Analysis II

Wintersemester 2018/19
Bergische Universität Wuppertal

Vorlesungsnotizen

Dr. Felix Schwenninger

18. März 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Bemerkungen

Die vorliegenden Aufzeichnungen zur Vorlesung *Analysis II* im Wintersemester 2018/19 an der Bergischen Universität Wuppertal sind als Ergänzung zum Besuch der Vorlesung vorgesehen. Diese beinhalten neben dem in der Vorlesung behandelten Stoff auch weiterführende Kommentare, die meist nur mündlich erwähnt wurden.

Es sei betont, dass diese Notizen geringfügig von dem in der Vorlesung präsentierten (und insbesondere angeschriebenen) Inhalt abweichen können, bzw. auch ein wenig darüber hinaus gehen. Unter anderem sind mehrere im Übungsbetrieb erarbeiteten Aufgaben in den Beispielen miteingebunden und einige der in der Vorlesung nur angeschnittenen Beweise werden hier detailliert behandelt. Andererseits sind ein paar wenige Beweise, die in der Vorlesung besprochen wurden, hier (noch) nicht aufgeführt. Wie schon während der Vorlesung, habe ich mir es auch in diesen Notizen nicht nehmen lassen, den einen oder anderen weiterführenden Kommentar einzufügen, der gerade den interessierten LeserInnen als Ausblick für den hier nicht behandelten Stoff dienen soll — Sie mögen mir diese Gedankenstriche nachsehen.

Daneben gibt es mehrere Randnotizen an jenen Stellen, an denen diverse Unklarheiten im Anschluss an die Vorlesung entstanden waren und ich Ihre Fragen damit auch detaillierter beantworten möchte. Ich habe mir Mühe gegeben, die Argumentation hier ausführlicher zu gestalten. Was die Nummerierungen betrifft, so weicht — trotz meiner Bemühungen dies so gering wie nur möglich zu halten — dieses Skriptum geringfügig von der Vorlesung ab.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Charlotte und Klaus-Michael Bätzel bedanken, die nicht nur einen Großteil des Skriptums sorgfältig korrekturgelesen haben, sondern auch einige Teil ihrer Mitschrift selbst getippt und mir dankenswerterweise zur Verfügung gestellt haben. Darüberhinaus gehen auch sämtliche der hier abgebildeten Bilder und Visualisierungen[1] auf Herrn Bätzel zurück. Diese stellen eine schöne Erweiterungen zu den in der Vorlesung besprochenen Skizzen dar. Ein weitere Vorteil ist, dass Herr Bätzel diese Bilder auch über die öffentlich zugänglichen Materialien der GeoGebra Community online zur Verfügung stellt: Sie finden diese unter

`https://www.geogebra.org/search/kbaetzel`

und können hier auch selbst mit den Parametern "herumspielen". Ich kann dies wärmstens empfehlen. Bei Fragen und Anregungen zu diesen Materialien können Sie Klaus-Michael Bätzel mit Hilfe der Nummer 1247307 und der entsprechenden Email-Endung der Uni kontaktieren.

Nichtsdestotrotz wird auch in dieser Version noch der ein oder andere (Tipp-)Fehler enthalten sein. Sehr gerne können Sie mich per Email auf solche aufmerksam machen. Ich werde mich bemühen den Text laufend zu ergänzen. Eine aktuelle Version des Skriptums ist hier zu finden

`https://www.math.uni-hamburg.de/home/schwenninger/ana2.html`

Felix Schwenninger — Wuppertal/Hamburg, 18. März 2019

[1] Diese wurden mit GeoGebra erstellt.

