Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 14, Lösungsvorschlag

Bitte beachten Sie, dass es sich hierbei um eine unkorrigierten Lösungsskizze handelt. An einigen Stellen sind ausführliche Erklärungen eingefügt.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ für genügend kleine x, y, z nach z aufgelöst werden kann, und berechnen Sie für die Lösungsfunktion $z(x, y)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Lösung: Wir machen uns erst einmal klar, dass zu zeigen ist, dass eine Funktion $g(x, y)$ existiert (diese schreiben wir nun auch als $z(x, y)$), so dass wir $f(x, y, z) = 0$ äquivalent umformen können zu $z = g(x, y)$; dies soll wenigstens lokal für kleine x, y, z, also für x, y, z in einer genügend kleinen ε-Kugel gelten. Dazu denken wir an die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen (mit der Notation der Vorlesung galt folgende Rollenverteilung: "$\mathbf{y} = z$" und $\mathbf{x} = (x, y)$) und fassen f als Funktion

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{Variablen } x,y} \times \underbrace{\mathbb{R}^1}_{\text{Variable } z} \to \mathbb{R}^1$$

auf auf. Wir überprüfen nun die Voraussetzungen des Satzes

- $f(0, 0, 0) = 0$, (also ist es erst einmal überhaupt sinnvoll "kleine" x, y, z zu betrachten)
- Die Funktion ist, als Verknüpfung von stetig partiell differenzierbaren Funktionen, stetig partiell differenzierbar (und somit stetig differenzierbar)
- $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = \cos(z)|_{z=0} = 1 \neq 0$. Also ist $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ "invertierbar"[1].
  (Da f stetig differenzierbar ist folgt auch, dass $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ um $(0, 0, 0)$ ungleich 0 ist).

Der Satz besagt nun, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Funktion

$$g : \underbrace{U}_{=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \exists y,z\in\mathbb{R} \text{ mit } (x,y,z)\in B_\varepsilon(\mathbf{0})\}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

existiert so dass

$$\forall (x, y, z) \in B_\varepsilon(\mathbf{0}) \subseteq \mathbb{R}^3 : \qquad f(x, y, z) = 0 \iff z = z(x, y) = g(x, y).$$

Äquivalent kann dies auch so formuliert werden: Es existieren offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ so dass $(0, 0) \in U$ und $0 \in V$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ so dass

$$\forall (x, y, z) \in U \times V : \qquad f(x, y, z) = 0 \iff g(x, y) = z.$$

Die partiellen Ableitungen von g für jene $(x, y) \in U$ so dass $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ invertierbar ist werden "implizit" berechnet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \\ &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))}\end{aligned}$$

[1] Vorsicht: Die Inverse ist also die "Inverse Matrix", was hier einfach der Kehrwert der Zahl ist

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))\\ &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}.\end{aligned}$$

Dies lässt sich kompakt so schreiben:

$$\frac{\partial g}{\partial (x,y)}(x,y) = -\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}}_{\in\mathbb{R}^{1\times 1}}\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial (x,y)}(x,y,g(x,y))}_{\in\mathbb{R}^{1\times 2}} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

(im Allgemeinen ist dieses Produkt als Matrix-Matrix-Multiplikation von $\mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbb{R}^{m\times p}$ Matrizen zu verstehen). Da die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 3x^3 + 2\cos y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -2x\sin y\end{aligned}$$

sind, folgt, dass

$$\frac{\partial g}{\partial (x,y)}(x,y) = -\frac{1}{\cos g(x,y)}\left(3x^3 + 2\cos y, \quad -2x\sin y\right)$$

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

auf dem Ellipsoid

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \colon x^2 + (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 = 1\}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich wie in dem Beispiel der Vorlesung vom 18.1. diskutieren. Dazu eliminiere man geeignet eine Variable in der Funktion und bestimme den Definitionsbereich. Alternativ lässt sich die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangemultiplikatoren*, siehe am Vorlesung 23.1., lösen.*

Lösung: (Ohne Lagrange-Multiplikatoren). Auflösen der Gleichung, die S definiert nach x^2 und Einsetzen in die Funktion ergibt die Funktion

$$\tilde f(y,z) = 1 + \frac{3}{4}y^2 + (z-1)^2 - (\tfrac{z}{3})^2,$$

die wir nun auf

$$\tilde S = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : \exists x\in\mathbb{R} \text{ mit } (x,y,z)\in S\} = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 \le 1\}$$

betrachten. Wegen des Einsetzens gilt, dass

$$\max_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) = \max_{(y,z)\in\tilde S}\tilde f(y,z),$$

wobei die Maxima existieren, weil beide Mengen S, $\tilde S$ kompakt sind und f sowie $\tilde f$ stetig. Entsprechendes gilt für die Minima. Um die Extrema von $\tilde f$ zu bestimmen, betrachten wir das Innere von $\tilde S$ und den Rand $\partial\tilde S$ getrennt. Für das Innere $\tilde S^\circ$ können wir die kennengelernten Methoden der Differentialrechnung für die Bestimmung von möglichen lokalen Extremwerten verwenden. Da

