Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 7

Korrektur, 21.11.: Es wird auf folgende **Korrektur** *in Aufgabe 1)b) bzw. c) hingewiesen:*

$$\max\{\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor\}\sin\left(\frac{1}{(1+\max\{\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor\})^2}\right)\qquad\text{sollte durch}\qquad\sin\left(\frac{1}{(1+\max\{\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor\})^2}\right)$$

ersetzt werden (sonst bekommen Sie bei Aufgabenteil c) Probleme). Dies ist in dieser Version des Blattes bereits korrigiert. Falls Sie Teil b) mit der ursprünglichen Angabe gelöst haben, so erhalten Sie dafür auch die vollen Punkte.

Aufgabe 1. (6 Punkte)

(a) **(2P.)** Geben Sie eine zerlegbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ an, so dass $|f|$ integrierbar, aber f nicht integrierbar ist.

(b) **(3P.)** Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{(1+\max\{\lfloor x\rfloor,\lfloor y\rfloor\})^2}\right), \qquad x,y \in [0,\infty).$$

Hier ist $\lfloor\cdot\rfloor$ die Abrundungsfunktion/Gaußklammer [1]. Zeigen Sie, dass f auf jedem kompakten Quader $[a,b]\times[c,d] \subset [0,\infty)$ integrierbar ist [2] und dass

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]\times[0,n]} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \infty.$$

Hinweis: Denken Sie daran wie sich $\sin(x)$ *"nahe $x = 0$" verhält.*

(c) **(1P.)** Modifizieren Sie f aus (b) so, dass der Betrag der Funktion derselbe bleibt, aber so dass $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]\times[0,n]} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Sei X ein metrischer Raum.

(a) **(2P.)** Zeigen Sie, dass für zwei Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt, dass

$$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ.$$

(b) **(2P.)** Geben Sie ein Beispiel für X und $A, B \subseteq X$ an so dass

$$(A\cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ.$$

Wichtige Hinweise:

- Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis **Freitag, 23.11.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. **Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite**. Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter

`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

[1] für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x\rfloor = n$ wobei $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \in [n, n+1)$.
[2] wobei wir wie immer für Quader annehmen, dass $a < b$ und $c < d$ ist.

Bonusaufgabe 1 (6 P.). (a) (2P.) Zeigen Sie, dass $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\lfloor\frac{c}{\varepsilon}\rfloor = c$ für alle $c > 0$.

(b) (2P.) Zeigen Sie, dass $\lfloor\frac{b-a}{\varepsilon}\rfloor - 1 \leq |[a,b] \cap \varepsilon\mathbb{Z}| \leq \lfloor\frac{b-a}{\varepsilon}\rfloor + 1$, für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ [3]

(c) (2P.) Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}(Q) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^p |Q \cap \varepsilon\mathbb{Z}^p|$ für jeden Quader $Q = Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

Hinweis: Nutzen Sie (a) und (b). Überlegen Sie sich unter Umständen erst den Fall $p = 1$.

Damit haben Sie Formel gezeigt, die im Beweis von Proposition 2.7 verwendet wurde.

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x, \int_1^4 \frac{\log(x)}{x}\mathrm{d}x, \int_0^y \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x, \int\limits_0^{\pi/2} \cos x \sin x e^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

die Aufgaben lassen sich durch "Erraten der Stammfunktion, Def. siehe Blatt 7, lösen. Sie können auch bereits partielle Integration bzw. Substitution verwenden.

Aufgabe 4. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die **Thomaesche**-Funktion,

$$f_T : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \text{ wobei } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

integrierbar ist — im Gegensatz zur Dirichletfunktion (Beispiel 2.12).

(a) Sei $x \in [0, \infty)$ und $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, wobei $p_n, q_n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{p_n}{q_n} \neq x \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $f_T \in \overline{\mathrm{T}([0,1])}$ [4] und somit integrierbar ist. Nutzen Sie hierfür die Charakterisierung von $\mathrm{T}([0,1])$ mittels einseitiger Grenzwerte, Prop. 2.19 und (a).

Hinweis: $\lim_{t\to x} f(t) = y \iff$ *für jede Folge* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $[0,1] \setminus \{x\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} t_n = x$ *gilt, dass* $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = y$.

(c) Bestimmen Sie die Punkte an denen f_T stetig bzw. unstetig ist.

(d) Zeigen Sie $\int_0^1 f_T(x)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass folgende Mengen messbar bzw. nicht messbar in $\mathbb{R}$ sind.

(a) $M = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

(b) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Bonusaufgabe 2. Zeigen Sie folgende Aussage. Sei $M \subset \mathbb{R}^p$ eine messbare Menge. Dann gilt für jeden jeden Quader $Q \supseteq M$, dass $1_M : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

[3] hier ist $\varepsilon\mathbb{Z}^p = \{\varepsilon\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^p\}$ das ε-Gitter in $\mathbb{R}^p$.

[4] also ist f_T der Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.)