Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Klausur Analysis II, 13.2.2019 — Lösungsvorschlag

- Die vorliegende Lösungsvorschlag dient in erster Linie dafür, eine *mögliche* (meist effizienteste) Erklärung der Aufgaben zu geben. Es handelt sich hierbei in vielen Fällen nicht um die "einzige" richtige Lösung. Bei Definitionen und Formulierungen von Sätzen war in erste Linie die Version aus der Vorlesung gefragt; allerdings wurden auch — sofern korrekt bzw. äquivalent — alternative Versionen zugelassen. Was den Umfang der Begründungen in einzelnen Beweis/Rechenschritten angeht, so orientiert sich dies an den bereits diskutierten Übungsaufgaben und der Vorlesung.
- Diese Musterlösung soll insbesondere noch einmal verdeutlichen *welche* Argumentationen nötig sind. An manchen Stellen werden hier auch mehrere Alternativen benannt und genauer ausgeführt. Insbesondere soll dies hier nicht bedeuten, dass man nur ganze Sätze schreiben muss (schaden kann dies allerdings in den seltensten Fällen), sondern gerne auch kurz, aber vollständig. So genügt es beispielsweise bei der Frage nach einer Definition, diese einzig mit Hilfe von Quantoren zu formulieren)
- Die abgefragten Skizzen sind diesem Dokument nicht beigefügt.
- Wie immer können sich auch leider in diesem Dokument Fehler eingeschlichen haben. Im Interesse aller teilen Sie mir diese bitte mit, falls Sie welche entdecken.
- Ich möchte auch auf folgende **typische Fehler** hinweisen, die häufig aufgetreten sind

  (i) (Eigentlich selbstverständlich) *Bitte* seien sie sorgfältig beim Berechnen von (partiellen) Ableitungen und (einfachen) Integralen sowie bei Äquivalenzumformungen. Die entstandenen Rechenfehler führen oft zu Komplikationen, die das weitere Bearbeiten der Aufgabe wesentlich aufwendiger machen.

  (ii) Bei den "Standardaufgaben", die wir bereits mehrfach besprochen haben wird viel zu ungenau und fehlerhaft formuliert bzw. gar nicht argumentiert (z.B. die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Lagrange-Multiplikatoren, Fubini)

  (iii) die Begründung für Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt ist oft fehlerhaft.

  (iv) die Argumentation warum/wann globale Extrema existieren ist lückenhaft

  (v) fehlende Voraussetzung, wann Volumenintegrale als Doppelintegrale geschrieben werden können. VORSICHT bei der Reihenfolge der Integrationsgrenzen (die für "x" und die für "y")

Teil A

Aufgabe. (20 Punkte)
Definieren Sie folgende Begriffe (jeweils 2 Punkte):

(a) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $f_n : X \to Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : X \to Y$ (wobei X, Y metrische Räume sind).

(b) *Rand* ∂M einer Menge $M \subset X$ in einem metrischen Raum (X, d)

(c) *zerlegbare Menge* $M \subset \mathbb{R}^p$

Lösung:
(a):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N_\varepsilon\, \forall x \in X : d_Y X(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0.$$

(b):

$$\partial M = \{x \in X \colon \forall \varepsilon > 0\, (B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset)\}$$

bzw. $\partial M = \{x \in X \colon \forall O$ *offen gilt die Implikation* $[x \in O \implies (O \cap M \neq \emptyset \wedge O \cap M^c \neq \emptyset)]\}$
bzw. $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ *(was zwar nicht die Definition war, aber eine Konsequenz, Satz 1.31)*

(c): $M \subseteq \mathbb{R}^p$ *heißt zerlegbar,* M *falls die Vereinigung endlich vieler Quader*[1] $\subset \mathbb{R}^p$ *ist, so dass der paarweise Schnitt des Inneren der Quader leer ist.*
bzw. (wie im Skript): M *heißt zerlegbar, falls* $\mathcal{Z}(M) \neq \emptyset$ *wobei* $\mathcal{Z}(M)$ *die Menge der endlichen Teilmengen* Z *der Potenzmenge* $\mathcal{P}(M)$ *ist, die folgenden Eigenschaften genügen:*

- $\forall P \in Z$: P *ist Quader*
- $\forall P, Q \in Z$: $P^\circ \cap Q^\circ = \emptyset$
- $\bigcup_{P\in Z} P = M$

Formulieren Sie (jeweils 4 Punkte)

(d) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (es genügt der Fall für stetige Funktionen)

(e) den *Banachschen Fixpunktsatz*

Für den Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes erhalten Sie **10 Bonuspunkte**.