$$\operatorname{grad}\tilde f(y,z) = \mathbf{0} \quad\Longleftrightarrow\quad (\tfrac{3}{2}y, 2(z-1) - \tfrac{2}{9}z) = (0,0)$$

folgt, dass $(y,z) = (0, \frac{9}{8})$ eine mögliche Extremstelle ist. Da $(0, \frac{9}{8}) \in \tilde{D}$ und wegen

$$\operatorname{Hess} \tilde{f}(0, \tfrac{9}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{9} \end{pmatrix} > 0 \quad \text{(d.h. positiv definit)},$$

handelt es sich um eine lokale Minimalstelle mit Minimum $\tilde{f}(0, \frac{9}{8}) = \frac{7}{8}$. Um die Extremwerte von $\tilde{f}$ auf dem Rand $\partial\tilde{S}$ zu bestimmen überlegen wir uns zuerst wie dieser aussieht: Es ergibt sich, dass

$$\partial\tilde{S} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 = 1\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4(1 - (\tfrac{z}{3})^2)\}.$$

Damit können wir das Vorgehen wiederholen indem wir y^2 in $\tilde{f}(y,z)$ ersetzen. Somit erhalten wir also eine weitere Funktion

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = 1 + 3(1 - (\tfrac{z}{3})^2) + (z-1)^2 - (\tfrac{z}{3})^2 = \tfrac{7}{9}z^2 - 2z + 5,$$

die wir auf

$$\tilde{\tilde{S}} = \{z \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } y^2 = 4(1 - (\tfrac{z}{3})^2)\} = [-3, 3].$$

betrachten. Für $\tilde{\tilde{f}}$ könnten wir nun mit Analysis I die Extremwerte (von einer Funktion in einer Variablen) bestimmen. Alternativ kann man aber wie folgt argumentieren. Weil

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = (\tfrac{\sqrt{7}}{3}z - \tfrac{3}{\sqrt{7}})^2 + (5 - \tfrac{9}{7}) \geq 5 - \tfrac{9}{7}$$

mit Gleicheit genau dann wenn $z = \frac{3}{\sqrt{7}} \in [-3, 3]$, folgt dass, $\tilde{\tilde{f}}$ das globale Minimum $5 - \frac{9}{7}$ an der Stelle $z = \frac{3}{\sqrt{7}}$ annimmt. Es folgt aus der Monotonie der Quadratfunktion des Weiteren, dass

$$\max_{z \in [-3,3]} \tilde{\tilde{f}}(z) = \max_{z \in \{-3,3\}} \tilde{\tilde{f}}(z) = \tilde{\tilde{f}}(-3) = 16.$$

Insgesamt ergeben sich also das Maximum und Minimum durch Vergleich der Ergebnisse für $\tilde{f}$ (im Inneren von $\tilde{S}$) und $\tilde{\tilde{f}}$. Wir erhalten insgesamt also ein globales Maximum mit dem Wert 16 und ein globales Minimum mit dem Wert $\frac{7}{8}$. Die zugehörigen Stellen ergeben sich durch Einsetzen: $(0, 0, -3)$ bzw. $(\pm\sqrt{1 - (\frac{3}{8})^2}, 0, \frac{9}{8})$

Alternative Lösung mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren:
Man betrachte hierfür die Lagrangefunktion

$$\Lambda(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

wobei $g(x,y,z) = x^2 + (\frac{y}{2})^2 + (\frac{z}{3})^2 - 1$ ist. Die Kandidaten für die Extremwerte ('kritischen Punkte') sind die Nullstellen der Jacobi-Matrix / des Gradienten von Λ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Lambda}{\partial(x,y,z,\lambda)} &= (2x(1+\lambda), 2y(1+\tfrac{1}{4}\lambda), 2(z-1) + \tfrac{2}{9}\lambda z, g(x,y,z)) = \mathbf{0} \\ &\iff (x = 0 \vee \lambda = -1) \wedge (y = 0 \vee \lambda = -4) \wedge (z = \tfrac{9}{9+\lambda}) \wedge g(x,y,z) = 0 \end{aligned}$$

Außerdem ist $\operatorname{grad} g(x,y,z) = (2x, \frac{y}{2}, \frac{2}{9}z)$ ungleich 0 für alle x, y, z mit $g(x,y,z) = 0$. Das heißt, die Jacobi-Matrix von g an jeder Stelle entlang der Nebenbedingung hat maximalen Rang 1. Um die obigen Gleichungen aufzulösen, betrachte man Fallunterscheidungen:

(A) $\underline{x = y = 0}$: Dann folgt aus $g(x,y,z) = 0$, dass $z = \pm 3$ und damit $f(0,0,-3) = 16$ bzw. $f(0,0,3) = 4$.

(B) $x \neq 0$: Dann muss $\lambda = -1$ sein und somit auch $y = 0$ und $z = \frac{9}{8}$. Aus der Nebenbedingung folgt dann $x^2 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$ und damit $f(x, y, z) = \frac{55}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{8}$.

