Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Probeklausur Analysis II

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Wichtige Hinweise:

- Sofern nicht anders angegeben, müssen alle Rechnungen, Ergebnisse, Folgerungen etc. **begründet** werden. Was den Umfang und die Form der Begründung angeht orientieren Sie sich an den vorgeführten Lösungen der Übungsblätter.
- In der Klausur ist **kein** Hilfsmittel (Taschenrechner, Spickzettel, usw...) zugelassen.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte sind während der gesamten Klausur **verboten**. Ein Mobiltelefon auf Ihrem Tisch oder in Ihrer Hand bedeutet das sofortige Ende Ihrer Klausur.
- Die Klausurzeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur auf die "Maximalpunktezahl" 100 ausgelegt: Somit haben Sie eine gewisse Freiheit in der Auswahl der Aufgaben.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	A	B	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5			$\sum$	Bonus	Note
Max.	20	20	25	15	15	15	10			120		
Punkte												

Teil A

Aufgabe. (6+8+6=20 Punkte)
Geben Sie eine Definition folgender Begriffe:

(a) gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$
(wobei X, Y allgemeine metrische Räume sind)

(b) Die Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^p$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Formulieren Sie (jeweils 4 Punkte)

(d) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (es genügt der Fall für stetige Funktionen)

(e) die *grundlegenden Eigenschaften* offener Mengen in metrischen Räumen

Für den Beweis der grundlegenden Eigenschaften offener Mengen erhalten Sie **5 Bonuspunkte**.
Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Geben Sie jeweils ein Beispiel (jeweils 2 Punkte)

(f) einer Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, die <u>nicht</u> uneigentlich Riemann integrierbar ist, aber so dass $f|_{[a,1]}$ Riemann integrierbar für jedes $a \in (0, 1)$.

(g) eines metrischen Raum, dessen Metrik nicht durch eine Norm definiert ist.

(h) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Sie müssen hierbei keine Beweise angeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Teil B

Aufgabe. (10×2 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung hier notwendig!

1.	Wahr oder nicht wahr: *Alle Normen auf einem Vektorraum X sind äquivalent.*	
2.	$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \left(\frac{\\|(x,y)\\|_1}{e^{\\|(x,y)\\|_\infty} + \sqrt{\\|(x,y)\\|_2}} \right) = ?$	
3.	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \sin(x^2)}{x^2+y^2} = ?$	
4.	$\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2} \mathrm{d}x = ?$	
5.	Wahr oder nicht wahr: *Jede kompakte Menge abgeschlossen.*	
6.	Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$ für $x = 0$.	
7.	Bestimmen Sie das Innere von $\cap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$	
8.	Ist $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 10 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf $[0,1] \times [0,1]$ integrierbar?	
9.	Hat die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \cos(y)x^2e^z$ ein globales Maximum?	
10.	Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ stetig differenzierbar? Geben Sie das total Differential an $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ an.	

Teil C

Aufgabe 1. (25 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (3 Punkte),

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[0, 2] \times [0, 2]$ (2 Punkte),

(3) stetige totale Differenzierbarkeit und gegebenenfalls totale Differenzierbarkeit (5 Punkte),

(4) lokale und globale Extremwerte (3 Punkte),

(5) globale Extremwerte unter der Nebenbedingung $x^2 + y^4 = 1$ (4 Punkte).

Weiterhin behandeln Sie **eine** der beiden folgende Aufgaben (8 Punkte)

(6) Berechnen Sie das Integral $\int_{[0,2]\times[0,2]} f(x, y)\mathrm{d}(x, y)$

(7) (i) Untersuchen Sie, ob die Menge $f((-\infty, \infty) \times [-1, 1])$ kompakt ist.(3 Punkte)

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x, n)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 2. (15 Punkte) Berechnen Sie das Volumen eines American Footballs, der hier durch folgende Menge beschrieben wird:

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{z^2}{4}\right\}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g(x, y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3y + x^2 - 1$$

definiert von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_{f,2}(x, y)$ an der Ansschlussstelle $(x, y) = (0, 0)$. Was lässt sich über den Fehler

$$R = f - T_{f,2}$$

aussagen?

(2) Zeigen Sie, dass die Gleichung $g(x, y) = 0$ lokal um jeden Punkt $(x, y) = (a, b)$ nach y auflösbar ist. Gilt diese Aussage auch, wenn man g durch das Taylorpolynom aus dem ersten Aufgabenteil ersetzt?

Aufgabe 4. (15 Punkte) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, wobei X kompakt sei. Zeigen Sie, dass eine bijektive und stetige Abbildung

$$f : X \to Y$$

eine stetige Inverse hat.

Aufgabe 5. (10 Punkte) Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar an einer Stelle $\mathbf{x} \in D$ und seien die Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für die Richtungen $v = (1,1)^T$ und $w = (0,-1)^T$ gegeben.

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ sowie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{x})$$

in Richtung $\tilde{v} = (4,3)^T$.