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Grundlagen

Inhaltlich beschäftigt sich die Vorlesung *Analysis II* mit Funktionen in mehreren Veränderlichen. Obwohl diese Veränderlichen in der Mehrzahl der praktischen Anwendungen reelle oder komplexe Zahlen sind, werden möglichst viele Erkenntnisse hier so formuliert, dass sie auch in allgemeineren Räumen als dem $\mathbb{R}^p$ oder $\mathbb{C}^p$ gelten. Die erste Verallgemeinerung besteht darin, Räume zu betrachten, in denen man *Abstände* und *Längen messen* kann — sogenannte *metrische Räume*. Es geht aber in diesem Zusammenhang nicht nur um ein *Messen*, sondern auch um die Verallgemeinerung von Begriffen wie beispielsweise der Konvergenz einer Folge: So definiert man in der Analysis I für reelle (bzw. komplexe) Zahlen $a, a_1, a_2, \ldots,$

> *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a genau dann, wenn*
>
> $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Da die Folgenglieder und der Grenzwert a reelle Zahlen sind, ist klar, was damit gemeint ist, dass der Abstand "*kleiner als ε*" wird. Sind dagegen die Folgenglieder aus "beliebigen" Mengen, so ist ein Abstandsbegriff wie in $\mathbb{R}$ nicht mehr zwangsläufig gegeben. Dies führt zu

Definition 1.1 (Metrik; metrischer Raum)**.** *Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(M1) $\forall x, y \in X\ \ d(x,y) \geq 0$ *und* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(M2) $\forall x, y \in X\ \ d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie)*

(M3) $\forall x, y, z \in X\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Dreiecksungleichung)*

Dann heißt d **Metrik** *auf X und (X,d)* **metrischer Raum***.*

Beispiel 1.2.

(a) $X = \mathbb{R}$ *mit* $d(x,y) = |x-y|$ *ist ein metrischer Raum.*

(b) $X = \mathbb{C}$ *mit* $d(x,y) = |x-y|$ *ist ein metrischer Raum.*

Die Dreiecksungleichung der Metriken in (a) und (b) stimmt mit der bereits bekannten Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ überein. Diese Metriken bezeichnen wir auch als die **Standard-Metrik** *auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Ab nun gilt die Konvention, dass immer die Standard-Metrik gemeint ist, falls wir keine konkrete Metrik auf (einer Teilmenge) $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ angeben.*

Für den Beweis der Dreiecksungleichung in den folgenden Beispielen (c) und (d) sei auf die nachfolgende Proposition 1.3 verwiesen.

(c) $X = \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$,

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist auch ein metrischer Raum. Die Metrik wird **euklidische Metrik** *genannt.*

(d) $X = \mathbb{C}^p = \mathbb{R}^{2p}$. *Wählt man* d_2 *formal wie in Beispiel (c), so kann man diese Metrik auch als* $d_2(x, y) = d(f(x), f(y))$ *mit* $f : \mathbb{C}^p \to \mathbb{R}^{2p}$ *und*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} z_p \\ \operatorname{Im} z_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} z_p \end{pmatrix}$$

definieren. Dies stimmt aber offensichtlich mit der wörtlich selben Definition wie in (c) überein, wenn man den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$ *durch den Absolutbetrag in* $\mathbb{C}$ *ersetzt.*

Bevor die Beispiele 1.2. (c) und (d) genauer behandelt werden können, gilt es, zwei Ungleichungen zu formulieren und zu beweisen.

Proposition 1.3 (Cauchy–Schwarzsche und Minkowskische Ungleichung)**.**
Seien $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$. *Dann gelten:*

(1) $$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{p} {a_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} {b_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ *(Cauchy–Schwarzsche Ungleichung)*

(2) $$\left(\sum_{i=1}^{p} (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{p} {a_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{p} {b_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ *(Minkowskische Ungleichung)*

Beweis. Seien $a = (a_i)_{i=1}^p$, $b = (b_i)_{i=1}^p$ und $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^p a_i b_i$ das Standardskalarprodukt. Mit dieser Produktschreibweise nimmt die erste Ungleichung die Gestalt $\langle a, b \rangle \leq \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} \cdot \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}}$ an.