Lösung:
(d): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist die folgende Funktion* F *eine Stammfunktion von* f,

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$$

(e): Sei (X, d) *ein metrischer Raum,* $M \subseteq X$ *und* $\Phi : M \to X$*. Falls*

- X *vollständig,*
- $\Phi(M) \subseteq M$,

[1] (achsen-parallel, abgeschlossen, p-dimensional)

- *M abgeschlossen,*
- *und Φ kontraktiv ist, d.h. $\exists L \in (0,1)\, \forall x, y \in M : d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L d(x,y)$,*

dann hat Φ einen eindeutigen Fixpunkt $a \in M$.

Geben Sie jeweils ein Beispiel (jeweils 2 Punkte)

(f) einer beschränkten Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die nicht Riemann integrierbar ist.

(g) für eine Metrik d auf der Menge $X = \{0, 1, 2\}$

(h) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Sie müssen hierbei keine Beweise angeben.

Lösung:

(f): Die Dirichletfunktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(g) diskrete Metrik bzw. d_1, d_2, d_∞

(h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Teil B

Aufgabe. (10×2 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung hier notwendig!

1.	Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und stetig. Geben Sie eine Bedingung an, so dass $\frac{\partial}{\partial y} \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)\mathrm{d}x$.	f stetig partiell differenzierbar
2.	$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \begin{pmatrix} \Vert(x,y)\Vert_\infty^2 \\ \mathrm{e}^{\Vert(x,y)\Vert_1} + \sqrt{\Vert(x,y)\Vert_2} \end{pmatrix} =?$	$\begin{pmatrix} 4 \\ \mathrm{e}^3 + 5^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$
3.	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-1+\mathrm{e}^{(x^2+y^2)}}{x^2+2y^2} =?$	1
4.	Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$	$x \mapsto x\ln(x) - x + C$, $C \in \mathbb{R}$
5.	*Gibt es metrische Räume mit kompakten Mengen, die offen sind?*	ja
6.	Geben Sie an, welche der folgenden Mengen messbar ist/sind: $M_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, $M_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $M_3 = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 2\}$	M_2, M_3
7.	Bestimmen Sie den Rand von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 < 3\}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \in \{1,3\}\}$
8.	Ist $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1000 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf $[0,1]\times[0,1]$ integrierbar?	ja
9.	Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 4$. Geben Sie das globale Extremum von f an und ob es ein Maximum oder Minimum ist.	Minimum 4 an $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
10.	Ist jede partiell differenzierbare Funktion stetig? (ja/nein)	nein

Teil C

Aufgabe 1. (25 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (4 Punkte)
Die Funktion ist nicht stetig an $(0,0)$, da $f(\frac{1}{n},0) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$
An allen anderen Stellen ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[0,1] \times [0,1]$ (2 Punkte)
Die Funktion ist unbeschränkt auf dem Quader $[0,1] \times [0,1]$ und somit nicht integrierbar

(3) (stetige) partielle Differenzierbarkeit und (stetige) Differenzierbarkeit an allen Punkten des Definitionsbereichs (5 Punkte)
Die partiellen Ableitungen für $(x,y) \neq (0,0)$ sind gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \left(\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

Diese sind auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig und somit ist f an diesen Punkten stetig partiell differenzierbar und damit dort auch stetig differenzierbar.
Am Punkt $(0,0)$ ist f nicht stetig, also auch nicht differenzierbar.
Die partiellen Ableitungen an $(0,0)$ existieren auch nicht, da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(h,0) - f(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{h}{h^2} \nexists$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(0,h) - f(0,0)\right) = 0$$

(4) lokale und globale Extremstellen (5 Punkte)
Es gibt keine globalen Extremstellen, da $f(\pm\frac{1}{n},0) = \pm n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Daraus folgt auch, dass $(0,0)$ keine Extremstelle sein kann.
Für $(x,y) \neq (0,0)$ betrachten wir die Nullstellen des Gradienten/der Jacobi-Matrix:

$$(x^2 = y^2 \ \wedge xy = 0) \iff x = y = 0.$$

Dies widerspricht $(x,y) \neq (0,0)$. Es gibt also keine lokalen Extremstellen.

(5) globale Extremstellen unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ (6 Punkte).
Es genügt die Extremwerte für $\tilde{f}(x,y) = x$ unter der Nebenbedinung $g(x,y) = 0$ mit $g(x,y) = x^2+y^2-1$ zu bestimmen. Diese kann man sofort "sehen", da die Nebenbedingung impliziert, dass $|x| \leq 1$ ist. Wir erhalten also das Maximum $+1$ an der Stelle $(x,y) = (1,0)$ und das Minimum -1 and $(-1,0)$. An allen anderen Punkten mit $g(x,y) = 0$ ist $|x| < 1$.

