Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 10, Lösungsvorschlag.

Bitte beachten Sie, dass es sich hierbei um eine *unkorrigierten* Lösungsskizze handelt. An einigen Stellen sind ausführliche Erklärungen eingefügt.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Ziel der Aufgabe ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ zu berechnen.

(a) (1P.) Argumentieren Sie warum die Funktion absolut uneigentlich integrierbar ist.

(b) (2P.) Betrachten Sie $F(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ und $G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ für $x \in [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass F, G wohldefiniert sind und dass $F(x) = G(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$.
(*Hinweis: Zeigen Sie $F' = G'$, wobei Sie F' mit Hilfe von Satz 2.54*[1] *berechnen können*).

(c) (1P.) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$ und schließen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Lösung:

(a) Auf jedem kompakten Intervall ist $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ stetig und somit integierbar. Da $1 + t^2 \leq \mathrm{e}^{t^2}$ gilt $h(t) = \frac{1}{1+t^2} \geq e^{-t^2}$ und da $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan(t) + C$ folgt mit $\lim_{t\to\pm\infty} \arctan(t) = \pm\frac{\pi}{2}$, dass h absolut uneigentlich integrierbar ist. Mit Lemma 2.42 ergibt sich also, dass auch f uneigentlich integrierbar ist.

(b) Die Integranden f_x in F und g_x in G sind jeweils differenzierbar (und damit insbesondere stetig) als Funktionen in t und somit existieren die Integrale für jedes fest x. Darüberhinaus sind die Funktionen $(x, t) \mapsto f_x(t)$, $(x, t) \mapsto \frac{\partial f_x}{\partial x}(x, t) = 2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$ stetig. Also können wir nach Satz 2.54 Integration (nach t) und Differential vertauschbar und wir erhalten

$$F'(x) = \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

und durch die Kettenregel, sowie dem Hauptsatz, $G'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Die Subsitution $tx = y$ liefert dann $F'(x) = G'(x)$. Um zu zeigen, dass $F = G$ genügt es, zu sehen, dass $F(0) = G(0)$ (Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch additive Konstante). Dass $F(0) = 0$ folgt daraus, dass $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(t)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(c) Da

$$\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{G(x)} = 2\sqrt{F(x)}$$

genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$ (dann gilt ja $\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{F(x)} = \sqrt{\pi}$ aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion). Dazu zeigen wir, dass

$$\lim_{x_n\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt = 0,$$

für beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$. Wir nutzen den Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral:

[1] Differenzierbarkeit von Parameterintegralen: Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x, \cdot)$ differenzierbar für alle $x \in [a, b]$ mit $(s, x) \mapsto \frac{d}{ds}f(x, s)$ stetig auf $[a, b] \times [c, d]$. Dann gilt, dass $s \mapsto \int_a^b f(x, s)\mathrm{d}x$ stetig differenzierbar ist und $\frac{d}{ds}\int_a^b f(x, s)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{d}{ds}f(x, s)\mathrm{d}x$.

Sei $B \subset \mathbb{R}^p$ zerlegbar und $f_n : B \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f_n \to f$ gleichmäßig ($n \to \infty$). Dann gilt, dass f integrierbar ist und $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Dazu betrachten wir eine beliebige Folge $((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ mit $x_n \to \infty$, $x_n > 0$ und entsprechend $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Man erkennt leicht, dass $f_n(t) \to 0$ für $n \to \infty$ und festes $t \in [0,1]$. Außerdem gilt wegen $\mathrm{e}^{-a} \leq \frac{1}{1+a}$, dass

$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\frac{1}{(1+t^2)(1+x_n^2(1+t^2))}| \leq \frac{1}{1+x_n^2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Da die Folge beliebig war folgt somit folgt aus dem Satz, dass $\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}x = 0$ und damit $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte +2 Bonuspunkte) Berechnen Sie zwei der folgenden Integrale. Argumentieren Sie gegebenenfalls auch in welchem Sinne diese existieren.

(a) $\int_M \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}(x,y)$, wobei $r > 0$ und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

(b) $\int_M x^3y - \ln(xy)\mathrm{d}(x,y)$, wobei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x^2\}$
Hinweis: Überlegen Sie in welchem Sinn das Integral "uneigentlich" existiert

(c) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ (*Hinweis: Wenden Sie Korollar 2.50 zweimal an, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen — im Korollar können Sie die Rolle von x und y vertauschen*).

