Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Probeklausur-Aufgaben

Hinweis: Die vorliegenden Aufgaben sind als Übung für die kommende Klausur gedacht. Die Formatierung und Form dieser Probe kann sich unterscheidet sich aber von der eigentlichen Klausur noch geringfügig unterscheiden. Diese Zusammenstellung soll einen Eindruck über Art der Aufgaben und Länge geben. Man beachte auch, dass die aktuellen Aufgaben nur den bisher behandelten Vorlesungsstoff behandeln.

Probeklausur Analysis II

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Wichtige Hinweise:

- Sofern nicht anders angegeben, müssen alle Rechnungen, Ergebnisse, Folgerungen etc. **begründet** werden. Was den Umfang und die Form der Begründung angeht orientieren Sie sich an den vorgeführten Lösungen der Übungsblätter.
- In der Klausur ist **kein** Hilfsmittel (Taschenrechner, Spickzettel, usw...) zugelassen.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte sind während der gesamten Klausur **verboten**. Ein Mobiltelefon auf Ihrem Tisch oder in Ihrer Hand bedeutet das sofortige Ende Ihrer Klausur.
- Die Klausurzeit beträgt 120 Minuten.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	A	B	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	C.6		$\sum$	Bonus	Note
Max.	15	20	20	10	15	10	10	10		110		
Punkte												

Teil A

Aufgabe. (3+6×2=15 Punkte)

Geben Sie eine Definition der folgenden Sachverhalte in einem metrischen Raum (X, d)

(1) $M \subseteq X$ ist *offen* bzw. *abgeschlossen*

(2) $M \subseteq X$ ist kompakt

Sei B eine zerlegbare Menge in $\mathbb{R}^p$ mit nicht-leerem Inneren und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt.

(3) Definieren Sie die (Riemann-) Integrierbarkeit von f wobei Sie voraussetzen dürfen, dass das Integral für Treppenfunktionen bereits definiert ist.

Formulieren Sie:

(4) das Hausdorffsche Trennungsaxiom/Trennungssatz

(5) die Charakterisierung von kompakten Mengen in metrischen Räumen mit Hilfe von Folgenkompaktheit

(6) den Satz von Fubini für Funktionen $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a < b$, $c < d$.

Für einen Beweis des Hausdorffschen Trennungssatzes erhalten Sie **5 Bonuspunkte**.

Geben Sie ein Beispiel:

(7) für eine beschränkte Funktion auf einem Intervall, die nicht (Riemann) integrierbar ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Teil B

Aufgabe. (10×2 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung hier notwendig!

1.	Wahr oder nicht wahr: *Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind äquivalent*	
2.	$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(\dfrac{2xy}{(x-1)^2 + \sqrt{y^2+x^2}} \right)$	
3.	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$	
4.	$\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = ?$	
5.	Bestimmen Sie das Innere von $\cup_{n\in\mathbb{N}}[n, n+1-\frac{1}{n}]$	
6.	Ist die Menge $\cup_{n\in\mathbb{N}}([-\mathrm{e}^{-n}, \mathrm{e}^{-n}] \times [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}])$ kompakt in $\mathbb{R}^2$?	
7.	Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist	
8.	Ist die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, y \in \{0,1\} \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$ auf $[0,1] \times [0,1]$ Riemann integrierbar?	
9.	Geben Sie die offenen Mengen von $\{1,2\}$ versehen mit der diskreten Metrik an.	
10.	Geben Sie ein Beispiel eines normierten Raumes an, der kein Banachraum ist	

Teil C

Aufgabe 1. (20 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (3 Punkte),

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[0,2] \times [0,2]$ (2 Punkte),

(3) partielle Differenzierbarkeit — geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen an — (2 Punkte),

(4) totale Differenzierbarkeit — geben Sie gegebenenfalls die Jacobi-Matrix an(2 Punkte),

(5) zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit (3 Punkte)

(6) Geben Sie an, ob das Bild $f([-2,2] \times [-\pi,\pi])$ der Menge $[-2,2] \times [-\pi,\pi]$ kompakt ist. (2 Punkte)

Berechnen Sie außerdem

(7) das Integral $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$ (4 Punkte).

(8) Geben Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(0,0)$ in Richtung von $v = (1,1)^T$ an, sofern diese Ableitung existiert. (2 Punkte)

5 Bonuspunkte Argumentieren Sie die Punkte (1-5) für die Funktion:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sqrt{\mathrm{e}^{x^2y^2}-1}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Aufgabe 2. (10 Punkte)

(1) Sei die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x,y) = y^n \sin(1-y)x(1-x)^n.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\times[0,1]} f_n(x,y)\mathrm{d}(x,y) = 0$ (5 Punkte).

(2) Sei $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{t}\mathrm{d}t.$$

Argumentieren Sie in welchem Sinne das Integral $F(x)$ definiert ist und berechnen Sie die Ableitung von F. (5 Punkte)

Aufgabe 3. (15 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(1) $\int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^1 x \sin(y^2) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$. (5 Punkte)

(2) $\int_M f(x,y) \mathrm{d}(x,y)$ für $f : M = [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2}, & |y| \leq x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(5 Punkte)

(3) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{\ln(t+1)}{t^{3/2}} \mathrm{d}t$$

als uneigentliches Integral existiert. (5 Punkte)

Aufgabe 4. (Punkte 10) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + \max\{|x_2|, |x_3|\}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Ist dieser normierte Raum vollständig? Skizzieren Sie die offene Kugel um $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Radius $r = 1$.

5 Bonuspunkte Geben Sie konkrete Konstanten $c_1, c_2 > 0$ an, so dass

$$c_1\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\| \leq c_2\|\mathbf{x}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 5. (10 Punkte) Seien X, Y Banachräume und sei $D \subset X$ offen. Sei $f : D \subset X \to Y$ total differenzierbar an $x \in D$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
Gilt die Aussage auch, wenn man "total differenzierbar an $\mathbf{x}$" durch

"alle Richtungsableitungen an $\mathbf{x}$ *existieren"*

ersetzt? Begründen Sie.

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $D \subseteq X$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig wobei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik versehen ist ($d = d_2$). Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum auf D hat, d.h. es existieren Punkte x_{max} und x_{min} in D mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in D}\{f(x)\colon x \in D\} \quad \text{und} \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in D}\{f(x)\colon x \in D\}.$$