Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019

Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 10

Hinweis zu Aufgabe 4: Um zu zeigen, dass f nicht Fréchet differenzierbar an $(0,0)$ ist verwende man folgende Implikation (die unmittelbar aus der Definition folgt):

> Falls $f : X \to Y$ Fréchet differenzierbar/total differenzierbar an x, so existieren an x auch alle Richtungsableitungen und $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = (\mathrm{d}f(x))v$ für alle $v \in X$ (man beachte, dass nach Definition $A = df(x)$ eine <u>lineare</u> Abbildung von X nach Y sein muss).

Korrektur: Aufgabe 2)(b) wird aus der Wertung genommen — Sie bekommen hier einen weihnachtlichen Punkt automatisch gutgeschrieben (und somit 2 Punkte wenn Sie auch noch (a) oder (c) lösen. Falls Sie die neue Version von (b) lösen, bekommen Sie zwei Bonuspunkte).

Aufgabe 1. (4 Punkte) Ziel der Aufgabe ist das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ zu berechnen.

(a) (1P.) Argumentieren Sie warum die Funktion absolut uneigentlich integrierbar ist.

(b) (2P.) Betrachten Sie $F(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ und $G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ für $x \in [0,\infty)$. Zeigen Sie, dass F, G wohldefiniert sind und dass $F(x) = G(x)$ für alle $x \in [0,\infty)$.
(*Hinweis: Zeigen Sie $F' = G'$, wobei Sie F' mit Hilfe von Satz 2.54*[1] *berechnen können*).

(c) (1P.) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$ und schließen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 2. (2 Punkte +2 Bonuspunkte) Berechnen Sie zwei der folgenden Integrale. Argumentieren Sie gegebenenfalls auch in welchem Sinne diese existieren.

(a) $\int_M \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}(x,y)$, wobei $r > 0$ und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le r^2\}$.

(b) $\int_M x^3y - \ln(xy)\mathrm{d}(x,y)$, wobei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \le y \le x^2\}$
Hinweis: Überlegen Sie in welchem Sinn das Integral "uneigentlich" existiert

(c) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$ (*Hinweis: Wenden Sie Korollar 2.50 zweimal an, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen — im Korollar können Sie die Rolle von x und y vertauschen*).

Aufgabe 3. (2 Punkte) Sei $a < b \le \infty$ und seien $f, f_n : [a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen so dass

- $f_n|_{[a,x]}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_{[a,x]}$ für alle $x \in (a,b)$,
- $f_n|_{[a,x]}$ ist integrierbar für alle $x \in (a,b)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
- es existiert $c \in (a,b)$ und eine uneigentlich integrierbare Funktion $g : [c,b) \to \mathbb{R}$ mit

$$|f_n(x)| \le g(x), \qquad \forall x \in [c,b), n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass f_n und f (absolut) uneigentlich integrierbar sind und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

---

[1] Differenzierbarkeit von Parameterintegralen: Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(x,\cdot)$ differenzierbar für alle $x \in [a,b]$ mit $(s,x) \mapsto \frac{d}{ds}f(x,s)$ stetig auf $[a,b] \times [c,d]$. Dann gilt, dass $s \mapsto \int_a^b f(x,s)\mathrm{d}x$ stetig differenzierbar ist und $\frac{d}{ds}\int_a^b f(x,s)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{d}{ds}f(x,s)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitungen von f im Punkt $(0,0)$ existieren[2], dass f in 0 aber nicht Fréchet-differenzierbar (siehe Vorlesung Mittwoch 10.12.2018) ist.

Wichtige Hinweise: Abgabe von Aufgaben 1–4 des Blattes bis
Freitag, 14.12.2018, 14:00 Uhr, Briefkasten 110.
Bitte Tackern Sie Ihre Blätter und schreiben Namen und Matrikelnummer auf die erste Seite.
Das Blatt sowie mögliche Korrekturen finden Sie unter
`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

Aufgabe 5. Zeigen Sie dass die für zwei an $x \in D$ total differenzierbare Funktionen $f, g : D \subset X \to Y$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, mit D offen und X, Y Banachräume gilt, dass

$$\lambda f + g$$

total differenzierbar ist mit $\mathrm{d}(\lambda f + g)(\mathbf{x}) = \lambda \mathrm{d}f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}g(\mathbf{x})$.

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die Funktion auf

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \sin(xy) \\ \frac{x}{x^2+y^2+1} \end{pmatrix}$$

partielle und totale Differenzierbarkeit an $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie gegebenenfalls die partiellen Ableitungen und die totale Ableitung $\mathrm{d}f(x,y)$ an. Berechnen Sie die Richtungsableitung an $(0,0)^T$ für $v = (1,-1)^T$ und $v = (-1,1)^T$.

[2] d.h. f ist entlang aller Geraden, die durch den Nullpunkt gehen an $(0,0)$ differenzierbar