(1) Zunächst sei erwähnt, dass das Standardskalarprodukt in beiden Komponenten linear und auch symmetrisch ($\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$) ist. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle a + \lambda b, a + \lambda b \rangle = \langle a, a + \lambda b \rangle + \lambda \langle b, a + \lambda b \rangle = \langle a, a \rangle + \lambda \langle a, b \rangle + \lambda^2 \langle b, b \rangle + \lambda \langle b, a \rangle \\ &= \langle a, a \rangle + \lambda^2 \langle b, b \rangle + 2\lambda \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

Für $\langle b, b \rangle \neq 0$ wähle man jetzt $\lambda = -\frac{\langle b,a \rangle}{\langle b,b \rangle}$. Dann lässt sich der Term zu

$$... = \langle a, a \rangle + \frac{\langle a, b \rangle^2}{\langle b, b \rangle} - 2\frac{\langle a, b \rangle^2}{\langle b, b \rangle} = \langle a, a \rangle - \frac{\langle a, b \rangle^2}{\langle b, b \rangle}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \langle a, a \rangle - \frac{\langle a, b \rangle^2}{\langle b, b \rangle} \Rightarrow \langle a, b \rangle^2 \leq \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle \Rightarrow \langle a, b \rangle \leq \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}}$$

weiter umformen. Für den Fall $\langle b, b\rangle = 0$ ist $b = 0$ und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ebenfalls erfüllt.

(2) Es gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right) = \sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)\cdot a_i + \sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)\cdot b_i$$
$$\overset{\text{Cauchy–Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{p}{a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{p}{b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus nach Division durch $\left(\sum\limits_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ folgt, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{p}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{p}{a_i}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{p}{b_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Kommentar: Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung für komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}^p$ lautet

$$|\langle a, b\rangle| \leq \langle a, a\rangle^{\frac{1}{2}}\langle b, b\rangle^{\frac{1}{2}},$$

wobei hier analog zum Beweis von Proposition 1.3 die Skalarproduktschreibweise $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{p}\overline{a_i}\,b_i$ verwendet wird[1]. Offensichtlich verallgemeinert diese Ungleichung den reellen Fall aus Proposition 1.3 und lässt sich völlig analog beweisen. Ein alternativer Beweis kann mit Hilfe von Determinanten gegeben werden: Betrachtet man für $a, b \in \mathbb{C}^p$ die symmetrische 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix}\langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \overline{\langle a, b\rangle} & \langle b, b\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\langle a, a\rangle & \langle a, b\rangle \\ \langle b, a\rangle & \langle b, b\rangle\end{pmatrix},$$

so sieht man durch Ausmultiplizieren, dass $v^H A v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{C}^2$ ist, wobei v^H hier den konjugiert transponierten Vektor bezeichnet. Die Matrix A is demnach nicht negativ semidefinit, woraus mit dem Hauptminorenkriterium aus der Linearen Algebra folgt, dass die Determinante von A größer oder gleich 0 ist:

$$\det(A) = \langle a, a\rangle \cdot \langle b, b\rangle - |\langle a, b\rangle|^2 \geq 0.$$

Für die in Beispiel 1.2 (c) und (d) eingeführte d_2-Norm gilt nun mit der Minkowskischen Ungleichung, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{p}|x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{p}\left|\underbrace{x_i - y_i}_{=:a_i} + \underbrace{y_i - z_i}_{=:b_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\sum_{i=1}^{p}|x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{p}|y_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also ist für d_2 auch die Dreiecksungleichung erfüllt. Diese Metrik heißt die euklidische Metrik
.

[1] Die Cauchy–Schwarz-Ungleichung gilt allgemein für Vektorräume über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit einem *Skalarprodukt*.

Beispiel 1.4 (Fortsetzung von Beispiel 1.2.).

(e) Zu jeder Menge X gibt es eine Metrik, die sogenannte diskrete Metrik. Sie ist durch

$$d_0(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

festgelegt.

(f) Für $X = \mathbb{R}^p$ oder $X = \mathbb{C}^p$ heißt $d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_p - y_p|\}$ die Maximumsmetrik.

