Dr. Felix Schwenninger
WS 2018/2019 Bergische Universität Wuppertal

Analysis II: Übungsblatt 1

Bemerkung: Das vorliegende Blatt beschäftigt sich mit Beispielen für metrische Räume und den dazugehörigen Konvergenzbegriff für Folgen. Die mit (*) markierten Aufgaben sind als Zusatzaufgaben zu verstehen.

Aufgabe 1. A) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften eine Metrik auf X definiert. Für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(M1') $d(x, y) = 0$ genau dann wenn $x = y$.

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

B) Seien (X_i, d_i) metrische Räume für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass für folgende Mengen Y und Abbildungen $\tilde{d}$ auch $(Y, \tilde{d})$ ein metrischer Raum ist.

- $Y \subset X_1$, $\tilde{d} = d_1|_{Y\times Y}$ definiert durch $d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d_1(x, y)$
- $Y = X_1$, $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$
- $Y = X_1 \times X_1$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

C) Bestimmen Sie, ob in den folgenden Fällen d eine Metrik auf X ist .

(a) X beliebige Menge, $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ mit $f : X \to \mathbb{R}$ injektiv

(b) $X = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = |x_1 - y_1|$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

(c) $X = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, $d(z_1, z_2) = |\arg(z_1) - \arg(z_2)|$
wobei $\arg(z)$ der eindeutig bestimmte Winkel ϕ in $[0, 2\pi)$ ist so dass $z = \mathrm{e}^{i\phi}$ ist (siehe Polarkoordinaten in Ana I).

Aufgabe 2. Betrachten Sie $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ wobei $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Zeigen Sie, dass (X, d) kein vollständiger metrischer Raum ist.
Hinweis: Ein metrischer Raum (X, d) ist nach Definition vollständig, falls jede Cauchyfolge in (X, d) konvergent ist, d.h. ein Grenzwert existiert.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge versehen mit der *diskreten Metrik* d_0, d.h.

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, d_0) ein metrischer Raum ist und geben Sie alle konvergenten Folgen in (X, d_0) an. Weiters charakterisieren Sie die offenen und abgeschlossenen ε-Kugeln $B_\varepsilon(x)$ für alle $x \in X$ und $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für metrische Räume (X, d):

(a) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge

(b) Jede Cauchyfolge ist *beschränkt*, d.h.,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } (X,d) \quad \Longrightarrow \quad (\exists y \in X, r > 0 \forall n \in \mathbb{N}: \quad d(x_n, y) < r)$$

Aufgabe 5. Sei $X = C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ stetig}\}$ und $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = x^{n+1} + x, \quad x \in [0,1]$$

eine Cauchyfolge in (X, d)? Ist (X, d) vollständig[1]?

Aufgabe 6 (*). Sei d eine Metrik auf $X = \mathbb{R}^2$. Sei $d_P : X \times X \to \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$d_P(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \text{es existiert } \lambda \in \mathbb{R} \text{ so, dass } \lambda x = y \text{ oder } x = \lambda y \\ d(x,0) + d(0,y) & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_P)$ ein metrischer Raum ist.

(b) Skizzieren Sie die abgeschlossenen ε-Kugeln $K_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ für $x_0 = (0,0)$ und $\varepsilon = 1$ bzw. $x_0 = (1,1)$ und $\varepsilon = 2$.

Aufgabe 7 (*). Sei Z die Menge aller Folgen $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ konvergiert. Zeigen Sie, dass Z zusammen mit der Abbildung

$$d : Z \times Z \to \mathbb{R}, ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

einen metrischen Raum (Z, d) definiert.
Hinweis: Sie können Satz 1.3 aus der Vorlesung verwenden und eine entsprechende Version für den vorliegenden Fall beweisen.
Bemerkung: Der Raum Z wird oft auch mit $\ell^2(\mathbb{N})$ oder $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ bezeichnet.

Wichtige Hinweise:

- *Für das erste Übungsblatt gibt es keine Abgaben. Die Aufgaben werden in der Woche 15.10. bis 19.10. in den Tutorien besprochen. Dieses Übungsblatt soweit mögliche Korrekturen finden Sie vorläufig unter*

  `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`.

  (die Webadresse wird sich für zukünftige Blätter noch ändern)

[1] definiert im Hinweis zu Aufgabe 2