)$" nicht verzichten kann.

Aufgabe 3 (Direktes Produkt von abelschen Gruppen; 4 Punkte).
Seien $\mathcal{A} = (A, \mathfrak{a})$, $\mathcal{B} = (B, \mathfrak{b})$ zwei Gruppen. Das direkte Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sei definiert wie auf Blatt 3, Aufgabe 4. Wir schreiben φ_{Abel} für den Satz

$$\forall x \forall y x \circ y = y \circ x.$$

Verwenden Sie die rekursive Definition von $\mathcal{A} \models \varphi$, um die folgende Behauptung im Detail zu zeigen: Falls sowohl $\mathcal{A} \models \varphi_{\text{Abel}}$ und $\mathcal{B} \models \varphi_{\text{Abel}}$, so gilt, daß $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \models \varphi_{\text{Abel}}$.

Aufgabe 4 (Isomorphie von endlichen Strukturen; 4 Punkte).
Wir nennen eine S-Struktur $(A, \mathfrak{a})$ *endlich*, falls A eine endliche Menge ist. Wir nehmen an, daß S eine endliche Symbolmenge ist und daß $\mathcal{A} = (A, \mathfrak{a})$ eine endliche S-Struktur ist. Zeigen Sie, dass es einen Satz $\varphi_{\mathcal{A}} \in L^S$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle S-Strukturen $\mathcal{B} = (B, \mathfrak{b})$ gilt

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}}.$$

(*Hinweis.* Suchen Sie nach einer Formel, die alle Beziehungen zwischen den Elementen von A beschreibt. Verwenden Sie die Endlichkeit von A und S, um diese zu finden.)