Lösung:

(1) Man beachte, dass es sich hierbei um das Volumen einer Halbkugel handelt. Dies lässt sich mit Hilfe der Folgerung aus dem Satz von Fubini berechnen. Wir wollen dieses Argument noch einmal ganz genau ausführen. Dazu schreibe man

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-r,r], -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\}.$$

Da $\phi_1(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$ und $\phi_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ stetig in x sind, ist M messbar (dies wussten wir auch bereits aus vergangenen Übungsaufgaben) und da $f(x,y) = \sqrt{r^2-x^2-y^2}$ als stetige Funktion die Eigenschaften

- f ist integrierbar auf M
- $f(x,\cdot) : [\phi_1(x), \phi_2(x)] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar

erfüllt, ist $x \mapsto \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x$ integrierbar auf $[0,1]$ und es lässt sich das Integral berechnen durch

$$\int_{-r}^{r} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Mit Hilfe der Substitution $\sqrt{r^2-x^2}z = y$ erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\mathrm{d}y = (r^2-x^2)\int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}(r^2-x^2)$$

und somit

$$\int_M \sqrt{r^2-x^2-y^2}\mathrm{d}(x,y) = \int_{-r}^{r} \frac{\pi}{2}(r^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}r^3.$$

Wichtig: Wir bemerken, dass bei der Anwendung des Satzes von Fubini die wesentliche Eigenschaft ist, dass $f = (x,y) \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$ stetig ist. Eine solche Begründung "*die Voraussetzung des Satzes von Fubini ist erfüllt weil f stetig ist*" ist bei Aufgaben dieser Art — im Gegensatz zu der langen Ausführung oben — anzugeben.

(2) keine Wertung: Lösung wird gegebenenfalls im nächsten Tutorium besprochen

(3) Die Idee ist es die Integrationsreihenfolge mit Hilfe von Korollar 2.48 (Folgerung des Satzes von Fubini) zu vertauschen. Wir werden dies in Kürze begründen. Falls das Vertauschen zulässig ist, berechnen wir

$$\int_0^1 \int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^t \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(t)\mathrm{d}t = \cos(0) - \cos(1) = 1 - \cos(1).$$

Man überlegt sich zuerst in welchem Sinne das innere Integral existiert: Dieser Integrand ist zwar für $t = 0$ nicht definiert, allerdings können wir aber $t \mapsto \sin(t)/t$ an $t = 0$ (stetig) durch $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos'(0) = 1$ fortsetzen. Der wesentliche Grund für die Vertauschbarkeit der Integrale ist nun, dass die Funktion

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & x \in [0,1], t \in (0,x] \\ 1 & x \in [0,1], t = 0. \end{cases}$$

stetig auf $M = \{(x,t) : x \in [0,1], 0 \le t \le x\}$ ist[2]. Dann gilt nämlich nach Korollar 2.50, dass

$$\int_0^1 \int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_M f(x,t)\mathrm{d}(x,t) = \int_0^1 \int_0^t f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Da das Integral $\int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ nicht von endlichen vielen Funktionswerten des Integranden abhängt, ist $\int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei $a < b \le \infty$ und seien $f, f_n : [a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen so dass

- $f_n|_{[a,x]}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_{[a,x]}$ für alle $x \in (a,b)$,
- $f_n|_{[a,x]}$ ist integrierbar für alle $x \in (a,b)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
- es existiert $c \in (a,b)$ und eine uneigentlich integrierbare Funktion $g : [c,b) \to \mathbb{R}$ mit

$$|f_n(x)| \le g(x), \qquad \forall x \in [c,b), n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass f_n und f (absolut) uneigentlich integrierbar sind und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lösung: Dass die f_n's absolut integrierbar ist folgt bereits aus Aufgabe 3 von Blatt 8 (bzw. dem Lemma aus dem Kapitel über uneigentliche Integrale). Außerdem gilt, dass für jedes $x \in (a,b)$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert und somit auch die Ungleichung $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in (c,b)$ gilt. Nun folgt wiederum aus Aufgabe 3 Blatt 8, dass f uneigentlich integrierbar ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ und betrachte

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x\right| \le \left|\int_a^c f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_c^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x,$$

wobei wir zuerst die Linearität des Integrals und von Grenzwerten verwendet haben, sowie zweimal die Dreiecksungleichung (auch für das Integral). Der zweite Term lässt sich wegen folgender Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x)| + |f(x)| \le 2g(x)$$

[2]dies impliziert nämlich, dass sowohl $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ und $f(\cdot,t)$ integrierbar sind für alle $(x,t) \in M$. Man beachte, dass f als stetige Funktion auf einer messbaren, kompakten Menge integrierbar ist, Satz 2.25. Dass die Funktion messbar ist folgt

durch $2\int_c^b g(x)\mathrm{d}x$ abschätzen. Da nach Definition $\int_c^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tilde{b}\to b^+}\int_c^{\tilde{b}} g(x)\mathrm{d}x$ folgt, dass $\int_c^b g(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$ für hinreichend großes c (dies folgt wie im Beweis von Aufgabe 3 Blatt 8 — ist nämlich $\lim_{m\to\infty}\int_c^{b_m} g(x)\mathrm{d}x$ konvergent für eine Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $b_m < b$ und $b_m \to b$, so ist $(\int_c^{b_m} g(x)\mathrm{d}x)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge). Wähle ein solches c. Nach der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass der erste Term für alle $n \geq N$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Insgesamt folgt die Behauptung.

