Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 15

Beim vorliegenden Blatt handelt es sich um ein Bonusblatt. Es sind möglichst viele verschiedene Aufgaben angegeben. Sie haben die Auswahl.

Aufgabe 1. Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \qquad f(x, y) = xy,$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \qquad g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2.$$

(1) **(3 Punkte)** Bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$
(Nutzen Sie die notwendige Bedingung der Lagrange-Multiplikatoren und argumentieren warum bzw. welche der Kandidaten-Punkte tatsächlich Extremwerte sind)

(2) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die alle Extremstellen von f in der abgeschlossenen Menge D, die durch die Punkte (x, y) mit $g(x, y) = 0$ umrandet ist.
(zur Veranschaulichung überlege man sich welche geometrische Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ hat.

(3) **(2 Punkte)** Berechnen Sie das Maß der Menge D aus (2) und das Volumen der Funktion über D.

Aufgabe 2. (3 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir Vektoren in $\mathbb{R}^4$, die wir folgendermaßen scheiben

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass man das folgende Gleichungssystem lokal um

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (0, 1, 4, 9)$$

nach $\mathbf{y}$ auflösen kann und bestimmen Sie die Gradienten von y_1 und y_2 (aufgefasst als Funktionen von $\mathbf{x}$) an $\mathbf{x}_0 = (0, 1)$:

$$x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + 96 = 0$$
$$-x_1^3 - x_2 + 5y_1 - y_2 - 10 = 0$$

Aufgabe 3 (Der Umkehrsatz und Folgerungen)**.** Man betrachte eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, wobei D offen ist, und $\mathbf{a} \in D$ so dass $\mathrm{d}f(\mathbf{a})$ invertierbar ist[1].

(1) **(2 Punkte)** Nach dem Umkehrsatz (Vorlesung 25.11.) gibt es offene Mengen O und V um $\mathbf{a}$ bzw. um $f(\mathbf{a})$ so dass $f|_O : O \to V$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass für die Umkehrfunktion $g : V \to O$ gilt, dass

$$\mathrm{d}g(f(\mathbf{x})) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}))^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}(f(\mathbf{a})) = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})\right]^{-1}.$$

(Rekapitulieren Sie den Beweis des Satzes und nutzen Sie die Eigenschaft über die Ableitung der impliziten Funktion).

---

[1]bzw. äquivalent dazu, dass $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{a})$ eine invertierbare Matrix ist.

(2) **(2 Punkte)** Sei zusätzlich $\mathrm{d}f(\mathbf{a})$ invertierbar für alle $\mathbf{a} \in D$. Zeigen Sie, dass $f(D)$ eine offene Menge ist. Geben Sie auch ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Betrachten Sie die Polarkoordinaten-Abbildung

$$T : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie das Bild $T(D)$.

(2) Geben Sie an, an welchen Punkten in D die Funktion lokal eindeutig umkehrbar ist.

(3) Zeigen Sie, dass $T : D \to T(D)$ ein *Diffeomorphimus* ist, d.h. dass D und $T(D)$ offen sind, $T : D \to T(D)$ bijektiv sowie T und T^{-1} stetig differenzierbar.
(Hinweis: Umkehrsatz und Aufgabe 3)

Aufgabe 5. (3 Punkte) Betrachten Sie den Banachraum $V = C([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : V \to V, \quad (\Phi f)(x) = 1 + \int_0^x t^2 f(t)\, dt,$$

genau einen Fixpunkt in V hat.

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis **Fr, 1.2.2019, 14:00 Uhr**, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.
