Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (5 Punkte) Untersuchen Sie folgende Abbildung auf Stetigkeit

$$G : C^1([0,1]) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f,y) \mapsto \begin{cases} \frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)y^3}{\left[f'\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 + y^2} & (f'\left(\frac{1}{2}\right), y) \neq (0,0) \\ 0 & (f'\left(\frac{1}{2}\right), y) = (0,0) \end{cases},$$

wobei $C^1([0,1]) \times \mathbb{R}$ mit der Summen-Norm

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ y_2 \end{pmatrix} \right\| = \|f-g\|_{C^1([0,1])} + |y_1 - y_2|$$

versehen ist (hier ist $C^1([0,1])$ der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$, siehe Blatt 4, Aufgabe 4), **versehen mit der Norm** $\|f\|_{C^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$
Hinweis: Schreiben Sie G als Komposition $G(f,y) = R(T(f), y)$ mit $T(f) = f'(\frac{1}{2})$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X mit einer konvergenten Teilfolge. Zeigen Sie, dass auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergiert,
d.h. Sie zeigen damit insbesondere die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) X ist ein Banachraum

(2) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ gilt, dass ein $x \in X$ existiert mit $\sum_{n=1}^N x_n \to x$ für $N \to \infty$.

Für die Richtung (2) $\implies$ (1) betrachten Sie eine geeignete Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer gegebenen Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < 2^{-k}$$

(begründen Sie warum es so ein Teilfolge gibt. Schließen Sie dann mit (2), dass die Folge $\left(\sum_{n=1}^N y_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ konvergiert. Benutzen Sie dies zusammen mit (a), um die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen.

Wichtige Hinweise:

- Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis **Freitag, 16.11.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. **Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite**. Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter

`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

Achtung: Falls Sie eine der folgenden Präsenzaufgaben in den Übungen korrekt vorrechnen, bekommen Sie pro Aufgabe 5 Bonuspunkte auf Ihre Übungsblattpunkte gutgeschrieben. Für die Zusatzaufgaben können Sie bis zu 10 Punkte gutgeschrieben bekommen.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass folgende Mengen $B \subset \mathbb{R}^p$ **nicht** zerlegbar sind.

(a) $p = 1$, $B = \mathbb{Q}$

(b) $p = 1$, $B = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$

(c) $p = 2$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ bzw. B ein beliebiges abgeschlossenes Dreieck in $\mathbb{R}^2$.

(d) $p = 2$, $B = K_r(\mathbf{0}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

Hinweis: (c) und (d) betrachten Sie einen Punkt auf dem Rand.

Aufgabe 4. In der Vorlesung haben wir bisher nur Integrale über zerlegbare Mengen betrachtet. Um auch beispielsweise das Integral über einen Kreis zu berechnen, führen wir folgenden Begriff ein: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt **messbar**, falls es einen abgeschlossenen Quader Q gibt, mit

$$M \subseteq Q \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \in Q \setminus M \end{cases} \quad \text{ist integrierbar über } Q.$$

Zeigen Sie, dass das Dreieck aus Aufgabe 3) messbar ist und argumentieren Sie, warum die Mengen aus Aufgabe 3) (a) und (b) nicht messbar sind.

Hinweis: Um die Integrierbarkeit der Funktion f zu zeigen konstruieren Sie eine Folge von Treppenfunktionen h_n und g_n mit $g_n \leq f \leq h_n$ auf Q. Hierfür eignet sich im Beispiel des Dreiecks für h_n folgende Zerlegung von $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

$$Z_n = \{[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}] \times [0, 1 - \tfrac{k}{n}] \colon k = 0, ..., n-1\} \cup \{[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}] \times [1 - \tfrac{k}{n}, 1] \colon k = 0, ..., n-1\}$$

und $h_n|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times [0, 1-\frac{k}{n}]} = 1$, $h_n|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}] \times (1-\frac{k}{n}, 1]} = 0$, $k = 0, .., n-1$. Definieren Sie entsprechend g_n und zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \int_Q h_n(x) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_Q g_n(x) \mathrm{d}x$.

Aufgabe 5. Sei B zerlegbar und $f, g : B \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (man beachte die Analogie zu den Aussagen für Treppenfunktionen):

(1) $f + \lambda g$ ist integrierbar

(2) $f \leq g \implies \int_B f(x)dx \leq \int_B g(x)dx$

(3) $|f|$ ist integrierbar

Aufgabe 6. Untersuchen Sie mit Hilfe der bereits bekannten Theorie aus der Vorlesung, ob folgende Funktionen $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und geben Sie gegebenenfalls das Integral an.

(1) $B = [4, 5]$, $f(x) = 10x$.

(2) $B = [0, 1] \times [0, 1]$ und $f(x, y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \wedge x \in \{0, 1\} \\ -1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \wedge y \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 7 (Zusatz)**.** Wählen Sie nach Ihrer Präferenz eine der Funktionen

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \qquad \text{oder} \quad g : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2,$$

aus und zeigen Sie mittels oberen und unteren Integral, dass diese integrierbar auf $[0,1]$ bzw. $[0,1] \times [0,1]$ ist. Geben Sie, die Fläche bzw. das Volumen an, das f mit der x-Achse bzw. mit der $x-y$-Ebene einschließt.

Hinweis: Gehen Sie für f dazu folgendermaßen vor (und adaptieren Sie entsprechend für g).

- *Für festes $n \in \mathbb{N}$ betrachten Zerlegung Z_n von $[0,1]$ gegeben durch*

$$Z_n = \{[\tfrac{k-1}{n}, \tfrac{k}{n}] \colon k = 1, ..., n\}$$

und zwei Treppenfunktionen $h_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf Z_n mit

$$h_n(y) = \sup_{x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)} f(x), \quad g_n(y) = \inf_{x \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)} f(x),$$

für alle $y \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$.

- *Berechnen Sie $\int_{[0,1]} H_n(x)\mathrm{d}x$ und $\int_{[0,1]} h_n(x)\mathrm{d}x$, wobei an die Formel*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

erinnert sei.

- *Zeigen Sie, dass die Integrale von H_n und h_n für $n \to \infty$ gegen den selben Wert konvergieren und schließen Sie die Integrierbarkeit von f, sowie das Integral von f über $[0,1]$.*

Aufgabe 8 (Zusatz)**.** Zeigen Sie mittels oberem und unterem Integral, dass alle Monome $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, über $[0,1]$ integrierbar sind.

Hinweis: Wählen Sie wieder Zerlegungen Z_n von $[0,1]$ durch Intervalle mit Länge $\frac{1}{n}$ und bestimmen Sie geeignete Treppenfunktionen h_n, g_n mit $g_n \leq f \leq h_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \int_B h_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx$.

Aufgabe 9 (Zusatz)**.** Zeigen Sie, dass der Kreis aus Aufgabe 3) messbar ist (im Sinne der Definition aus Aufgabe 4).

Hinweis: Verfahren Sie ähnlich wie in Aufgabe 4. Denken Sie daran, dass Sie "nur" eine (Teil-)Folge von Treppenfunktionen h_n, g_n finden müssen so dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q h_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_Q g_n(x)\mathrm{d}x$$

und beachten Sie auch, dass Sie diese Grenzwerte dazu nicht explizit bestimmen müssen. Es sei auch an den Satz von Bolzano–Weierstraß erinnert.