(g) Auf $X = \mathbb{R}^p$ oder $X = \mathbb{C}^p$ kann man neben den bisher aufgeführten Metriken auch die 1-*Metrik durch*

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$$

definieren. Die folgende Abbildung 1.1 zeigt warum sie auch New-York- oder Manhattan-Metrik genannt wird.

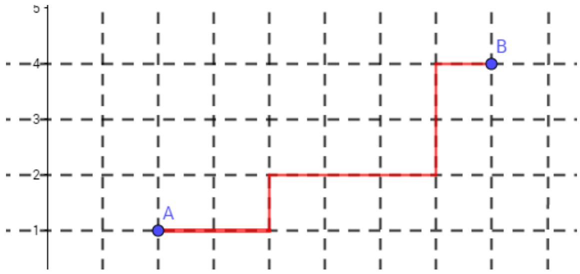

Abbildung 1.1: Weg von A nach B der Länge 9 in der Manhattan-Metrik.

*(g) * Allgemeiner kann man für $q \in [1, \infty)$ auf $\mathbb{R}^p$ oder $\mathbb{C}^p$ die Metrik*

$$d_q(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

definieren. Für den Beweis der Dreiecksungleichung ist allerdings eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz Ungleichung von Nöten, die **Hölder-Ungleichung**[2].

(h) Weitere Beispiele sind auf dem Übungsblatt 1 zu finden. Insbesondere sei betont, dass für einen metrischen Raum (X, d) auch jede Teilmenge $Y \subseteq X$ zusammen mit der Einschränkung $d|_{Y \times Y}$ von d auf $Y \times Y$ einen metrischen Teilraum definiert.

Wie man anhand der diskreten Metrik bzw. der Metrik auf Teilräumen, Beispiel 1.4(h) sieht, benötigt man für die Definition eines metrischen Raumes keinerlei algebraische Struktur, wie beispielsweise eine Vektorraumstruktur. In Abschnitt 1.5 werden wir allerdings spezielle metrische Räume kennenlernen — sogenannte normierte Räume — bei denen dies sehr wohl eine solche Struktur gegeben ist.

[2]Für $a_1, \ldots a_p, b_1, .., b_n \in \mathbb{C}$ und $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{p} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{p} |b_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}$.

Mit Hilfe der Metrik kann der Begriff der Konvergenz einer Folge analog zu Folgen von reellen Zahlen definiert werden. Es sei daran erinnert, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X nichts anderes als eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach X ist, also

$$\mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n.$$

Alternativ kann man eine Folge auch als Familie verstehen. Manchmal schreiben wir auch "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$", wenn wir sagen wollen, dass es sich um eine Folge in X handelt[3].

Definition 1.5 (Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X* **konvergiert gegen (den Grenzwert)** *x genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : \; d(x_n, x) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Man schreibt hierfür

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \qquad \textit{oder} \qquad x_n \to x \quad (n \to \infty),$$

bzw. $\lim_{n\to\infty} x_n$, wenn klar ist, welche Metrik d gemeint ist[4].

Bemerkung 1.6. *Die Konvergenz einer Folge im metrischen Raum lässt sich einfach durch die Konvergenz in $\mathbb{R}$ mit der Standard-Metrik charakterisieren.*

$$(x_n) \xrightarrow{d} x \iff (d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

Beweis: Es sei $a_n := d(x_n, x)$. "$\Longrightarrow$ -Richtung": Dann folgt aus $(x_n) \xrightarrow{d} x$, dass $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N \quad a_n < \varepsilon$. Dies bedeutet, dass (a_n) eine Nullfolge ist.
"$\Longleftarrow$ -Richtung": Weil (a_n) eine Nullfolge ist, gilt (1.1), also $(x_n) \xrightarrow{d} x$.

