Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 12 (Bonus)

Das vorliegende Blatt wird als Bonus gewertet, d.h., jeder erreichte Punkt wird als Bonuspunkt gewertet, und soll auch zur Wiederholung des Stoffes dienen. Es wird in weiterer Folge noch Blätter 13 und 14 geben sowie ein weiteres Bonusblatt 15.
Anpassung: *Man beachte die Änderung bzgl. der Extremwerte in der Aufgabe sowie die hinzugefügten Präsenzaufgaben.*

Aufgabe 1. (10 Bonuspunkte)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (2P.)

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[-\pi, 1] \times [0, 2]$ (1P.),

(3) partielle Differenzierbarkeit; geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen an (1P.),

(4) totale Differenzierbarkeit; geben Sie gegebenenfalls die Jacobi-Matrix an (1P.),

(5) zweimalige stetige partielle Differenzierbarkeit (1P.).

Bestimmen Sie alle lokalen Minimastellen von f [1]. Verwenden hierzu, dass diese Punkte für eine partiell differenzierbare Funktion nur dort auftreten können, an denen der Gradient $\operatorname{grad} f$ von f verschwindet (1P.). Berechnen Sie außerdem

(7) das Integral $\int_{[0,3]\times[0,3]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$ (1P.).

Hinweis: Sie können die Stetigkeit in (1) auch mittels der anderen Punkte argumentieren.

Wiederholen Sie die Untersuchungen von (3)-(5) für folgende Funktion (2P.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Wichtige Hinweise: Abgabe des Blattes bis
Freitag, 11.1.2019, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

---

[1] Für eine Funktion $g : D \subseteq X \to \mathbb{R}$ heißt $\mathbf{x} \in D$ lokale Minimalstelle mit lokalem Minimum $f(\mathbf{x})$ falls ein $\varepsilon > 0$ existiert so dass $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{y})$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Hesse-Matrix von f aus Aufgabe 1 an allen Stellen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie diese auf Definitheit (positiv/negativ (semi-)definit bzw. indefinit) und diskutieren Sie den Zusammenhang Ihrer Ergebnisse mit den in Aufgabe 1) berechneten Extremwerten.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das 2-te Taylorpolynom $T_{2,\mathbf{x}}f$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x y^2 + \cos(y) \arctan(x)$$

an der Anschlussstelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ an.

Aufgabe 4 (Anwendung der Kettenregel)**.** Zeigen Sie Korollar 3.19 aus der Vorlesung, welches Folgendes besagt:

> *Seien $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ und $\phi : D_\phi \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbare Funktionen und $\phi(D_\phi) \subseteq D_f$. Dann gilt, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist und*
>
> $$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(\mathbf{t}))\frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{grad} f(\phi(\mathbf{t}))^T \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}), \qquad \mathbf{t} \in D_\phi, i \in \{1, .., p\}.$$