Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Lösungsvorschläge Blatt 9

Die vorliegenden Notizen sind nicht korrekturgelesen. Bei Unklarheiten fragen Sie bitte in den Übungen bzw. Tutorium/Sprechstunde

Aufgabe 1. (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\int_{-3}^{7} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}\mathrm{d}x$ (*Hinweis: Substitution und Partialbruchzerlegung*)

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$ (*substituieren Sie geeignet und nutzen Sie Bsp. 2.38*)

Lösung: Für das erste Integrale substituiere man $\mathrm{e}^x = y$ und damit $h'(x) = \mathrm{e}^x$, weshalb es genügt eine Stammfunktion von $\frac{y^2-1}{(y+2)y} = \frac{y-2}{y} - \frac{3}{y(y+2)} = 1 - \frac{2}{y} + \frac{3}{y(y+2)}$ zu bestimmen. Partialbruchzerlegung liefert $\frac{3}{y(y+2)} = \frac{3}{2y} - \frac{3}{2(y+2)}$ und damit

$$\int_{-3}^{7} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}\ln(\mathrm{e}^x+2)\Big|_{-3}^{7}$$

Für das zweite Integral schreibt man $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1\right]$ und substituiert $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = y$. Dies liefert

$$\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_{0}^{4/\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}}{y^2+1}\frac{\sqrt{3}\mathrm{d}y}{2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{4/\sqrt{3}} \frac{2y}{y^2+1}\mathrm{d}y + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{4/\sqrt{3}} \frac{1}{y^2+1}\mathrm{d}y$$

und damit $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(y)\big|_{0}^{4/\sqrt{3}}$.

Aufgabe 2. (3 Punkte +1 Bonuspunkt) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ uneigentlich oder absolut uneigentlich integrierbar sind (begründen Sie). Geben Sie für (a) und (b) und (d) gegebenenfalls das (uneigentliche) Integral $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ an.

(a) $f(x) = \ln(x)$, $I = (0,1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = (-\infty,\infty)$

(c) $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}$, $I = [1,\infty)$

(d) (Bonus) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $I = [-1,1]$

Lösung:

(a) Da $\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$ berechnet man

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{1} \ln(x)\mathrm{d}x &= x(\ln(x)-1)\big|_{\varepsilon}^{1} \\ &= -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\ln(x)\mathrm{d}x = -1$ und somit ist ln auf $(0,1]$ uneigentlich integrierbar (sogar absolut weil $\ln(x) \leq 0$).

(b) Wir überprüfen auf uneigentliche Integrierbarkeit an $-\infty$ und $+\infty$ indem wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

betrachten. Da $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

folgt

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{b\to-\infty}(-\arctan(b)) + \lim_{b\to\infty}(\arctan(b))\\ &= \pi\end{aligned}$$

Da $f \geq 0$ ist f absolut uneigentlich integrierbar und damit auch uneigentlich integrierbar.

(c) $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}$, $I = [1,\infty)$
Da $|f(x)| = x^{-1}$ folgt aus $\int_1^b x^{-1}\mathrm{d}x = \ln(b)$, dass f nicht absolut uneigentlich integrierbar ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x &= (-1)^n \ln(x)|_n^{n+1}\\ &= (-1)^n\left[\ln(n+1)-\ln(n)\right]\\ &= (-1)^n a_n\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass $(a_n)_n$ monoton fallend ist, woraus mit Hilfe des Leibniz Kriteriums folgt, dass $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ konvergiert. Da

$$\left|\int_{\lfloor b\rfloor}^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\lfloor b\rfloor}^b x^{-1}\mathrm{d}x \leq \lfloor b\rfloor^{-1} \overset{b\to\infty}{\to} 0,$$

erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}\int_1^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\lfloor b\rfloor}(-1)^n a_n + \int_{\lfloor b\rfloor}^b f(x)\mathrm{d}x\\ &\overset{b\to\infty}{\to} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n.\end{aligned}$$

