Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 8

Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall[1] mit $I^\circ \neq 0$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f falls F auf I differenzierbar[2] ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 1. (3 Punkte + 2 Bonuspunkte) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, Satz 2.29, dass folgende Aussagen gelten.

(a) **(1.P)** Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F.

(b) **(1P.)** Für zwei Stammfunktionen F, G von $f : I \to \mathbb{R}$ existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $F = G + c$.
Hinweis: Nutzen Sie ihr Wissen über Differentialrechnung aus der Analysis I.

(c) **(1P.)** Für jede Stammfunktion F einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).} \tag{1}$$

(d) **(2P. Bonus)** Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ stetig und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Geben Sie eine unstetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ an mit $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 2. (7 Punkte + 4 Bonuspunkte) Nutzen Sie im Folgenden die Aussage aus Aufgabe 1)c) und insbesondere Gleichung (1).

(a) **(4P.)** Berechnen Sie durch "Erraten einer Stammfunktion"

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x, \quad \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\cos(\log r)}{r}\mathrm{d}r$$

Tipp für das zweite Integral: Erinnern Sie sich $\frac{d}{dx}\tan(x)$ *und erweitern Sie den Bruch.*

(b) **(3P.)** Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(x) = 2x\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} + \mathrm{e}^{-x}\sin(\mathrm{e}^x) + \sqrt{\mathrm{e}}\sin(x)\cos(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cos^2(x)} - \cos(\mathrm{e}^x)$$

auf $\mathbb{R}$ und $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(c) **(4P. Bonus)** Berechnen Sie

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t, \quad \int_0^2 \sqrt[3]{(u+2)^2}\,\mathrm{d}u\ , \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin(nx)\mathrm{d}x \ \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Substitutionsregel bzw. partielle Integration, siehe auch Vorlesung 28.11.18.

Wichtige Hinweise: Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis **Freitag, 30.11.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite. Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

[1] es sind an dieser Stelle auch unbeschränkte, offene, halb-offene und abgeschlossene Intervalle zugelassen.
[2] gegebenenfalls einseitig-differenzierbar an den Intervallgrenzen, falls diese in I liegen

Aufgabe 3. Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ so dass $f|_{[a,x]}, g|_{[a,x]}, |f|_{[a,x]}|$ und $|g|_{[a,x]}|$ integrierbar sind für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie folgende Aussage.

- Falls g absolut uneigentlich integrierbar ist, so ist g uneigentlich integrierbar
- Falls g absolut uneigentlich integrierbar und $c > 0$ existiert mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in [c, b)$, dann ist auch f absolut integrierbar.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die Integrale

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) \mathrm{d}x$$

auf (absolute) uneigentliche Integrierbarkeit.

Aufgabe 5. (1) Berechnen Sie die Fläche eines Kreises mit Radius $r > 0$ mit Hilfe eines Riemannintegrals.

(2) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x+1}{x^4 - x} \mathrm{d}x, \int_1^5 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \mathrm{d}x, \int_{-1}^0 \frac{x+4}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

(3) Zeigen Sie mit Hilfe der Integralrechnung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{N^{-k-1}} \sum_{n=1}^{N} n^k = \frac{1}{k+1}$$

Aufgabe 6. Geben Sie eine Folge von Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ an so dass für alle $x \in [0, 1]$ $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ aber $\int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x$ nicht gegen $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x$ konvergiert.

Bonusaufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$ und $f(0) = 1$. Zeigen Sie — indem Sie die Stammfunktionen von $\frac{f'}{f} : I \to \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Intervall I bestimmen — dass $f(x) = \mathrm{e}^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.