Bemerkung 1.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann gilt*

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

(ii) $(x_n) \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow (x_{n+k}) \xrightarrow{d} x$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

(iii) Wenn $(x_n) \xrightarrow{d} x$, dann konvergieren auch alle Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x.

(iv) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann wenn jedeTeilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat.

Diese Behauptungen folgen sofort aus Bemerkung 1.6 und den Resultaten für Folgen von reellen Zahlen aus der Analysis I.

Definition 1.8 (Cauchy-Folge)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge in X heißt* **Cauchy-Folge (CF)** *genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}_0\, \forall n, m > N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Beispiel 1.9.

[3] Es sei hier betont, dass dies eine Notation ist und nicht bedeutet, dass eine Folge eine Menge ist! Vielmehr ist die *Menge der Folgenglieder* eine Teilmenge von X — also das Bild der Funktion eine Teilmenge von X.

[4] Im Folgenden werden wir deshalb meist auf diese Notation verzichten, um zu betonen, dass die Konvergenz i.A. von der betrachteten Metrik abhängt

(a) *Für* $X = \mathbb{R}$ *und* $d(x,y) = |x-y|$ *sind die Cauchy-Folgen und die konvergenten Folgen diejenigen aus Analysis I.*

(b) *Entsprechendes wie in (a) gilt für* $X = \mathbb{C}$ *und* $d(x,y) = |x-y|$ *(Absolutbetrag).*

(c) *Betrachte* $X = \mathbb{R}^3$ *mit der euklidischen Metrik. Es sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Folge mit*

$$x_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ (1+\frac{1}{n})^n \\ \mathrm{e}^{-n} \end{pmatrix}.$$

Sie hat den Grenzwert

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix},$$

wie man daran erkennen kann, dass

$$d_2(x_n,x)^2 = \sum_{i=1}^{3}(x_i - x)^2 = \left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)^2 + \left(e^{-n} - 0\right)^2$$

eine Nullfolge bildet. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auch eine Cauchy-Folge (CF).*

(d) *Sei* X *eine beliebige Menge mit der diskreten Metrik (siehe Beispiel 1.4 (e)). Dann konvergieren genau die konstanten Folgen, d.h. die Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n = \widetilde{x}$ *mit* $\widetilde{x} \in X$*, siehe Blatt 1, Aufgabe 3.*

(e) *Sei* $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ *stetig auf* $[0,1]\}$ *und* $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$*. Mit dieser Norm ist* (X, d_∞) *ein metrischer Raum. Es stellt sich nun die Frage, ob die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_n(x) := x^n$ *in* X *konvergiert. Um sie zu beantworten, überlegt man sich zunächst, dass in* $\mathbb{R}$ *bezüglich der Metrik* $d(x,y) = |x-y|$ *für* $x = 1$ *die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen 1 und für* $0 \leq x < 1$ *gegen* 0 *konvergiert. Deshalb liegt es nahe, eine Grenzfunktion* g *durch*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \in [0,1) \end{cases}$$

zu definieren. Obwohl g *so konstruiert wurde, dass* (f_n) *punktweise gegen* g *konvergiert, gilt dies keineswegs bezüglich* d_∞*. Hierfür wäre es notwendig, dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* g *konvergiert. Dies meint (siehe Analysis I): Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion* g *genau dann, wenn* $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g(x)| \to 0$*. Dies bedeutet in der Schreibweise von 1.5:* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{d_\infty} g$*. Nun sieht man aber sofort, dass die oben konstruierte Funktion* g *an der Stelle* $x = 1$ *nicht stetig ist, also nicht in* X *liegt. Also konvergiert die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwar punktweise gegen* g*, nicht aber gleichmäßig. Dieses Ergebnis passt zu dem bekannten Sachverhalt, dass bei gleichmäßiger Konvergenz der Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist. Auch folgt nach dem Cauchy-Kriterium, dass die* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keine Cauchy-Folge bilden.*

Zur Erinnerung: In der Analysis I wurde folgende Äquivalenz gezeigt.

