Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (3 Punkte) Seien U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Es existiere ein $M > 0$, so dass für alle $(x, y) \in U$ gilt $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)| \leq M$ und $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq M$. Beweisen Sie, dass f in jedem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in U$ stetig ist.

Hinweis: Addieren Sie eine geschickte Null*, so dass Sie $|f(x, y) - f(x_0, y_0)|$ zunächst mit der Dreiecksungleichung und anschließend durch komponentenweise Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung nach oben abschätzen können.*

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Zeigen Sie, durch Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen[1], dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0, 0)$ zweimal partiell differenzierbar ist. Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und totale Differenzierbarkeit. Überprüfen Sie, ohne zu rechnen, ob f zweimal stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe 3. (3 Punkte) Gegeben seien die Abbildungen

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f(x) = (x, 1, x^3), \\ &g : \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g(y_1, y_2, y_3) = (\sin y_1 - \ln y_2, e^{y_3}), \\ &h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h(z_1 z_2) = z_1 z_2. \end{aligned}$$

(1) Geben Sie die Jacobi-Matrix g an der Stelle $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 3)$ an.

(2) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $h \circ g \circ f$ im Punkt $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der *Kettenregel*

$$\mathrm{d}(f_1 \circ f_2)(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f_1(f_2(\mathbf{x}))\,(\mathrm{d}f_2(\mathbf{x}))\,,$$

wobei $f_1 : D_{f_1} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $f_2 : D_{f_2} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbar und $f_2(D_{f_2}) \subset D_{f_1}$. Berechnen Sie die Ableitung auch, indem Sie die Funktion $h \circ g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzieren.

Wichtige Hinweise: Abgabe von Aufgaben 1–3 (und gegebenenfalls der Bonusaufgabe) des Blattes bis
Freitag, 21.12.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

---

[1] die zweiten partiellen Ableitungen sind die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen, also der Funktionen

$$(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \qquad (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Man schreibt $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Aufgabe 4. (2 Bonuspunkte)

(1) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right)}.$$

Zeigen Sie, dass f eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* $\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$ ist, wobei $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

(2) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, n$ der Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \|x\|_2$.