Bemerkung:Man beachte folgende Anwendung dieses Resultats: Wir haben in der Vorlesung bereits gesehen, dass obwohl die Folge x^n auf $[0,1]$ nicht gleichmässig konvergiert, die Grenzfunktion trotzdem integrierbar ist und die Grenzwertbildung mit dem Integral vertauscht werden kann. Dies kann mit der Übungsaufgabe abstrakt geschlossen werden. Es folgt zwar nur, dass die Grenzfunktion uneigentlich integrierbar ist, aber für das betrachtete Beispiel gilt, dass g sogar integrierbar gewählt werden kann woraus folgt, dass auch f integrierbar sein muss.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von f im Punkt $(0,0)$ existieren[3], dass f in $\mathbf{0}$ aber nicht Fréchet-differenzierbar ist.

<u>*Lösung:*</u> Nach Definition ist die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ im Punkt $\mathbf{x} = (0,0)^T$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\mathbf{x}+tv) - f(\mathbf{x})) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(tv) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^3v_1^2v_2}{t^2v_1+t^2v_2} = \frac{v_1^2v_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Für $v = \mathbf{0}$ gilt offensichtlich dass $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0}) = 0$. Wir wissen aus Satz 3.9, dass falls f an $\mathbf{0}$ total differenzierbar ist (d.h. Fréchet differenzierbar), gilt, dass

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}))(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2.$$

Außerdem gilt, dass $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ nach Definition der totalen Differenzierbarkeit eine lineare, stetige Abbildung ist, also hier $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0})$ linear sein müsste. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall.

Aufgabe 5. Zeigen Sie dass die für zwei an $x \in D$ total differenzierbare Funktionen $f, g : D \subset X \to Y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, mit D offen und X, Y Banachräume gilt, dass

$$\lambda f + g$$

total differenzierbar ist mit $\mathrm{d}(\lambda f + g)(\mathbf{x}) = \lambda\mathrm{d}f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}g(\mathbf{x})$.

<u>*Lösung:*</u> Seien $\rho > 0, \phi_f, \phi_g : B_\rho(\mathbf{0}) \to Y$ und $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = A_f, \mathrm{d}g(\mathbf{x}) = A_g \in L(X,Y)$ so dass $B_\rho(\mathbf{x}) \subset D$, $\phi_f(\mathbf{0}) = \phi_g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in Y$, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\phi_f(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{\phi_g(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \in Y$. und

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + A_f(\mathbf{h}) + \phi_f(\mathbf{h})$$
$$g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = g(\mathbf{x}) + A_g(\mathbf{h}) + \phi_g(\mathbf{h})$$

für alle $\mathbf{h} \in B_\rho(\mathbf{0})$ (man überlege sich leicht warum man ρ simultan für f und g wählen kann). Multiplizieren der ersten Gleichung mit λ und Addieren der Gleichung liefert

$$\lambda f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \lambda(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + (\lambda A_f + A_g)(\mathbf{h}) + (\lambda\phi_f(\mathbf{h}) + \phi_g(\mathbf{h})),$$

[3]d.h. f ist entlang aller Geraden, die durch den Nullpunkt gehen an $(0,0)$ differenzierbar

wobei wir die Linearität von A_f und A_g verwendet haben. Es folgt die Behauptung, da $\phi = \lambda\phi_f + \phi_g$ erfüllt, dass $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\phi(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \in Y$.

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die Funktion auf

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \sin(xy) \\ \frac{x}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$$

partielle und totale Differenzierbarkeit an $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen und die totale Ableitung $\mathrm{d}f(x, y)$ an. Berechnen Sie die Richtungsableitung an $(0, 0)^T$ für $v = (1, -1)^T$ und $v = (-1, 1)^T$.

Lösung: Die partiellen Ableitungen sind (sie existieren, weil f_1, f_2 in x bzw. y differenzierbar als Verknüpfung stetiger Funktionen).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy), \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3 y\cos(xy), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) &= \frac{x^2+y^2+1-2x^3}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{\partial f_2}{\partial}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+1)^2} \end{aligned}$$

Da diese Verknüpfungen von stetigen Funktionen (von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, man beachte, dass die Nenner keine Probleme machen) sind, ist f also stetig partiell differenzierbar und somit nach Satz 3.12 auch total differenzierbar. Das total Differential ist wegen Satz 3.9(2) gegeben durch

$$\mathrm{d}f(x,y)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei wir hierbei betonen, dass $\mathrm{d}f(x,y)$ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist (beschrieben durch die Matrix). Die Richtungsableitungen berechnen sich aus $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x})(v)$ nach Satz 3.9,

$$\mathrm{d}f(\mathbf{0})(1,-1)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{d}f(\mathbf{0})(1,-1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wichtige Hinweise: Abgabe von Aufgaben 1–4 des Blattes bis
Freitag, 14.12.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.