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig gegen* g.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

(3) $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_\infty = 0$

und dass g in diesem Fall g stetig ist sowie (f_n) *auch punktweise gegen g konvergiert.*

Proposition 1.10. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in X, sowie* $x, y \in X$*. Dann gilt*

(i) *Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, dann ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auch eine Cauchy-Folge.*

(ii) *Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*eine Cauchyfolge ist, dann ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auch* **beschränkt***,* *d.h. es existieren* $x_0 \in X$ *und* $r > 0$ *so dass* $d(x_n, x_0) < r$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *ist.*

(iii) *Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen x konvergiert und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen y, dann konvergiert* $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $d(x, y)$*.*

Beweis. Wir beweisen hier nur (iii). Die anderen Punkte sind Übung. Zuerst zeigen wir die *umgekehrte Dreiecksungleichung*. Aus der Dreiecksungleichung und der Symmetrie von d folgt für alle $x, y, z \in X$:

$$d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z) \quad \text{und} \quad d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z).$$

Somit gilt $|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z)$. Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x und setze $z = x_n$ in der umgekehrten Dreiecksungleichung. Dann folgt, dass für jede konstante Folge y die Aussage in (iii) gilt. Die allgemeinere Aussage für Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert y folgt nun aus der umgekehrten Dreiecksungleichung auf $\mathbb{R}$ (bezüglich der euklischen Metrik)

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)|,$$

und dem bereits Bewiesenen. □

Die Umkehrung von (ii) in Proposition 1.10 gilt nicht, denn die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist zwar beschränkt, aber keine Cauchy-Folge. Ferner ist aus Analysis I bekannt, dass jede konvergente Folge (in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$) zwar eine Cauchy-Folge ist, aber auch die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt. So lässt sich beispielsweise $\sqrt{2}$ durch eine Folge rationaler Zahlen annähern, ihr Grenzwert selbst ist aber irrational. Diese Überlegungen führen zu

Definition 1.11. *Ein metrischer Raum (X,d) heißt* **vollständig***, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert, d.h. wenn folgende Aussage gilt:*

$$\begin{aligned} &(\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon) \\ \Longrightarrow\ &(\exists x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \quad d(x_n, x) < \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Beispiel 1.12.

(a) $(\mathbb{R}, d_2)$ *ist vollständig. (Anmerkung: Für* $p = 1$ *stimmen in* $\mathbb{R}^p$ *die Metriken* d_1*,* d_2 *und* d_∞ *überein.).*

(b) *Weder* $(\mathbb{Q}, d_2)$ *noch* $(\mathbb{Q}^p, d_2)$ *sind vollständig.*

(c) $X = C[0, 1]$*, d.h. der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall* $[0, 1]$ *ist mit* d_∞ *vollständig, siehe Cauchy-Kriterium aus der Analysis I bzw. Beispiel 1.9(e).*

(d) $X = \mathbb{R}$ *ist weder bezüglich der Metriken* $d^1(x, y) = |\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}|$ *noch* $d^2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ *vollständig.*

(e) *Die Menge von Folgen von reellen Zahlen*

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

versehen mit

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

ist ein vollständiger, metrischer Raum. Es sei bemerkt, dass es sich bei $\ell^1(\mathbb{N})$ um einen unendlich-dimensionalen Vektorraum handelt. Siehe Übungsblatt 1.
Ähnlich lässt sich zeigen, dass auch

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \ \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\} \quad \text{mit } d_2((a_n), (b_n)) = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(a_n) : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\} \quad \text{mit } d_\infty((a_n), (b_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|,$$

vollständige metrische Räume sind. Um die Dreiecksungleichung für $\ell^2(\mathbb{N})$ zu zeigen, verwendet man die Cauchy–Schwarz-Ungleichung.