Alternativ können Lagrange-Multiplikatoren verwendet werden da $\tilde{f}$ und g stetig differenzierbar sind und $\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(x,y) = 2(x,y) \neq (0,0)$ entlang der Nebenbedingung ist.

Die Lagrange-Funktion und ihr Gradient sind gegeben durch

$$\Lambda(x,y,\lambda) = x + \lambda(x^2+y^2-1), \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial(x,y,\lambda)}(x,y,\lambda) = (1+2\lambda x, 2\lambda y, x^2+y^2-1)$$

Nullsetzen des Gradienten ergibt:

$$x = \pm 1 \wedge y = 0. \tag{1}$$

Die beiden Punkten liefern nun tatsächlich das Maximum 1 *und das Minimum* 1, *da*

$$M = \{(x,y)\colon g(x,y) = 0\}$$

kompakt ist und $\tilde{f}$ bzw. f auf M stetig.

Weiterhin berechnen Sie das folgende Integral (8 Punkte)

$$\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$$

Da die Funktion f auf $[1,2]\times[0,1]$ stetig ist, lässt sich das Integral mit dem Satz von Fubini als Doppelintegral schreiben. Mit Hilfe von Substitution und der Stammfunktion des Arkustangens,

$$\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_1^2 x \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} y = xu \\ \mathrm{d}y = x\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int_1^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Nun verwendet man partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x &= x\cdot\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} + \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Das letzte Integral berechnet sich durch "Hinsehen", da $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ eine Stammfunktion des Integranden ist:

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(2)).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(5) + 4\arctan(\tfrac{1}{2}) - \ln(2) - \frac{\pi}{2}).$$

Alternativ kann man die Integrale in der anderen Reihenfolge berechnen:

$$\int_{[1,2]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1\int_1^2 \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Das innere Integral lässt sich durch "Hinsehen" angeben, da dies genau der Ableitung von $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ nach x entspricht. Somit erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_1^2 \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(4+y^2) - \ln(1+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(4+y^2)\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+y^2)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Für die verbliebenen Integrale verwendent man nun partielle Integration.

$$\int_0^1 \ln(4+y^2)\mathrm{d}y = y\ln(4+y^2)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 y\cdot\frac{2y}{4+y^2}\mathrm{d}y = \ln(5) - 2\int_0^1 \frac{y^2}{4+y^2}\mathrm{d}y$$
$$\int_0^1 \ln(1+y^2)\mathrm{d}y = y\ln(1+y^2)|_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 y\cdot\frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}y$$

Nun formt man die Brüche in den Integralen so um, dass man (mittels Substitution $2u = y$ beim ersten Integral) die Stammfunktion des Arkustangens erhält:

$$2\int_0^1 \frac{y^2}{4+y^2}\mathrm{d}y = 2\int_0^1 1 - \frac{4}{4+y^2}\mathrm{d}y = 2 - 4\arctan(\frac{y}{2})|_{y=0}^{y=1} = 2 - 4\arctan(\tfrac{1}{2})$$
$$2\int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y = 2 - 1\arctan(y)|_{y=0}^{y=1} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_0^1\int_1^2 \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\ln(5) - 2 + 4\arctan(\tfrac{1}{2}) - \ln(2) + 2 - \frac{\pi}{2})$$

Aufgabe 2 (12 Punkte).
Berechnen Sie das Volumen, dass von dem Graphen der folgenden Funktion f und der xy-Ebene eingeschlossen wird

$$f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} x\sin(y^2) & x^2 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizzieren zuerst die Menge der Punkte in $[-1,1] \times [-1,1]$ an denen f ungleich 0 ist.
(Hinweis: Begründen Sie auch die Existenz der auftretenden Integrale.)

Sei

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-1,1], x^2 \le y \le 1\}.$$

Wegen der Folgerung des Satzes von Fubini ist diese Menge messbar (da $\phi_1(x) = x^2$ und $\phi_2(x) = 1$ stetig sind). Da die Funktion

$$(x,y) \mapsto x\sin(y^2)$$

auf $\mathbb{R}^2$, und somit auf M, stetig ist, ist f integrierbar über M und es gilt

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_M f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x\sin(y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Da

$$x \in [-1,1] \land x^2 \le y \le 1 \iff y \in [0,1] \land -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}$$

gilt, dass $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \in [0,1], -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\}$, lassen sich die Integralgrenzen vertauschen:

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} x\sin(y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\sin(y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \sin(y^2)\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Aufgabe 3 (15 Punkte).

