Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 14

Das vorliegende Blatt handelt von Aufgaben zur Bestimmung (globaler) Extremwerte und dem Satz über implizite Funktionen.
In den Übungen vom 22.1.–24.1. werden auf Wunsch ähnliche Präsenzaufgaben besprochen.

Aufgabe 1. (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ für genügend kleine x, y, z nach z aufgelöst werden kann, und berechnen Sie für die Lösungsfunktion $z(x, y)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

auf dem Ellipsoid

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 = 1\}.$$

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich wie in dem Beispiel der Vorlesung vom 18.1. diskutieren. Dazu eliminiere man geeignet eine Variable in der Funktion und bestimme den Definitionsbereich. Alternativ lässt sich die Aufgabe mit Hilfe der Lagrangemultiplikatoren*, siehe am Vorlesung 23.1., lösen.*

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in D und stetig auf dem Abschluss $\overline{D}$ von D. Sei weiters

$$\Delta f(x, y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \geq 0$$

für alle $(x, y) \in D$. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x, y), \tag{1}$$

wobei ∂D den Rand von D bezeichnet.

(a) (2P.) Zeigen unter der zusätzlichen Annahme von $\Delta f(x, y) > c > 0$ für ein $c > 0$ und alle $(x, y) \in D$, dass f kein lokales Maximum in D haben kann. *Hinweis: Was lässt sich über die Definitheit der Hesse-Matrix sagen? Verwenden Sie, dass die Summe der Diagonaleinträge einer symmetrischen Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte ist.*

(b) (1P.) Zeigen Sie nun (1) mit Hilfe von (a) indem Sie folgende Hilfsfunktionen betrachten,

$$g_n(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n}(x^2 + y^2) \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(c) (1 Bonuspunkt) Schließen Sie, dass falls $\Delta f(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in D$ gilt, folgt, dass

$$\max_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \max_{(x,y)\in\partial D} f(x, y), \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in\overline{D}} f(x, y) = \min_{(x,y)\in\partial D} f(x, y).$$

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis **Fr, 25.1.2019, 14:00 Uhr**, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.