(d) (Bonus) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $I = [-1,1]$
In dieser ursprünglichen Form ist das Integral auf keinem Teilintervall von I wohldefiniert (da f nicht als reellwertige Funktion wohldefiniert ist) und somit auch nicht uneigentlich integrierbar.
Wenn wir stattdessen das Intervall $[1,\infty)$ betrachten, so erhält man mit Hilfe der Substitution $x = \cosh(y)$ das unbestimmte Integral

$$\int f = \operatorname{arcosh} + C,$$

für das Intervall $[1,\infty)$, wobei man weiter zeigen kann (einsetzen!), dass

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Das heißt, wir müssen auf uneigentliche Integrierbarkeit an 1 bzw. ∞ untersuchen: Betrachte hierzu

$$\lim_{x\to1}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = 0$$

bzw.

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \infty.$$

Also ist auch in diesem Fall f nicht uneigentlich integrierbar (analog verläuft die Betrachtung für $I = (-\infty,-1]$).

Aufgabe 3. (2 Punkte) Zeigen Sie die Taylorentwicklung der arctan Funktion

$$\arctan x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \qquad |x|<1,$$

indem Sie $1/(1+x^2)$ als geometrische Reihe schreiben und integrieren. Warum ist gliedweise Integration erlaubt? (*Hinweis: Konvergenz von Potenzreihen, Analysis I*)

Lösung: Wir wissen, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (in Übung bitte noch einmal vorrechnen, falls gewünscht). Letztere Funktion lässt sich für $|x|<1$ darstellen als

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}.$$

Betrachten wir nun die (gliedweise integrierte) Potenzreihe $g(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, so sieht man, dass wegen

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}(2n+1)^{\frac{-1}{2n+1}} = 1,$$

dass der Konvergenzradius von g gleich 1 ist. Somit folgt mit Korollar 2.45 aus der Vorlesung, dass $g'(x) = \arctan'(x)$ für alle $|x| < 1$. Da aber auch $g(0) = 0 = \arctan(0)$, müssen die beiden Stammfunktionen g und arctan an x mit $|x| < 1$ übereinstimmen.
Bemerkung: Mit der Version des Hauptsatzes für komplex-wertige Funktionen lässt sich Satz 2.44 und somit Kor. 2.45 auch auf komplex-wertige Funktionen f erweitern. Mit derselben Argumentation wie oben (mit $(-1,1)$ ersetzt durch $B_1(0) \subset \mathbb{C}$), erhält man die Aussage für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$.

Aufgabe 4. (**2 Punkte + 1 Bonuspunkt**) Sei $f : [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ [1].
(Bonus) Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist.

Lösung: Für festes x bzw. y sind die Funktionen $y \mapsto f(x,y)$ bzw. $x \mapsto f(x,y)$ beschränkt und jeweils auf $(0,1]$ bzw. $(0,2]$ stetig (sogar beliebig oft differenzierbar). Somit sind diese Funktionen auch auf $[0,1]$ bzw. $[0,2]$ integrierbar. Wir berechnen nun die beiden inneren Integrale. Dazu geben wir erst die beiden unbestimmten Integrale an. Sei $x \in (0,2]$ fest und $y \in (0,2)$.

$$\begin{aligned} \int \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}y &= \left| \begin{array}{c} u = h(y) = x^2+y^2 \\ du = h'(y)dy = 2ydy \end{array} \right| \\ &= \int \frac{x(2x^2-u)}{2u^3}\mathrm{d}u = -\frac{x^3}{2u^2} + \frac{x}{2u} = -\frac{x^3}{2(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{2(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x &= \left| \begin{array}{c} u = h(x) = x^2+y^2 \\ du = h'(x)dx = 2xdx \end{array} \right| \\ &= \int \frac{y(u-2y^2)}{2u^3}\mathrm{d}u = -\frac{y}{2u} + \frac{y^3}{2u^2} = -\frac{y}{2(x^2+y^2)} + \frac{y^3}{2(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Sei $b \in [0,1)$ und $a \in [0,2)$ und definiere (die Parameter a, b führen wir hier nur ein, weil dies für Aufgabe 5 hilfreich ist — für Aufg 4 genügt $a = b = 0$)

