Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019
Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 12 (Bonus)

Das vorliegende Blatt wird als Bonus gewertet, d.h., jeder erreichte Punkt wird als Bonuspunkt gewertet, und soll auch zur Wiederholung des Stoffes dienen. Es wird in weiterer Folge noch Blätter 13 und 14 geben sowie ein weiteres Bonusblatt 15.
Anpassung: *Man beachte die Änderung bzgl. der Extremwerte in der Aufgabe.*

Aufgabe 1. (10 Bonuspunkte)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (2P.)

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[-\pi, 1] \times [0, 2]$ (1P.),

(3) partielle Differenzierbarkeit; geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen an (1P.),

(4) totale Differenzierbarkeit; geben Sie gegebenenfalls die Jacobi-Matrix an (1P.),

(5) zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit (1P.).

Bestimmen Sie alle lokalen Minimastellen von f [1]. Verwenden hierzu, dass diese Punkte für eine partiell differenzierbare Funktion nur dort auftreten können, an denen der Gradient $\operatorname{grad} f$ von f verschwindet (1P.). Berechnen Sie außerdem

(7) das Integral $\int_{[0,3]\times[0,3]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$ (1P.).

Hinweis: Sie können die Stetigkeit in (1) auch mittels der anderen Punkte argumentieren.

Wiederholen Sie die Untersuchungen von (3)-(5) für folgende Funktion (2P.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis
Freitag, 11.1.2019, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

[1] Für eine Funktion $g : D \subseteq X \to \mathbb{R}$ heißt $\mathbf{x} \in D$ lokale Minimalstelle mit lokalem Minimum $f(\mathbf{x})$ falls ein $\varepsilon > 0$ existiert so dass $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{y})$.

Lösung: Die Funktion ist stetig an $(0,0)$ da wegen $|2xy| \leq x^2 + y^2$,

$$|f(x,y)| \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\|(x,y)\|_1$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (es würde genügen, wenn dies nur auf einer Kugel um $(0,0)$ richtig wäre) und somit $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = 0$, und stetig an allen anderen Punkte aus Verknüpfung von stetigen Funktionen. Damit ist die Funktion auch integrierbar auf jedem kompakten Quader [2].
Die partiellen Ableitungen an $(x,y) \neq (0,0)$ sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Weiters erhält man $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ wegen $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - 0) = 0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(0,t) - 0)$.
Als Verknüpfung stetiger Funktionen sind die partiellen Ableitungen

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

stetig and $(x,y) \neq (0,0)$. Am Punkt $(0,0)$ sind diese auch stetig, da mit einer ähnlichen Argumentation wie oben,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|xy^4|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{|x|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |x| \overset{(x,y)\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0$$

und

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|x^4y|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{|y|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \leq |y| \overset{(x,y)\to\mathbf{0}}{\longrightarrow} 0.$$

Daraus folgt, Satz 3.11, dass die Funktions stetig (total) differenzierbar ist (an jedem Punkt).
Um die zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit zu untersuchen berechnen wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{2y^4(x^2+y^2)^2 - 8x^2y^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y^4(x^2+y^2) - 8x^2y^4}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2y^6 - 6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) = 0$. Da $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,y) = 2$ für $y \neq 0$ fogt, dass

$$(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)$$

nicht stetig an $(0,0)$ ist. Somit ist f an $(0,0)$ nicht zweimal stetig differenzierbar.
Die anderen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) &= \frac{2x^4(x^2+y^2)^2 - 8x^4y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^4(x^2+y^2) - 8x^4y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x^6 - 6x^4y^2}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{8xy^3(x^2+y^2)^2 - 8xy^5(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{8xy^3(x^2+y^2) - 8xy^5}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{8x^3y(x^2+y^2)^2 - 8x^5y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{8x^3y(x^2+y^2) - 8x^5y}{(x^2+y^2)^3} = \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}$$

An allen Punkten verschieden von $\mathbf{0}$ existieren die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und diese sind stetig. Die Punkte (x,y) an denen der Gradient von f verschwindet sind genau jene für die gilt, dass entweder x oder y gleich 0 sind. Dies sind alle möglichen lokalen Extremstellen.

[2] Man beachte, dass falls die Funktion nicht stetig wäre, so folgt daraus noch nicht, dass f nicht integrierbar ist

Da an diesen Stellen $f(x,y) = 0$ und $f \geq 0$ folgt direkt, dass es sich um lokale (und sogar globale) Minima handelt. Man beachte, dass hier eine Argumentation über die Hesse-Matrix nicht möglich ist — weder im Fall $(x,y) = (0,0)$ noch an allen anderen Punkten an denen der Gradient gleich 0 ist, siehe Aufgabe 2. Man beachte auch, dass es sich um keine *strikten* Minima handelt.
Um das Integral zu berechnen nutzen wir den Satz von Fubini, der aufgrund der Stetigkeit der Funktion f anwendbar ist. Somit gilt

$$\int_{[0,3]\times[0,3]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^3 \int_0^3 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2 \int_0^3 \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Das innere Integral lässt sich folgendermaßen berechnen, $y > 0$:

$$\int_0^3 \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = \int_0^3 1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = yu \\ \mathrm{d}x = y\mathrm{d}u \end{array} \right| = 3 - \int_0^{\frac{3}{y}} \frac{1}{u^2+1} y\mathrm{d}u = 3 - y\arctan\left(\frac{3}{y}\right).$$

Es bleibt also noch das äußere Integral zu bestimmen,

$$\int_0^3 \int_0^3 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2(3 - y\arctan\left(\frac{3}{y}\right))\mathrm{d}y = \int_0^3 3y^2\mathrm{d}y - \int_0^3 y^3\arctan(\tfrac{1}{y})\mathrm{d}y.$$

