Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 3

Bemerkung: Aufgaben 1 und 2 dieses Blattes sind bis zum 26.10., 14h schriftlich abzugeben (siehe Details am Ende dieses Blattes).

Aufgabe 1.

(1) **(3 Punkte)** Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$(Y, d|_{Y\times Y}) \text{ vollständig } \iff Y \text{ ist abgeschlossene Teilmenge von } X \text{ in } (X,d)$$

(2) **(2 Punkte)** Geben Sie einen metrischen Raum (X,d) und eine Menge $M \subset X$ an, die nur isolierte Punkten enthält, aber nicht abgeschlossen ist (und zeigen Sie die jeweiligen Eigenschaften).

(3) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Häufungspunkte, die Menge der isolierten Punkte und den Abschluss der Menge (argumentieren Sie Ihre Resultate)

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}\right).$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie folgende Aussage für metrische Räume (X,d):

Jede beschränkte Folge[1] *in (X,d) hat eine konvergente Teilfolge.*

(1) **(1 Punkt)** Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes an, für den die Aussage zutrifft (begruenden Sie Ihre Aussagen gegebenenfalls durch einen Verweis auf die Analysis I)

(2) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Aussage im Allgemeinen nicht wahr ist.
Hinweis: Sie können einen der metrischen Räume von Blatt 1 verwenden

---

[1] Erinnerung: Eine Menge $M \subset X$ heißt *beschränkt* in (X,d) falls $\exists\, x_0 \in X, r > 0$ so dass $M \subset B_r(x_0)$ in (X,d). Eine Folge heißt *beschränkt* falls die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.

Aufgabe 3. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$. Beweisen Sie folgende Aussagen, die wir in Satz 1.30(iv) bzw. Korollar 1.31 in der Vorlesung formuliert haben.

(a) $\overset{\circ}{M}$ (das Innere von M) ist offen, ∂M (der Rand von M) ist abgeschlossen

(b) M ist abgeschlossen $\iff$ $M = \overline{M}$

(c) $\overset{\circ}{M} = \bigcup\{O \subseteq X : O$ offen und $O \subseteq M\}$

(d) M ist offen $\iff$ $\overset{\circ}{M} = M$

Aufgabe 4. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge versehen mit der diskreten Metrik d_0 und sei (Y,d) ein weiterer metrischer Raum. Im folgenden sind die Begriffe wie Stetigkeit bezüglich dieser Metriken zu verstehen.

(a) Zeigen Sie, dass alle Abbildungen $f : X \to Y$ stetig sind.
(Führen Sie den Beweis einmal nach der Definition der Stetigkeit und ein weiteres Mal unter Verwendung der Charakterisierung der Stetigkeit mittels offener Mengen.)

(b) Gilt auch, dass jede Abbildung $g : Y \to X$ stetig ist?

Hinweis: Es sei an Aufgabe 4)(b) von Blatt 2 erinnert.

Aufgabe 5. Geben Sie für folgende Funktionen $f : X \to Y$ und folgende metrische Räume (X, d_X), (Y, d_Y) an, an welchen Punkten $x \in X$ die Funktion stetig ist. Begünden Sie.

(a) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_2$, $d_Y = d_2$, $f_1(x,y) = x + y$ $f_2(x,y) = x \cdot y$, $f_3(x,y) = \max\{x,y\}$.

(b) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_2$, $d_Y = d_\infty$, $f(\xi,\eta) = \frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}$ für $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.

(c) $X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $d_X = d_2$, $d_Y = d_2$, $f_1(u,w) = (|u| \cdot \mathrm{Re}(v), \mathrm{e}^{\mathrm{I}m(u)})$ für $(u,v) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = (0,1)$.

(d) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X(u,v) = |\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-v}|$, $d_Y = d_1$, $f(u,v) = \sin(\frac{1}{u+4}) \cdot v$

Wichtige Hinweise:

- *Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis* **Freitag, 26.10.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110**. **Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite**. *Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter*

  `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.