$$\begin{aligned} f_x^b = \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y &= -\frac{x^3}{2(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{2(x^2+y^2)}\Bigg|_{y=b}^{y=1} \\ &= \frac{xy^2}{2(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{y=b}^{y=1} = \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{xb^2}{2(x^2+b^2)^2}, \end{aligned}$$

woraus $f_x := f_x^0 = \frac{x}{2(x^2+1)^2}$ folgt. Offensichtlich ist außerdem $f_0^b = \int_b^1 f(0,y)\mathrm{d}y = 0$. Genauso,

$$\begin{aligned} f_y^a = \int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x &= -\frac{y}{2(x^2+y^2)} + \frac{y^3}{2(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{x=a}^{x=2} \\ &= -\frac{x^2y}{2(x^2+y^2)^2}\Bigg|_{x=a}^{x=2} = -\frac{2y}{(4+y^2)^2} + \frac{ya^2}{2(a^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

[1] Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Berechnen Sie $f_y = \int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x$ für jedes $y \in [0,1]$ und $f_x = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ für jedes $x \in [0,2]$ und zeigen Sie, dass $y \mapsto f_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $x \mapsto f_x : [0,2] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind mit

$$\int_0^1 f_y\mathrm{d}y \neq \int_0^2 f_x\mathrm{d}x.$$

woraus $f_y := f_y^b = -\frac{2y}{(4+y^2)^2}$ folgt. Außerdem gilt $f_y^a = \int_a^1 f(x,0)\mathrm{d}x = 0$. Die Funktionen $x \mapsto f_x^b$, $y \mapsto f_y^a$ sind integrierbar für alle a, b (weil stetig). Wir berechnen nun (mit Hilfe der bereits bekannten Stammfunktionen aus Beispiel 2.38 bzw. durch "Erraten der Stammfunktion),

$$\int_a^2 \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^2 f_x^b \mathrm{d}x = -\frac{1}{4(1+x^2)} + \frac{b^2}{4(x^2+b^2)}\bigg|_a^2 = -\tfrac{1}{20} + \tfrac{b^2}{4(4+b^2)} + \tfrac{1}{4(1+a^2)} - \tfrac{b^2}{4(a^2+b^2)}$$

$$\int_b^1 \int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_b^1 f_y^a \mathrm{d}y = \frac{1}{(4+y^2)} - \frac{a^2}{4(a^2+y^2)}\bigg|_b^1 = \tfrac{1}{5} - \tfrac{a^2}{4(a^2+1)} - \tfrac{1}{(4+b^2)} + \tfrac{a^2}{4(a^2+b^2)}$$

Für $a = b = 0$ ergibt dies

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{4} = \frac{4}{20} \neq -\frac{1}{20} = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4} = \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Man rechnet aber leicht nach, dass für $a, b > 0$: $\int_a^2 \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_b^1 \int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Der Satz von Fubini (bzw. das Korollar für stetige Funktionen) besagt, dass die iterierten Integrale mit dem Integral $\int_{[0,2]\times[0,1]} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ übereinstimmen, wenn f auf $[0,2] \times [0,1]$ stetig wäre. Deshalb folgt, dass f nicht stetig sein kann. Alternativ kann man mit der Folge $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{2}{n}$ einsehen, dass f an $(0,0)$ nicht stetig ist.