(1) Zeigen Sie, dass jede offene Kugel in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ *konvex* ist. (8P)
Hierbei heißt eine Teilmenge M eines Vektorraumes X **konvex**, falls gilt:

$$\forall x, z \in M, t \in [0,1]: \quad tx + (1-t)z \in M.$$

Seien $r > 0$ und $y \in X$. Betrachte die offene Kugel $B = B_r(y)$ und $x, z \in B$ sowie $t \in [0,1]$. Wir zeigen, dass $tx + (1-t)z \in B$ ist. Es folgt mit der Dreiecksungleichung, dass

$$\|(tx + (1-t)z) - y\| = \|(tx - ty + (1-t)z - (1-t)y\| \leq \|tx - ty\| + \|(1-t)z - (1-t)y\|.$$

Wegen der Homogenität der Norm ist die rechte Seite gleich $t\|x-y\| + (1-t)\|z-y\|$. Weil aber nach Voraussetzung x und z in B sind, gilt

$$t\|x-y\| + (1-t)\|z-y\| < tr + (1-t)r = r.$$

Somit ist auch $tx + (1-t)z \in B$.

(2) Gilt die entsprechende Aussage aus (1) auch allgemeiner für Vektorräume X (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), die mit einer Metrik d versehen sind? (3P)

Nein, man betrachte beispielsweise $X = \mathbb{R}^2$ mit der Paris-Metrik (bzgl. der d_2-Metrik). Dann ist die Kugel mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0)$ nicht konvex.

(3) Zeigen, Sie, dass für jeden normierten Raum $X \neq \{\mathbf{0}\}$ offene Mengen von X existieren, die nicht konvex sind. (3P)

Da X nicht-trivial ist, existiert ein Punkt $x \neq \mathbf{0}$. Sei $r = \|\mathbf{x}\|$. Und definiere die Menge

$$V = B_{\frac{r}{2}}(\mathbf{0}) \cup B_{\frac{r}{2}}(\mathbf{x}),$$

die als Vereinigung offener Mengen offen ist. Dann ist wegen $\|\frac{1}{2}\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \frac{r}{2} = \|\frac{1}{2}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|$, der Punkt $\frac{1}{2}\mathbf{x} \notin V$. Und somit ist V nicht konvex.

Aufgabe 4 (12 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = y\cos(x) + \mathrm{e}^{xy}$$

definiert von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_{f,2}$ an der Ansschlussstelle $(0, 0)$. Was lässt sich über den Fehler

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{h}) - T_{f,2}(\mathbf{h})$$

aussagen, wenn $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$? (6P)

Das Taylorpolynom kann mit der Formel aus der Vorlesung bzw. durch direktes Ablesen (durch die Potenzreihendarstellung von cos *und* e*) berechnet werden. Die partiellen Ableitungen von f sind*

$$D^{(1,0)}f(x, y) = -y\sin(x) + y\mathrm{e}^{xy}, \ D^{(0,1)}f(x, y) = \cos(x) + x\mathrm{e}^{xy}$$

und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$D^{(2,0)}f(x, y) = -y\cos(x)+y^2\mathrm{e}^{xy}, \ D^{(1,1)}f(x, y) = -\sin(x)+xy\mathrm{e}^{xy}+\mathrm{e}^{xy}, \ D^{(0,2)}f(x, y) = x^2\mathrm{e}^{xy}.$$

Deshalb ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$T_{f,2}(x, y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} D^{\alpha}f(0, 0)\frac{1}{\alpha!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = 1 + y + xy$$

Da f zweimal stetig differenzierbar ist gilt für den Fehler, dass

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0.$$

(2) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$y\cos(x) + \mathrm{e}^{xy} = 0$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, -1)$ lokal nach y auflösen lässt.
Berechnen Sie außerdem die Ableitung von y als Funktion von x an der Stelle $x = 0$.

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können überprüfen wir die Voraussetzungen:

- $f(x, y) = y\cos(x) + \mathrm{e}^{xy}$ *ist stetig differenzierbar auf* $\mathbb{R}^2$
- *die Jacobi-Matrix* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x) + x\mathrm{e}^{xy}$ *ist an der Stelle* $(x, y) = (0, -1)$ *gleich* 1*, also "invertierbar"*

Damit lässt sich $f(x, y) = 0$ lokal um $(x, y) = (0, -1)$ nach y auflösen,
d.h. dass ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Funktion

$$g : \underbrace{U}_{=\{x\in\mathbb{R}\,:\ \exists y\in\mathbb{R} \text{ mit } (x,y)\in B_\varepsilon((\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}))\}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

existieren so dass $\forall(x, y) \in B_\varepsilon((\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix})) \subset \mathbb{R}^2 : \qquad f(x, y) = 0 \iff y = y(x) = g(x).$

Die Ableitung von y nach x, also $\frac{\partial g}{\partial x}(x)$ lässt sich mit Hilfe von $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y\sin(x)+y\mathrm{e}^{xy}$ folgendermaßen berechnen:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = -(\frac{\partial f}{\partial y}(0, -1))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = 1$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix, d.h.

