Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 15 — Lösungsskizze

Beim vorliegenden Blatt handelt es sich um ein Bonusblatt. Es sind möglichst viele verschiedene Aufgaben angegeben. Sie haben die Auswahl. Einerseits handeln diese von dem aktuellen Vorlesungsstoff (Implizite Funktionen, Umkehrsatz, Lagrange Multiplikatoren, Fixpunktsatz). Andererseits wird bei Aufgabe 1 (2) und (3) Themen wiederholt.

Aufgabe 1. Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \qquad f(x,y) = xy, \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2. \end{aligned}$$

(1) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ (Nutzen Sie die notwendige Bedingung der Lagrange-Multiplikatoren und argumentieren warum bzw. welche der Kandidaten-Punkte tatsächlich Extremwerte sind)

<u>*Lösung:*</u> Sei $M = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$. Die Menge ist kompakt, da wegen

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2 = 2 \qquad \forall (x,y)^T \in M$$

beschränkt und als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion g abgeschlossen ist (man überlege sich auch, dass die M eine Ellipse beschreibt). Da f stetig (differenzierbar) ist, nimmt f demnach ein globales Minimum und ein globales Maximum auf M an. Da es sich hierbei um globale Extrema bezüglich einer stetig differenzierbaren Nebenbedigung mit

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x, 8y) \neq (0,0), \qquad (x,y)^T \in M$$

handelt (die Voraussetzung des Satzes über Lagrange-Multiplikatoren sind erfüllt, weil des Weiteren f und g als Polynome stetig differenzierbar sind), müssen diese globalen Extremstellen als Nullstellen des Gradienten/der Jacobi-Matrix der Lagrangefunktion

$$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2 + 4y^2 - 2)$$

auftreten. Dazu berechnen wir

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial(x,y,\lambda)} = (y + 2\lambda x, x + 8\lambda y, g(x,y))$$

und setzen die rechte Seite gleich $(0,0,0)$ (die letzte Komponente muss natürlich die Nebenbedingung ergeben). Angenommen $x = 0$, dann muss wegen der ersten Gleichung auch $y = 0$ sein, was aber im Widerspruch zu $g(x,y) = 0$ steht. Umgekehrt kann auch y nicht 0 sein. Wir können also die erste Gleichung mit x und die zweite mit y multiplizieren und dies beiden Gleichungen von einander abziehen. Dann lässt sich mit Hilfe der dritten Gleichung eine der Variablen eliminieren und wir erhalten

$$2\lambda(2 - 4y^2 - 4y^2) = 0$$

und somit $y = \pm\frac{1}{2}$ da $\lambda = 0$ wieder auf $x = y = 0$ führen würde. Somit haben wir

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial(x, y, \lambda)} = (0, 0, 0) \iff x = \pm 1, y = \pm\frac{1}{2}$$

Wir setzen nun diese Punkte in f ein und erhalten

$$f(1, \tfrac{1}{2}) = f(-1, -\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}) \quad f(-1, \tfrac{1}{2}) = f(1, -\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}.$$

Also sind $(1, \frac{1}{2}), (-1, -\frac{1}{2})$ Maximalstellen zum Maximum $\frac{1}{2}$ und $(-1, \frac{1}{2})$ sowie $(1, -\frac{1}{2})$ Minimalstellen zum Minimum $-\frac{1}{2}$. Siehe die Visualierung in folgender Abbildung, sowie `https://ggbm.at/crepughn`.

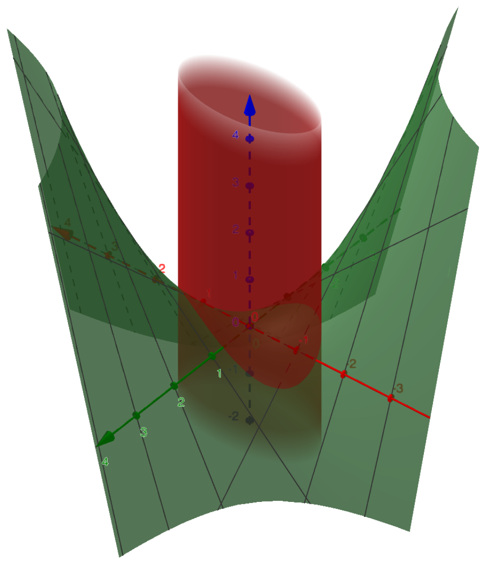

Abbildung 1: Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ (rot), $f(x, y)$ (grün)

(2) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die alle Extremstellen von f in der abgeschlossenen Menge D, die durch die Punkte (x, y) mit $g(x, y) = 0$ umrandet ist.
(zur Veranschaulichung überlege man sich welche geometrische Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ hat.

Lösung: Wir betrachten die Aufgabe nun als Extremwertaufgabe für f auf der von M eingeschlossenen Menge

$$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^4 \leq 2\}$$

ohne die Nebenbedingung. Dazu berechnen wir die Jacobi-Matrix der Funktion f und ihre Nullstellen: Dies ergibt als einzig mögliche lokale Extremstelle (in Inneren von D) $x = y = 0$, an der f aber Funktionswert gleich 0 hat. Auf dem Rand von N, also auf M, haben wir bereits die globalen Extrema berechnet; diese sind auch in Aufgabe (2) die Lösungen.

(3) **(2 Punkte)** Berechnen Sie das Maß der Menge D aus (2) und das Volumen der Funktion über D.