Aufgabe 5. Ist die Funktion in Aufgabe 4 über $[0,2] \times [0,1]$ integrierbar? *Zusatz:* Berechnen Sie das Integral der Funktion f über den Mengen $M_{a,b} = [a,2] \times [b,1]$ für $a \in (0,2)$ und $b \in (0,1)$ und bestimmen Sie

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \int_{M_{a,b}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

Lösung: Nein, da die Funktion unbeschränkt ist. Um dies zu sehen setze man $x = \frac{2}{n}$ und $y = \frac{1}{n}$. Man könnte nun daran denken, ähnlich wie im Fall von Funktionen mit einer Veränderlichen, den Begriff des uneigentlichen Integrals einzuführen — dies ist die Idee der Zusatzaufgabe. Mit Hilfe von Fubini (bzw. das Korollar für stetige Funktionen angewandt auf $f|_{M_{a,b}} : M_{a,b} \to \mathbb{R}$) und der bereits gemachten Rechnung in Aufgabe 4 bestimmt man die Integrale (f auf den betrachteten Mengen stetig ist, ist Fubini anwendbar).

$$\int_{M_{a,b}} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_a^2 \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{20} + \tfrac{b^2}{4(4+b^2)} + \tfrac{1}{4(1+a^2)} - \tfrac{b^2}{4(a^2+b^2)}$$

Der Grenzwert $(a,b) \to (0,0)$ existiert aber nicht, weil zwar die ersten drei Terme auf der rechten Seite gegen 0 konvergieren, aber $\lim_{(a,b)\to(0,0)} \frac{b^2}{4(a^2+b^2)}$ nicht existiert — man wähle einerseits $a = 0$ und $b = \frac{1}{n}$ und andererseits $a = b = \frac{1}{n}$.

Aufgabe 6. Ziel der Aufgabe ist es für $t \geq 0$ folgendes Integral zu berechnen

$$G(t) := \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln(x)}\mathrm{d}x.$$

Sei dazu $0 < a < b < 1$ und bestimmen Sie das Integral $F(t) := \int_a^b \frac{x^t-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$ indem Sie erst F' bestimmen und dann eine Stammfunktion berechnen. Bestimmen Sie nun $F(t)$. Warum ist die Vorgehensweise mittels a, b notwendig?

Lösung: Wir stellen zuerst fest, dass für festes t, das Integral $G(t)$ nur als uneigentliches Integral existieren kann, da der Integrand $f(x,t) = \frac{x^t-1}{\ln(x)} = \frac{\mathrm{e}^{t\ln(x)}-1}{\ln(x)}$ unbeschränkt ist für $x \to 1$ und ln nicht definiert an $x = 0$. Allerdings lässt sich die Funktion an $x = 0$ durch 0 stetig fortsetzen. Wegen $1 + y \leq \mathrm{e}^y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $1 - \mathrm{e}^{-y} \leq y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und somit $\frac{\mathrm{e}^{t\ln(x)}-1}{\ln(x)} \leq 1$ für alle

$x \in (0,1)$ und $t \geq 0$. Nach Lemma 2.43 bzw. Aufgabe 3, Blatt 8, folgt, dass $G(t)$ für jedes $t \geq 0$ als absolut uneigentliches Integral existiert. Insbesondere gilt also für beliebiges $c \in (0,1)$, dass

$$G(t) = \lim_{a \to 0^+} \int_a^c f(x,t)\mathrm{d}x + \lim_{b \to 1^-} \int_c^b f(x,t)\mathrm{d}x = \lim_{a \to 0^+} F_{a,c}(t) + \lim_{b \to 1^-} F_{c,b}(t) \tag{1}$$

mit der Funktion $F = F_{a,b}$ aus dem Hinweis. Wir berechnen nun den Wert des Integrals. Sei $R > 0$ beliebig. Dann ist f stetig auf $[a,b] \times [0,R]$ und $f(x,\cdot)$ differenzierbar für jedes feste $x \in [a,b]$. Weiters ist $(x,t) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t) = \mathrm{e}^{t\ln(x)}$ eine stetige Funktion auf $[a,b] \times [0,R]$ (als Verknüpfung stetiger Funktionen). Deshalb folgt mit Satz 2.46, die Integration und die Differentiation vertauscht werden darf:

$$\begin{aligned} F'_{a,b}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{t\ln(x)}\mathrm{d}x \\ &= \left| \begin{array}{l} u = h(x) = \ln(x) \\ du = h'(x)dx = \frac{dx}{x} \end{array} \right| = \int_{h(a)}^{h(b)} \mathrm{e}^{(t+1)u}\mathrm{d}u = \frac{1}{t+1}(\mathrm{e}^{(t+1)\ln(b)} - \mathrm{e}^{(t+1)\ln(a)}) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt, dass $F'_{a,b}$ stetig auf $[0,R]$ ist und somit nach dem Hauptsatz (bzw. Kor.2.33)

$$F_{a,b}(t) = \int_0^t F'_{a,b}(s)\mathrm{d}s + F_{a,b}(0) = \int_0^t \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{(s+1)\ln(b)} - \mathrm{e}^{(s+1)\ln(a)}}{s+1}}_{=:h_{a,b}(s)} \mathrm{d}s + 0$$

für alle $t \in [0,R]$. Wir berechnen nun $\lim_{a \to 0^+} F_{a,c}(t) + \lim_{b \to 1^-} F_{c,b}(t)$ für festes $c \in (0,1)$. Angenommen, wir dürften Integration und Grenzwertbildung vertauschen, dann erhalten wir:

$$\lim_{a \to 0^+} F_{a,c}(t) + \lim_{b \to 1^-} F_{c,b}(t) = \int_0^t \lim_{a \to 0^+} h_{a,c}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \lim_{b \to 1^-} h_{c,b}(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{1}{s+1}\mathrm{d}s = \ln(t+1)$$

Um die Vertauschbarkeit von Grenzertbildung und Integration zu begründen betrachten wir Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in (0,1) mit $b_n \to 1$ und $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

$$\left| \frac{\mathrm{e}^{(s+1)\ln(b_n)} - 1}{s+1} \right| \leq |\ln(b_n)| \quad \forall s \in [0,R],$$

folgt, dass die Funktionenfolge $(h_{c,b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,R]$ gleichmäßig gegen $h_{c,1}(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{(s+1)\ln(c)}}{s+1}$ konvergiert. Genauso sieht man, dass $h_{a_n,c}$ gleichmäßig gegen $h_{0,c}(s) = \frac{\mathrm{e}^{(s+1)\ln(c)}}{s+1}$ konvergiert. Somit haben wir wegen (1) gezeigt, dass für jedes $t \geq 0$, $G(t) = \ln(t+1)$.

Aufgabe 7. Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integration mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz von Fubini.

$$\int_0^3 \left(\int_0^x f(x,y)\,dy \right) dx, \qquad \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy, \qquad \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Lösung: Nach der Folgerung des Satzes von Fubini gilt folgendes: Für stetige Funktionen $\phi_1, \phi_2 : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein kompaktes Intervall ist und $\phi_1 \leq \phi_2$, ist die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in I, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

eine messbare Menge und falls

- $f : M \to \mathbb{R}$ sowie

- $f(x,\cdot) : [\phi_1(x), \phi_2(x)] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in I$,

integrierbar sind, dass $\int_M f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_I \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$. Analog gilt die Aussage, wenn wir die Rollen von x und y vertauschen.
Beim ersten Integral setze $\phi_2(x) = x$ und $\phi_1(x) = 0$ für alle $x \in [0,3]$. Wir können aber die Menge aller Paare (x,y) mit

$$x \in [0,3] \quad \wedge \quad 0 \le y \le x = \phi_2(x)$$

auch auffassen als die Paare, für die $y \le x \le 3$ und $y \in [0,3]$ gilt. Wenn f, $f(x,\cdot)$ und $f(y,\cdot)$ integrierbar sind für alle $x,y \in [0,3]$ so gilt demnach

$$\int_0^3 \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^3 \int_y^3 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Beim zweiten Integral betrachte die Menge der Punkte (x,y) mit $\psi_1(y) = y^2 \le x \le 2y = \psi_2(y)$ und $y \in [0,2]$. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x} \quad \wedge \quad x \in [\psi_1(0), \psi_2(2)] = [0,4]$$

und damit, falls f, $f(x,\cdot)$ und $f(\cdot,y)$ integrierbar sind,

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Genaus sieht man für das dritte Integral, dass

$$\{(x,y) \colon 0 \le y \le 1 - x^2 \ \wedge \ x \in [-1,1]\} = \{(x,y) \colon y \in [0,1] \wedge -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $C([a,b])$ der Vektorraum der Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite jeweils gleich 1 sind und nutzen Sie die Ungleichung $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Argumentieren Sie, warum es genügt diesen Fall zu zeigen.