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0 \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(i) Zeigen Sie die folgende Version der Cauchy–Schwarz Ungleichung (4P)

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \qquad \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \leq (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{y}^T A\mathbf{y})^{\frac{1}{2}}, \tag{*}$$

indem Sie für festes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x}$$

unter der Nebenbedingung $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ maximieren.

(ii) Verwenden Sie Ungleichung (*) um zu zeigen, dass die Abbildung

$$|||\cdot||| : \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}^T A\mathbf{x})^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. (4P)

(iii) Begründen Sie, warum die Norm $|||\cdot|||$ äquivalent zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ ist. (2P)

(iv) Skizzieren Sie die abgeschlossene Einheitskugel $K_1(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Norm $|||\cdot|||$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(2P)}$$

<u>*Lösung:*</u>

(i) Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar mit Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = y^T A \in \mathbb{R}^{1\times n}$$

Für die Nebenbedingungsfunktion $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} - 1$ gilt

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^T A$$

Somit können wir die Lagrange-Multiplikatoren verwenden mit der Lagrange-Funktion

$$\Lambda(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}).$$

Nullsetzen der Jacobi-Matrix liefert

$$\mathbf{y}^T A + 2\lambda \mathbf{x}^T A = \mathbf{0} \quad \wedge \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$$

Da A invertierbar ist, ist dies äquivalent zu

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\lambda \mathbf{y} \quad \wedge \quad \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1.$$

Wodurch sich durch Einsetzen $\frac{\lambda^2}{4}\mathbf{y}^T A\mathbf{y} = 1$ und somit $\lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{\mathbf{y}^T A\mathbf{y}}}$ ergibt. Da die Nebenbedingung eine kompakte Menge definiert gibt es also (aufgrund der Stetigkeit von f) ein Maximum und ein Minimum: Wegen

$$f(-\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{y}) = -\tfrac{\lambda}{2}\mathbf{y}^T A\mathbf{y}$$

erhalten wir das Maximum $\sqrt{\mathbf{y}^T A\mathbf{y}}$ *und damit die Ungleichung*

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq \sqrt{\mathbf{y}^T A\mathbf{y}}$$

für alle $\mathbf{x}$ *mit* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$*. Für allgemeines* $\mathbf{x} \neq 0$ *betrachten wir* $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}}$*. Es gilt also* $\tilde{\mathbf{x}}^T A\tilde{\mathbf{x}} = 1$ *und damit*

$$\mathbf{y}^T A\mathbf{x} \leq \sqrt{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}^T A\mathbf{y}}.$$

(ii) Die Definitheit folgt aus der Definitheit der Matrix. Die Homogenität ist klar aus der Linearität der Matrix. Die Dreiecksungleichung folgt aus (*), weil für $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$*,*

$$|||\mathbf{x}-\mathbf{z}|||^2 = |||\mathbf{x}|||^2 + |||\mathbf{z}|||^2 - 2\mathbf{x}^T A\mathbf{z} \overset{(*)}{\leq} |||\mathbf{x}|||^2 + |||\mathbf{z}|||^2 + 2|||\mathbf{x}||| \cdot |||\mathbf{z}||| = (|||\mathbf{x}||| + |||\mathbf{z}|||)^2.$$

(iii) Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ *sind äquivalent.*

(iv) Die abgeschlossene Einheitskugel ist

$$K_1(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Die Kugel wird also von der Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ *umrandet.*

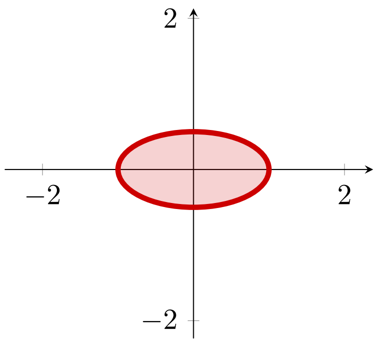

Abbildung 1: Die abgeschlossene Einheitskugel bzgl. $|||\cdot|||$.