(C) $y \neq 0$: Dann muss $\lambda = -4$ sein und somit auch $x = 0$ und $z = \frac{9}{5}$. Aus der Nebenbedingung folgt dann $y^2 = 4(1 - \frac{9}{25}) = \frac{64}{25}$ und damit $f(x, y, z) = \frac{64}{25} + \frac{16}{25} = \frac{16}{5}$.

Da die Funktion f stetig ist und die Menge $\{(x, y, z) \colon g(x, y, z) = 0\}$ kompakt ist, muss ein globales Maximum und Minimum existieren. Dieses muss unter obigen Kandidaten verteten sein. Daraus ergibt sich durch Vergleich der Werte, dass das Maximum der Funktion der Wert 16 ist (dieser wird an $(0, 0, -3)$ angenommen). Das Minimum ist $\frac{7}{8}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in D und stetig auf dem Abschluss $\overline{D}$ von D. Sei weiters

$$\Delta f(x, y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0$$

für alle $(x, y) \in D$. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x, y), \tag{1}$$

wobei ∂D den Rand von D bezeichnet.

(a) (2P.) Zeigen unter der zusätzlichen Annahme von $\Delta f(x, y) > c > 0$ für ein $c > 0$ und alle $(x, y) \in D$, dass f kein lokales Maximum in D haben kann. *Hinweis: Was lässt sich über die Definitheit der Hesse-Matrix sagen? Verwenden Sie, dass die Summe der Diagonaleinträge einer symmetrischen Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte ist.*

(b) (1P.) Zeigen Sie nun (1) mit Hilfe von (a) indem Sie folgende Hilfsfunktionen betrachten,

$$g_n(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(c) (1 Bonuspunkt) Schließen Sie, dass falls $\Delta f(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in D$ gilt, folgt, dass

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x, y), \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \min_{(x,y)\in\partial D} f(x, y).$$

Lösung: Zuerst beachte man, dass die Maxima in der Behauptung existieren, da f stetig ist und die Mengen $\overline{D}$, ∂D kompakt sind, als beschränkt und abgeschlossene Mengen. Man beachte auch, dass globale Extrema, falls diese in D liegen, auch lokale Extrema sein müssen! (a): Da die Summe der Eigenwerte der Hesse-Matrix an jeder Stelle $(x, y) \in D$ größer als 0 ist, folgt, dass wenigstens ein Eigenwert größer als 0 sein muss. Somit kann die Hesse-Matrix an all diesen Stellen nicht negativ semidefinit sein und damit nach dem Satz in Abschnitt 2.3 kein lokales Maximum in D existieren (hierbei beachte man auch, dass die $d^2 f(x, y) \neq \mathbf{0}$ aufgrund der Voraussetzung).
(b): Man sieht leicht, dass die Hilfsfunktionen g_n die Voraussetzung von Teil (a) erfüllen. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_0, y_0) \in D$, dass

$$g_n(x_0, y_0) < \max_{(x,y)\in\partial D} |g_n(x, y)|. \tag{2}$$

Wegen

$$\sup_{(x,y)\in\overline{D}} |g_n(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{n} \sup_{(x,y)\in\overline{D}} |x^2 + y^2|$$

(man beachte, dass $\sup_{(x,y)\in\overline{D}} |x^2+y^2|$ endlich ist weil $\overline{D}$ kompakt und die Funktion $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ stetig ist) konvergiert die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f auf $\overline{D}$, also

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(x,y)\in\overline{D}} |g_n(x,y)-f(x,y)| = 0.$$

Daraus folgt offensichtlich, dass auch $g_n|_{\partial D}$ gleichmäßig gegen $f|_{\partial D}$ konvergiert auf ∂D. Damit können wir in (2) den Grenzwert $n\to\infty$ bilden und erhalten,

$$f(x_0,y_0) \le \max_{(x,y)\in\partial D} |f(x,y)|,$$

woraus die Behauptung folgt.
(c): Dies folgt aus dem Bewiesenen in dem man zusätzlich $-f$ betrachtet.

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis **Fr, 25.1.2019, 14:00 Uhr**, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

Aufgabe 4 (Implizite Funktionen). (1) Zeigen Sie, dass durch $y^3 + x^2 - 2xy = 0$ um den Punkt $(x, y) = (1, 1)$ eine differenzierbare Funktion $y = g(x)$ mit $g(1) = 1$ implizit definiert ist.

(2) Berechnen Sie die Ableitung $g'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(1)$.

Lösung:

(1) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^3 + x^2 - 2xy$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y, \quad f(1, 1) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 1 \neq 0.$$

Deshalb kann man unter Verwendung des Satzes über implizite Funktionen die Gleichung $f(x, y) = 0$ um $(a, b) = (1, 1)$ nach x auflösen.

Es gibt also eine offene Menge U mit $1 \in U$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ mit $g(1) = a = 1$ und $f(x, g(x)) = 0$.

(2) Nun bestimmen wir $g'(1)$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{2\,x - 2\,g(x)}{3\,g(x)^2 - 2\,x} \tag{3}$$

für $x \in U$. Insbesondere folgt also $g'(1) = -\frac{2-2}{3-2} = 0$.