Lösung: Das Maßder Menge D bzw. das Volumen der Funktion f über D sind nach Definition der Wert des Integrale

$$\int_D 1 \mathrm{d}(x, y), \qquad \int_D f(x, y) \mathrm{d}(x, y)$$

sofern diese existieren — für das erste Integral bedeutet das genau, dass D *messbar* ist. Wir verwenden die Folgerung des Satzes von Fubini. Hierzu schreiben wir

$$D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon -\sqrt{2-4y^2} \leq x \leq \sqrt{2-4y^2}, y \in [-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}]\}$$

und schließen aus der Stetigkeit von $y \mapsto \sqrt{2-4y^2}$ auf die Messbarkeit von D. Da f stetig ist, existiert auch das zweite Integral (dies ist auch Aussage der Folgerung von Fubini). Die Integral lassen sich nun als Doppelintegrale berechnen:

$$\int_D 1 \mathrm{d}(x,y) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{2-4y^2}}^{\sqrt{2-4y^2}} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-2y^2} \mathrm{d}y$$

und

$$\int_D f(x,y) \mathrm{d}(x,y) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{2-4y^2}}^{\sqrt{2-4y^2}} xy \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0.$$

Für das erste Integral verwendet man nun die Substitutionen $u = \sqrt{2}y$ mit

$$2\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-2y^2} \mathrm{d}y = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} \mathrm{d}u.$$

Man kann nur entweder sofort argumentieren, dass das letzte Integral nichts anderes ist als die Hälfte der Fläche der Einheitskreisscheibe, also $\frac{\pi}{2}$ oder noch eine weitere Substitution machen, $u = \sin(v)$ (und mit Hilfe einer partiellen Integration das Integral $\int \cos^2 v \mathrm{d}v$ berechnen), um das Endergebnis,

$$\int_D 1 \mathrm{d}(x,y) = \pi$$

zu erhalten.

Aufgabe 2. (3 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir Vektoren in $\mathbb{R}^4$, die wir folgendermaßen scheiben

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass man das folgende Gleichungssystem lokal um

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (0, 1, 4, 9)$$

nach $\mathbf{y}$ auflösen kann und bestimmen Sie die Gradienten von y_1 und y_2 (aufgefasst als Funktionen von $\mathbf{x}$) an $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + 96 &= 0 \\ -x_1^3 - x_2 + 5y_1 - y_2 - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung: Die Abbildung

$$f \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + 96, -x_1^3 - x_2 + 5y_1 - y_2 - 10)$$

ist stetig differenzierbar, weil die Komponenten als Polynome stetig differenzierbar sind. Die Jacobi-Matrix an der Stelle (x_1, x_2, y_1, y_2) berechnet sich zu

$$\frac{\partial f}{\partial(x_1, x_2, y_1, y_2)}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\,y_1 & -2\,y_2 \\ -3\,{x_1}^2 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

und ist damit in $(0,1,4,9)$ also gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 & -18 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrix

$$\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(4,9) = \begin{pmatrix} -8 & -18 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(die Variablen, nach denen wir auflösen wollen, sind die letzten beiden, also sehen wir uns die letzten zwei Spalten an) ist invertierbar und haben damit die Bedingungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt.
Wir erhalten, dass offene Kugeln $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ um $(0,1)^T$ bzw. $(4,9)^T$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ existieren mit

$$(x_1+x_2-y_1^2-y_2^2+96, -x_1^3-x_2+5y_1-y_2-10) = (0,0) \iff (y_1,y_2) = g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} g_1(x_1,x_2) \\ g_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

Der Satz über impliziten Funktionen liefert außerdem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial(x_1,x_2)}(0,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(y_1,y_2)}(4,9)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x_1,x_2)}(0,1,4,9) \\
&= -\begin{pmatrix} -8 & -18 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 1 & 19 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} y_1(0,1) &= \frac{1}{98}(1,19) \\
\operatorname{grad} y_2(0,1) &= \frac{1}{98}(5,-3).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Der Umkehrsatz und Folgerungen)**.** Man betrachte eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, wobei D offen ist, und $\mathbf{a} \in D$ so dass $\mathrm{d}f(\mathbf{a})$ invertierbar ist[1].

(1) **(2 Punkte)** Nach dem Umkehrsatz (Vorlesung 25.11.) gibt es offene Mengen O und V um $\mathbf{a}$ bzw. um $f(\mathbf{a})$ so dass $f|_O : O \to V$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass für die Umkehrfunktion $g : V \to O$ gilt, dass

$$\mathrm{d}g(f(\mathbf{x})) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}))^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(f(\mathbf{a})) = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})\right]^{-1}.$$

(Rekapitulieren Sie den Beweis des Satzes und nutzen Sie die Eigenschaft über die Ableitung der impliziten Funktion).

(2) **(2 Punkte)** Sei zusätzlich $\mathrm{d}f(\mathbf{a})$ invertierbar für alle $\mathbf{a} \in D$. Zeigen Sie, dass $f(D)$ eine offene Menge ist. Geben Sie auch ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Betrachten Sie die Polarkoordinaten-Abbildung

$$T : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie das Bild $T(D)$.

(2) Geben Sie an, an welchen Punkten in D die Funktion lokal eindeutig umkehrbar ist.

(3) Zeigen Sie, dass $T : D \to T(D)$ ein *Diffeomorphimus* ist, d.h. dass D und $T(D)$ offen sind, $T : D \to T(D)$ bijektiv sowie T und T^{-1} stetig differenzierbar.
(Hinweis: Umkehrsatz und Aufgabe 3)

Aufgabe 5. (3 Punkte) Betrachten Sie den Banachraum $V = C([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : V \to V, \quad (\Phi f)(x) = 1 + \int_0^x t^2 f(t)\, dt,$$

genau einen Fixpunkt in V hat.

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis **Fr, 1.2.2019, 14:00 Uhr**, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

---

[1] bzw. äquivalent dazu, dass $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a})$ eine invertierbare Matrix ist.