Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 4

Bemerkung: Aufgaben 1 und 2 dieses Blattes sind bis zum 2.11., 14h schriftlich abzugeben (siehe Details am Ende dieses Blattes).
Empfehlung: Bearbeiten Sie die Präsenzaufgaben in der gelisteten Reihenfolge.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Geben Sie für folgende Funktionen $f : X \to Y$ und folgende metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) an, an welchen Punkten $x \in X$ die Funktion stetig ist. Begünden Sie.

(a) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$, $d_X = d_1$, $d_Y = d_\infty$, $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^4}, \mathrm{e}^{x_1})$

(b) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_2$, $d_Y = d_\infty$, $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$.
Hinweis: für den Punkt $(0, 0)$ konstruieren Sie eine geeignete Folge (x_n, y_n), die gegen $(0, 0)$ konvergiert.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Seien (X, d_X), (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$. Sei weiters $x \in X$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Falls f stetig in x und g stetig in $f(x)$, so ist auch $g \circ f$ stetig in x.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to Y$, die *gleichmäßig* gegen $f : X \to Y$ konvergiert, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in X : d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(c) **(Zusatz: 4 Bonuspunkte)** Sei $\mathcal{F} = \{f : X \to Y | f \text{ ist stetig und beschränkt}^1\}$ versehen mit der Metrik $d_\mathcal{F}$ (dies muss nicht nachgerechnet werden)

$$d_\mathcal{F}(f, g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}, d_\mathcal{F})$ genau dann vollständig ist wenn (Y, d_Y) vollständig ist.

Wichtige Hinweise:

- *Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis* **Freitag, 2.11.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. **Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite**. *Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter*

  `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

[2] f heißt beschrätnkt falls das Bild $f(X)$ eine beschränkte Menge im metrischen Raum ist (d.h. $\exists x_0 \in X$ und $r > 0$ so dass $f(X) \subseteq B_r(x_0)$

Aufgabe 3. (1) Untersuchen Sie folgende Mengen auf Kompaktheit (nutzen unter anderem die Charakterisierung von Kompaktheit mittels Folgen bzw. Aussagen aus der Vorlesung.)

(a) $[0,1)$, $[0,\infty)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\cap[0,\pi]$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n},1]$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n}-1,1-\frac{1}{n}]$ in $(\mathbb{R},d_2)$

(b) die offene r-Kugel um x, $B_r(x)$, bzw. die abgeschlossene r-Kugel um x, $K_r(x)$ in $(\mathbb{R}^p,d_1)$ für $r>0$ und $x\in\mathbb{R}^p$.

(c) $\{\sqrt{|x|}+\sin(|y|)\mathrm{e}^x : x\in[-4,1], y\in[\pi,100]\}$ in $(\mathbb{R},d_2)$.

(d) $f([0,1]\times[0,1])$ wobei f,X,Y wie in Aufgabe 1b).

(e) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Kugel $K_1(\mathbf{0})$ in $X=\ell^1(\mathbb{N};\mathbb{C})$ nicht kompakt ist, wobei $\mathbf{0}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Nullfolge ist [2].
Anleitung: Für festes $n\in\mathbb{N}$ sei $e^n\in X$ die Folge mit $e^n_k=0$ für $k\neq n$ und $e^n_n=1$. Zeigen Sie, dass die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B_1(0)$ keine konvergente Teilfolge hat.

(2) Geben Sie alle kompakten Mengen in (X,d_0) an, wobei $X\neq\emptyset$ eine Menge ist und d_0 die diskrete Metrik bezeichnet.

(3) Geben Sie ein Gegenbeispiel für folgende Aussage an

Urbilder kompakter Mengen unter stetigen Funktionen sind kompakt.

Aufgabe 4. Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Interval. Wir betrachten folgende Vektorräume:

$$X=C(I;\mathbb{R}),\quad Y=\{f\in C(I;R)\colon f \text{ stetig differenzierbar}\}$$

(1) Zeigen Sie, dass $\|f\|_X=\|f\|_\infty=\max_{x\in I}|f(x)|$ für $f\in X$ eine Norm auf X und $\|f\|_Y=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ für $f\in Y$ eine Norm auf Y definiert.

(2) Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen linear und stetig (bezüglich der durch die Normen induzierten Metriken d_X und d_Y) sind.

(a) $\mathcal{F}:Y\to X, f\mapsto f$

(b) $\mathcal{G}:Y\to X, f\mapsto f'$

(3) Sind die normierten Räume $(X,\|\cdot\|_X)$ bzw. $(Y,\|\cdot\|_Y)$ Banachräume?

Aufgabe 5. (1) Zeigen Sie, die diskrete Metrik auf einem beliebigen Vektorraum X, der nicht nur aus dem 0-Element besteht, nicht von einer Norm induziert wird.

(2) **(Zusatz)** Zeigen Sie, dass die Paris-Metrik (Aufgabe 1 Blatt 2) auf $X=\mathbb{R}^2$ nicht von einer Norm induziert wird.

---

[2] $\ell^1(\mathbb{N};\mathbb{C})$ ist der metrische Raum aus Aufgabe 2 von Blatt 2 versehen mit der Metrik $d_1(x,y)=\sum_{n=1}^\infty|x_n-y_n|$, $x,y\in X$.