Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 9

Korrektur: Es sind die Aufgaben 1–**4** bis Freitag, 7.12. abzugeben. Man beachte den korrigierten Tippfehler in Aufgabe 2(b). In Aufgabe 9 war ein Tippfehler in der Norm.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Integrale.

(a) $\int_{-3}^{7} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}\mathrm{d}x$ (*Hinweis: Substitution und Partialbruchzerlegung*)

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$ (*substituieren Sie geeignet und nutzen Sie Bsp. 2.38*)

Aufgabe 2. (3 Punkte +1 Bonuspunkt) Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ uneigentlich oder absolut uneigentlich integrierbar sind (begründen Sie). Geben Sie für (a) und (b) und (d) gegebenenfalls das (uneigentliche) Integral $\int_I f(x)\mathrm{d}x$ an.

(a) $f(x) = \ln(x)$, $I = (0, 1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = (-\infty, \infty)$

(c) $f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{x}$, $I = [1, \infty)$

(d) (Bonus) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $I = [-1, 1]$

Aufgabe 3. (2 Punkte) Zeigen Sie die Taylorentwicklung der arctan Funktion

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad |x| < 1,$$

indem Sie $1/(1 + x^2)$ als geometrische Reihe schreiben und integrieren. Warum ist gliedweise Integration erlaubt? (*Hinweis: Konvergenz von Potenzreihen, Analysis I*)

Aufgabe 4. (**2 Punkte + 1 Bonuspunkt**) Sei $f : [0, 2] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\int_0^2 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \int_0^2 f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ [1].
(Bonus) Zeigen Sie, dass f nicht stetig ist.

Wichtige Hinweise: Abgabe von Aufgaben 1–4 des Blattes bis
Freitag, 7.12.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

[1] Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Berechnen Sie $f_y = \int_0^2 f(x, y)\mathrm{d}x$ für jedes $y \in [0, 1]$ und $f_x = \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y$ für jedes $x \in [0, 2]$ und zeigen Sie, dass $y \mapsto f_y : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und $x \mapsto f_x : [0, 2] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind mit

$$\int_0^1 f_y \mathrm{d}y \neq \int_0^2 f_x \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5. Ist die Funktion in Aufgabe 4 über $[0,2] \times [0,1]$ integrierbar? *Zusatz:* Berechnen Sie das Integral der Funktion f über den Mengen $M_{a,b} = [a,2] \times [b,1]$ für $a \in (0,2)$ und $b \in (0,1)$ und bestimmen Sie

$$\lim_{(a,b)\to(0,0)} \int_{M_{a,b}} f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

Aufgabe 6. Ziel der Aufgabe ist es für $t \geq 0$ folgendes Integral zu berechnen

$$G(t) := \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

Sei dazu $0 < a < b < 1$ und bestimmen Sie das Integral $F(t) := \int_a^b \frac{x^t-1}{\ln(x)}\mathrm{d}x$ indem Sie erst F' bestimmen und dann eine Stammfunktion berechnen. Bestimmen Sie nun $F(t)$. Warum ist die Vorgehensweise mittels a, b notwendig?

Aufgabe 7. Vertauschen Sie die Reihenfolge der Integration mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz von Fubini.

$$\int_0^3 \left(\int_0^x f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx \right) dy, \qquad \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Aufgabe 8. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $C([a,b])$ der Vektorraum der Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die beiden Integrale auf der rechten Seite jeweils gleich 1 *sind und nutzen Sie die Ungleichung* $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$*. Argumentieren Sie, warum es genügt diesen Fall zu zeigen.*

Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\| \cdot \| : C([a,b]) \to [0,\infty), f \mapsto \left(\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

eine Norm auf $C([a,b])$ definiert (Hinweis, Aufgabe 1)d), Blatt 8 und Aufgabe 7 von Blatt 9). Zeigen Sie, dass der $C([a,b])$ versehen mit dieser Norm nicht vollständig ist (betrachten sie hierzu die Folge $f_n(x) = x^n$).