Man beachte, dass $\lim_{y\to 0} y^3\arctan(\frac{3}{y}) = 0$, weshalb zweite Integral existiert, und mit Hilfe von partieller Integration erhalten wir wegen $\frac{d}{\mathrm{d}y}\arctan(\frac{1}{y}) = \frac{1}{1+y^2}$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^3 y^3\arctan(\tfrac{1}{y})\mathrm{d}y &= \frac{y^4}{4}\arctan(\tfrac{1}{y})|_0^3 - \int_0^3 \frac{y^4}{4}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{3^4\arctan(\frac{1}{3})}{4} - \frac{1}{4}\int_0^3 y^2 - \frac{y^2}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{3^4\arctan(\frac{1}{3})}{4} - \frac{1}{4}\int_0^3 y^2\mathrm{d}y + \int_0^3 1 - \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{3^4\arctan(\frac{1}{3})}{4} - \frac{1}{12} + 3 - \arctan(3). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_0^3 \int_0^3 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 3y^2\mathrm{d}y - \int_0^3 y^3\arctan(\tfrac{1}{y})\mathrm{d}y = 27 - \frac{3^4\arctan(\frac{1}{3})}{4} + \frac{1}{12} - 3 + \arctan(3).$$

Bei der zweiten Funktion sieht man leicht, dass $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$, womit die Funktion an $(0,0)$ nicht stetig ist. Genauso sieht man, dass $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x,0) - 0) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^2 x}$ nicht existiert, womit f an $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar ist und somit weder total differenzierbar noch zweimal stetig partiell differenzierbar. An allen anderen Punkten ist die Funktion als Verknüpfung von beliebig oft differenzierbaren Funktionen zweimal stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f aus Aufgabe 1 an allen Stellen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie diese auf Definitheit (positiv/negativ (semi-)definit bzw. indefinit) und diskutieren Sie den Zusammenhang Ihrer Ergebnisse mit den in Aufgabe 1) berechneten Extremwerten.

Lösung: Mit Hilfe der berechneten zweiten partiellen Ableitungen ergibt sich für x, y ungleich 0

$$\operatorname{Hess} f(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

woraus folgt, dass beide Matrizen positive semidefinit sind. Dies gibt keinen Aufschluss auf Extrema. Für den Punkt $\mathbf{0}$ erhalten wir die Nullmatrix und somit auch keinerlei Aufschluss über die Extremstellen. Dies zeigt, dass die hinreichende Bedingung für Extremstellen (Vorlesung am 16.11., siehe auch die Informationen auf Blatt 13) oft nicht anwendbar sind. Dagegen lässt sich durch Untersuchung der Funktion selbst — wie in Aufgabe 1 beschrieben — oftmals einfach herausfinden, ob kritische Punkte (d.h. an denen der Gradient verschwindet) Extremstellen sind.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_{2,\mathbf{x}}f$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x y^2 + \cos(y) \arctan(x)$$

an der Anschlussstelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ an.

Lösung: Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion existieren (an allen Punkten), da die Funktion die Verknüpfung (belieg oft) differenzierbaren Funktionen in x und y ist. Die partiellen Ableitungen sind auch stetig und die Funktion damit zweimal stetig differenzierbar. Es ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$D^{(1,0)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x y^2 + \frac{\cos(y)}{1+x^2}, \quad D^{(0,1)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x 2y - \sin(y) \arctan(x).$$

sowie

$$D^{(2,0)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x y^2 - \frac{2x\cos(y)}{(1+x^2)^2}, \quad D^{(1,1)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x 2y - \frac{\sin(y)}{1+x^2}, \quad D^{(0,2)}f(\mathbf{x}) = 2\mathrm{e}^x - \cos(y) \arctan(x).$$

Damit erhalten wir $D^{(1,0)}f(\mathbf{0}) = 1$, $D^{(0,1)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(2,0)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(1,1)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(0,2)}f(\mathbf{0}) = 2$ und somit

$$T_{2,\mathbf{0}}f(x, y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0, 0) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} = x + \frac{1}{2} 2y^2 = x + y^2$$

Aufgabe 4 (Anwendung der Kettenregel)**.** Zeigen Sie Korollar 3.19 aus der Vorlesung, welches Folgendes besagt:

> *Seien $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ und $\phi : D_\phi \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbare Funktionen und $\phi(D_\phi) \subseteq D_f$. Dann gilt, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist und*
>
> $$\frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(\mathbf{t})) \frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{grad} f(\phi(\mathbf{t}))^T \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} \in D_\phi, i \in \{1, .., p\}.$$

Lösung: Die Kettenregel besagt, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist und dass

$$\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \circ \mathrm{d}\phi(\mathbf{t}),$$

wobei wir daran erinnern, dass $\mathrm{d}\phi(\mathbf{t}) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ und $\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Aus den Eigenschaften des total Differentials (Satz 3.10) wissen wir, dass für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{d}\phi(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(\mathbf{t})) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_j)$$

gilt[3]. Außerdem können wir $\phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(\mathbf{t})\mathbf{e}_j$ schreiben. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) &= (\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i) = (\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \circ \mathrm{d}\phi(\mathbf{t}))\,(\mathbf{e}_i) \\
&= \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\,(\mathrm{d}\phi(\mathbf{t})(\mathbf{e}_i)) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\left(\frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t})\right) \\
&= \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t})\mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \big(\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})(\mathbf{e}_i)\big)\frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial t_i}(\phi(\mathbf{t}))\frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t})
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus der Linearität des totalen Differentials folgt.

[3] man beachte, dass in dieser Zeile $\mathbf{e}_i$, der i-te kanonische Basisvektor, in $\mathbb{R}^m$ wohingegen $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^p$.