<u>*Lösung:*</u> Dies ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung für Integrale. Aus der Monotonie des Integrals folgt mit der Annahme und der erwähnten Ungleichung, dass

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Falls $\left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$ und $\left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$ nicht gleich 1 sind, aber beide verschieden von 0, so können wir die zu zeigende Ungleichung durch diese Zahlen dividieren. Aufgrund der Linearität des Integrals erhalten wir

$$\int_a^b \left| \frac{f(x)}{\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x} \frac{g(x)}{\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x} \right| \mathrm{d}x \le 1.$$

Da $\int_a^b |\frac{f(x)}{\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x}| \mathrm{d}x = 1$ und analog für g (nochmal Linearität) folgt die Behauptung aus dem ersten Schritt. Wenn eines der Integrale auf der rechten Seite gleich 0 ist, so muss aufgrund der Stetigkeit und Aufgabe 1)d), Blatt 8, die Funktion f bzw. g selbst gleich 0 sein, womit auch die linke Seite gleich 0 sein muss.

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\|\cdot\| : C([a,b]) \to [0,\infty), f \mapsto \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert (Hinweis, Aufgabe 1)d), Blatt 8 und Aufgabe 7 von Blatt 9). Zeigen Sie, dass der $C([a,b])$ versehen mit dieser Norm nicht vollständig ist (betrachten sie hierzu die Folge $f_n(x) = x^n$).

Lösung: Die Definitheit der Norm folgt aus Aufgabe 1)d) von Blatt 8: Falls nämlich $\|f\| = 0$, so folgt auch dass $\int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x = 0$ und aus der Stetigkeit von f somit $f = 0$ (dies ist i.A. nicht wahr, wenn f nicht stetig ist!). Die Homogenität der Norm folgt direkt aus der Linearität des Integrals. Um die Dreiecksungleichung zu sehen, seien $f, g \in C([a,b])$ und betrachte (der Beweis ist ähnlich wie der Beweis der Minkowski'schen Ungleichung für $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^p$).

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_2^2 \le \int_a^b |f(x)+g(x)|^2 \mathrm{d}x &\le \int_a^b |f(x)+g(x)||f(x)| \mathrm{d}x + \int_a^b |f(x)+g(x)||g(x)| \mathrm{d}x \\
&\le \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Ungleichung aus der vorherigen Aufgabe verwendet haben. Daraus folgt direkt die Aussage.
Sei $\|\cdot\|_{2,[a,b]}$ die Norm auf $[a,b]$. Um zu sehen, dass $C([a,b])$ mit dieser Norm nicht vollständig ist nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $a = 0$ und $b = 2$. Sei $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1)$ und $f_n(x) = 1$ für $x \in [1,2]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist leicht zu sehen, dass $f_n|_{[0,1]}$ bezüglich $\|\cdot\|_{2,[0,1]}$ gegen die Nullfunktion auf $[0,1]$ konvergiert und — noch leichter — dass $f_n|_{[1,2]}$ gegen die konstante 1-Funktion auf $[1,2]$. Da $\|f|_{[0,1]}\|_{2,[0,1]}^2 + \|f|_{[1,2]}\|_{2,[1,2]}^2 = \|f\|_{2,[0,2]}^2$, ist auch $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_{2,[0,2]}$ und aufgrund der Eindeutigkeit von Grenzwerten ist $f(x) = 0$ für $x \in [0,1)$ und $f(x) = 1$ für $x \in [1,2]$ der einzig mögliche Grenzwert. Da f nicht stetig ist auf $[0,2]$ folgt, dass der Raum nicht vollständig sein kann.