

Analysis II: Übungsblatt 2

Bemerkung: Aufgaben 1 und 2 dieses Blattes sind bis zum 19.10., 14h schriftlich abzugeben (siehe Details am Ende dieses Blattes). Die anderen Aufgaben werden in der Woche 22.10. bis 26.10. in den Übungen besprochen.

Aufgabe 1. Sei d eine Metrik auf $X = \mathbb{R}^2$. Sei $d_P : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$d_P(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{es existiert } \lambda \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \lambda x = y \text{ oder } x = \lambda y \\ d(x, 0) + d(0, y) & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass (\mathbb{R}^2, d_P) ein metrischer Raum ist.
- (b) **(2 Punkte)** Skizzieren Sie die abgeschlossenen ε -Kugeln $K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ für $x_0 = (0, 0)$ und $\varepsilon = 1$ bzw. $x_0 = (1, 1)$ und $\varepsilon = 2$. **Korrektur im Vergleich zu Formulierung auf Blatt 1: In diesem Aufgabenteil sei d gleich der euklidischen Metrik d_2 .**

Aufgabe 2. Sei X die Menge aller Folgen $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

- (1) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass X zusammen mit der Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| \right)$$

einen metrischen Raum (X, d) definiert (begründen Sie auch warum d wohldefiniert ist).

Bemerkung: Der Raum X wird oft auch mit $\ell^1(\mathbb{N})$ oder $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ bezeichnet.

- (2) **(2 Punkte)** Zeigen Sie, dass (X, d) vollständig ist.

Hinweis: Hierzu betrachten Sie zu einer gegebenen Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X — d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X — zuerst die Folge $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ für festes $k \in \mathbb{N}$. Dadurch erhalten Sie einen Kandidaten für einen Grenzwert der ursprünglichen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Definitionen folgender Begriffen in einem metrischen Raum (X, d) :

*Häufungspunkt, isolierter Punkt, abgeschlossene Menge, Abschluss einer Menge, Rand, Inneres einer Menge*¹

und charakterisieren Sie diese mit Hilfe des Begriffes der offenen ε -Kugel um x , $B_\varepsilon(x)$ (d.h. geben charakterisieren Sie die Begriffe einzig mittels Quantoren und dem Begriff der Kugel und ohne den Begriff der offenen Menge, z.B. x ist Häufungspunkt von $M \subset X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0: M \setminus \{x\} \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$)

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie im folgenden Beispiel, ob die angegebenen Mengen offen oder abgeschlossen sind, geben Sie die Häufungspunkte an, und bestimmen Sie den Abschluss sowie den Rand. $X = (\mathbb{R}^2, d_2)$,

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \max\{|x|, |y|\} < 1\}$$

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: |x| < 1, |y| \leq 1\}$$

$$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{n^2}\}$$

(b) $(X, d) = (X, d_0)$ für eine nichtleere Menge X , wobei d_0 die diskrete Metrik bezeichnet. Bestimmen Sie alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen, sowie die Häufungspunkte und den Rand beliebiger Teilmengen von X .

(c) In der folgenden Tabelle bezeichnet (X, d) einen metrischen Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Bestimmen Sie das *Innere*¹ der Menge A , den Abschluss \bar{A} und den Rand ∂A . Notieren Sie die Lösungen in die folgende Tabelle. Im Folgenden beziehen sich d_1 , d_2 und d_∞ gegebenenfalls auf die Metriken eingeschränkt auf Teilmengen von \mathbb{R}^p bzw. \mathbb{C}^p .

X, A, d	$\overset{\circ}{A}$	\bar{A}	∂A
$X = \mathbb{R}$ $d = d_2$ $A = [0, 1)$			
$X = \mathbb{Q}$ $d = d_2$ $A = [e, \pi] \cap \mathbb{Q}$			
$X = \mathbb{R}$ $d = d_1$ $A = [e, \pi] \cap \mathbb{Q}$			
$X = \mathbb{R}^2$ $d = d_\infty$ $A = [0, 1] \times \{0\}$			
$X = \{z \in \mathbb{C}^2: 0 < d_1(z, 0) < 1\}$ $d = d_1$ $A = ([0, 1] \times \{z \in \mathbb{C}: z < 1\}) \cap X$			

¹Das Innere einer Menge $A \subset X$ ist definiert durch $\overset{\circ}{A} = \{x \in A: \exists O \text{ offen so dass } x \in O \subseteq A\}$

Aufgabe 5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wie in der Vorlesung seien im Folgenden $B_r(x)$ und $K_r(x)$ die *offene* bzw. *abgeschlossene Kugel* mit Radius r und Mittelpunkt x . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten.

- (1) $B_r(x)$ ist eine offene Menge.
- (2) $K_r(x)$ ist eine abgeschlossene Menge und es gilt $\overline{B_r(x)} \subseteq K_r(x)$, wobei \overline{M} der Abschluss der Menge M ist. Zeigen Sie außerdem, dass in der letzten Inklusion im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.
- (3) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (4) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (5) Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen im Allgemeinen nicht offen ist bzw., dass die Vereinigung von unendlich vielen abgeschlossenen Mengen nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 6. (*)

- (1) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$(Y, d|_{Y \times Y}) \text{ vollständig} \iff Y \text{ ist abgeschlossene Teilmenge von } X \text{ in } (X, d)$$

- (2) Geben Sie einen metrischen Raum (X, d) und eine Menge $M \subset X$ an, die nur isolierte Punkten enthält, aber nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 7. (*) Betrachten Sie folgende Aussage für metrische Räume (X, d) :

Jede beschränkte Folge² in (X, d) hat eine konvergente Teilfolge.

- (1) Geben Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes an, für den die Aussage zutrifft.
- (2) Zeigen Sie, dass die Aussage im Allgemeinen nicht wahr ist.

Hinweis: Sie können einen der metrischen Räume von Blatt 1 verwenden

Wichtige Hinweise:

- Abgabe von Aufgaben 1 und 2 des Blattes bis **Freitag, 19.10.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110. Wichtig: Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.** Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html>.

²Erinnerung: Eine Menge $M \subset X$ heißt *beschränkt* in (X, d) falls $\exists x_0 \in X, r > 0$ so dass $M \subset B_r(x_0)$ in (X, d) . Eine Folge heißt *beschränkt* falls die Menge der Folgenglieder beschränkt ist.