Lemma 1.13. *Sei $a = (a_1, ..., a_p)^T \in \mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{C}^p$. Dann gilt*

$$\max\{|a_1|, ..., |a_p|\} \underset{(1)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{p} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{p} |a_i| \underset{(3)}{\leq} p \cdot \max_{i=1,\dots p} \{|a_i|\}.$$

Beweis. Ungleichungen (1) und (3) sind offensichtlich. Ungleichung (2) erhält man leicht durch Quadrieren und "Ausmultiplizieren". □

Satz 1.14 (Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^p$ bezüglich d_1, d_2 und d_∞)**.** *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^p$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $(x_n) \xrightarrow{d_1} x$

(2) $(x_n) \xrightarrow{d_2} x$

(3) $(x_n) \xrightarrow{d_\infty} x$

(4) $\forall m \in \{1, \dots, p\} : \ x_{n,m} \xrightarrow{d=|\cdot-\cdot|} x_m \ (n \to \infty)$, *wobei* $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,p})^T \in \mathbb{R}^p$.

Beweis. Die Beweise ergeben sich im Wesentlichen unmittelbar aus Lemma 1.13.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2):

$$(x_n) \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow d_1(x_n, y) \to 0 \overset{\text{Lem.1.13}}{\Longleftrightarrow} d_2(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow (x_n) \xrightarrow{d_2} x$$

(3) $\Longrightarrow$ (4): Laut Voraussetzung gilt $d_\infty(x_n, x) \to 0$. Weil damit

$$\max\{|x_{n,1} - x_1|, |x_{n,2} - x_2|, \dots, |x_{n,p} - x_p|\} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

muss auch jedes einzelne Element der Mengenklammer gegen Null gehen, was Aussage (4) entspricht.
(4) $\Longrightarrow$ (3): Bedingung (4) heißt:

$$\forall m \in \{1, ..., p\} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_m \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_m \quad |x_{n,m} - x_m| < \varepsilon$$

Zum Nachweis von (3) ist hingegen zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \widetilde{N} \in \mathbb{N} \; \forall n \geq \widetilde{N} \quad \max_{i=1,\ldots,p} \{|x_{n_i} - x_i|\} < \varepsilon$$

Setzt man $\widetilde{N} = \max\{N_m : m = 1, \ldots, p\}$, so ist die geforderte Bedingung erfüllt. □

Bemerkung 1.15. *Satz 1.14 erlaubt es, die Konvergenz in $\mathbb{R}^p$ bezüglich der Metriken d_i ($i = 1, 2, \infty$) mit Hilfe der aus Analysis I bekannten Resultate für die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen zu untersuchen. Man spricht in diesem Zusammenhang von der "Betrachtung der einzelnen Komponenten". Es ist jedoch zu beachten, dass dies nicht für beliebige metrische Räume zutrifft, wie die Beispiele 1.9 (e) und 1.12 (e) zeigen: So gilt für die Folge (von Folgen) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\ell^1(\mathbb{N})$, definiert durch*

$$x_n = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n\text{-tes Folgenglied}}, 0, \ldots), \qquad n \in \mathbb{N},$$

dass die Folge der einzelnen Komponenten $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ gegen 0 konvergiert. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst konvergiert aber nicht, da für in Frage kommenden Grenzwert $x = \mathbf{0}$, die Nullfolge, (Man überlege sich, warum das der einzig mögliche Grenzwert ist.), gilt, dass

$$d_1(x_n, \mathbf{0}) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies widerspricht aber nach Bemerkung 1.6 der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathbf{0}$.

Korollar 1.16. *Sei $X = \mathbb{R}^p$. Dann ist X bezüglich der Metriken d_i ($i = 1, 2, \infty$) vollständig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d_i). Dann folgt wegen Lemma 1.13., dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch bezüglich d_∞ eine Cauchy-Folge ist. Aufgrund der Definition von d_∞ sind dann $\forall m \in \{1, ..., p\}$ die $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Weil die Menge der reellen Zahlen versehen mit der Standard-Metrik vollständig ist, konvergieren diese Cauchy-Folgen gegen die Grenzwerte x_m $(n \to \infty)$ $\forall m \in \{1, \ldots, p\}$. Damit konvergiert nach Satz 1.14 auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d_i gegen $x = (x_1, \ldots, x_p)^T$. □

