Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (5 Punkte) *(korrigierte Fassung)*

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $D \subseteq X$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig wobei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik versehen ist ($d = d_2$). Zeigen Sie, dass f ein Maximum und ein Minimum auf D hat, d.h. es existieren Punkte x_{max} und x_{min} in D mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x \in D}\{f(x) \colon x \in D\} \quad \text{und} \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in D}\{f(x) \colon x \in D\}.$$

(b) Sei $X = \mathbb{R}^p$ versehen mit einer der Metriken d_1, d_2 oder d_∞ und sei $a, b \in \mathbb{R}^p$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, .., p$. Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung von Kompaktheit über Folgen, dass der "achsenparallele Quader"

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^p \colon a_i \leq x_i \leq b_i \forall i = 1, .., p\}$$

kompakt ist. Sie dürfen <u>nicht</u> den Satz von Heine–Borel aus der Vorlesung verwenden (dessen Beweis beruhte schließlich auf der hier zu zeigenden Kompaktheit der Quader). *Hinweis: Beachten Sie Satz 1.14 (über die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^p$ und den Satz von Bolzano–Weierstraß aus der Analysis I (p-Mal angewandt).*

Aufgabe 2. (5 Punkte) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $X \neq \emptyset$.

(1) Zeigen Sie, dass alle endlichen Teilmengen von X kompakt sind.

(2) Zeigen Sie, dass $M \subset X$ kompakt ist genau dann wenn $(M, d|_{M \times M})$ kompakt ist.

(3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{ye^{x^{-2}}}{1+y^2e^{2x^{-2}}}, & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \\ 0, & \text{für } (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(1) Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aber unstetig im Nullpunkt.

(2) Für jede Gerade G ist die eingeschränkte Funktion $f_G : G \to \mathbb{R}$ auf ganz G stetig.

(3) Ist die Menge $f([0, 1] \times [-1, 0])$ kompakt? Begründen Sie!

Hinweis: Es vereinfacht die Argumentation, wenn man bemerkt, dass die Funktion f von der Gestalt $\frac{g}{1+g^2}$ ist.

Wichtige Hinweise:

- Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis **Freitag, 9.11.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. **Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite**. Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter

  `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

Aufgabe 3. (a) Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass d_X von $X \times X$ versehen mit der Summen-Metrik $d_{X\times X}$ [1] nach $\mathbb{R}$ stetig ist. Schließen Sie, dass die Norm auf einem normierten Raum X stetig von X nach $\mathbb{R}$ ist.

(b) Geben Sie einen alternativen Beweis von Satz 1.65[2] aus der Vorlesung mittels Folgenkompaktheit an.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass f nicht gleichmässig stetig wäre und betrachten Sie entsprechend Folgen x_n, y_n in X mit $d_X(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(y_n) \geq \varepsilon$ für ein festes ε. Nutzen Sie nun die Kompaktheit von X und (a).

Aufgabe 4. Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume.

(1) Sei $T : X \to Y$ linear. Beweisen Sie die Implikation

$$T \text{ ist stetig an } x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists C > 0 \; \forall x \in X : \quad \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X.$$

(dies zeigt insbesondere die noch offene Implikation (i) $\Longrightarrow$ (iv) im Beweis von Satz 1.71)
Zeigen Sie weiters für allgemeine lineare Abbildungen $T : X \to Y$ die Gleichheit [3]

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y = \sup_{x\neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

(2) Sei $L(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ linear, stetig}\}$. Zeigen Sie, dass $T \mapsto \|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_Y$ eine Norm auf $L(X, Y)$ definiert.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Stetigkeit bezüglich der angegebenen Normen.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to C([0, 1]), x \mapsto (t \mapsto x_1 t + 2x_2 \sin(t) + x_3 t^4)$, wobei $C([0, 1])$ mit der Supremumsnorm versehen ist.

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to C^1([0, 1]), x \mapsto (t \mapsto x_1 \mathrm{e}^t + 2x_2 \sin(t) + x_3 t^4)$, wobei $C^1([0, 1])$ mit der Norm $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ versehen ist.

(3) $T : C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2, f \mapsto (f(\frac{1}{3}), f(\frac{3}{4}))$.

Aufgabe 6. Ziel der Aufgabe ist es, die Stetigkeit der Addition

$$add : X \times X \to X, (x, y) \mapsto x + y$$

und der Skalarmultiplikation

$$S : \mathbb{K} \times X \to X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

für einen Vektorraum X über $\mathbb{K}$ versehen mit einer Metrik d zu untersuchen, wobei hier $\mathbb{K}$ mit der euklidischen Metrik bzw. $X \times X$ und $\mathbb{K} \times X$ mit den "Summen-Metriken" (Blatt 1,1)B)

$$d_{X\times X}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \qquad d_{\mathbb{K}\times X}\left(\begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu \\ y \end{bmatrix}\right) = |\lambda - \mu| + d(x, y)$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ versehen sind.

(i) Zeigen Sie, dass *add* und S stetig sind falls X sogar ein normierter Raum ist.

(ii) Geben Sie Beispiele von metrischen Räumen an, so dass *add* bzw. S nicht stetig sind.

[1] siehe Aufgabe 6

[2] Satz 1.65: Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmäßig stetig.

[3] mit der Konvention, dass "∞" in der Gleichheit zugelassen ist. In anderen Worten: Eines der Suprema endlich ist genau dann endlich wenn die anderen Suprema endlich sind und stimmen in diesem Fall überein

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe). (a) Zeigen Sie, dass falls zwei metrische Räume homömorph sind, dann gibt es eine Bijektion, die die offenen Mengen der Räume ineinander überführt.

(b) Zeigen Sie, dass die metrischen Räume $(\mathbb{R}, d_2)$ und $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) = |\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}|$ homömorph sind und schließen Sie, dass die offenen Mengen der beiden Räume dieselben sind. Schließen Sie weiters, dass ein Homöomorphismus im Allgemeinen nicht die Eigenschaft "Cauchyfolge" erhält.