KOMMENTAR: Wir haben uns in Lemma 1.13, Satz 1.14 und Korollar 1.16 auf die Metriken d_1, d_2 und d_∞ beschränkt. Wie in Beispiel 1.4 (f) aufgeführt, lassen sich auch Metriken d_q für $q \in [1, \infty)$ entsprechend definieren. Auch für die daraus resultierenden metrischen Räume gilt die entsprechende Aussage von Satz 1.14 und Korollar 1.16. Die Lemma 1.13 entsprechenden Ungleichungen können, mit etwas mehr Aufwand, auch gezeigt werden.

1.2 Topologie metrischer Räume

In metrischen Räumen ist der Begriff der Kugel zentral, weil sich z.B. der Begriff der Konvergenz einer Folge mit Hilfe von Kugeln beschreiben lässt. Vergleichbares gilt auch für den Begriff der Stetigkeit. Nun hat die Mathematik einen weiteren Abstraktionsprozess vollzogen, den von den metrischen zu den topologischen Räumen (griech. *topos*: Ort, Platz). Zentrale Begriffe in diesen neuen Räumen sind Offenheit, Abgeschlossenheit, Häufungspunkte und Ränder von Mengen. Ziel dieses Abschnittes ist es aber nicht, topologische Räume in ihrer Allgemeinheit einzuführen, sondern zu einem vertieften Verständnis metrischer Räume zu gelangen.

Definition 1.17. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $r > 0$. Dann heißt $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$ die* **offene Kugel** *mit Radius r um den Mittelpunkt x (bzw. "die offene r-Kugel um x"). Entsprechend nennt man $K_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ die* **abgeschlossene Kugel** *mit Radius r und Mittelpunkt x.*
Falls nicht aus dem Kontext klar ist, bezüglich welcher Metrik die Kugel zu verstehen ist, so schreiben wir auch $B_\varepsilon^X(x)$ bzw. $B_\varepsilon^d(x)$.

Beispiel 1.18. *(a) Sei $X = \mathbb{R}$ und $d = d_2$. Sei $a < b$. Dann ist das offene Intervall $I = (a,b)$ eine offene Kugel mit dem Radius $\frac{b-a}{2}$ und dem Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$ und das Intervall $I = [a,b]$ die entsprechende abgeschlossene Kugel.*

(b) Für $X = \mathbb{R}^3$ und $d = d_2$ ist $B_1(0)$, d.h. die Menge

$$B_1(0) = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

genau die Kugel, die unserer Anschauung entspricht, siehe Abbildung 1.2.

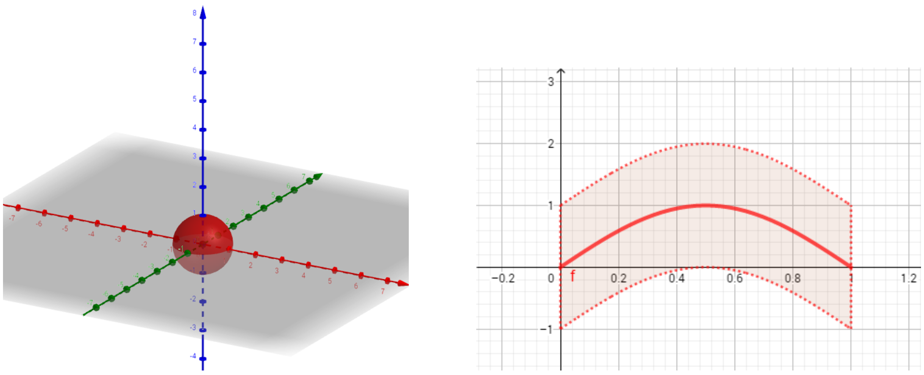

Abbildung 1.2: Die d_2-Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ (links) und $B_1^{d_\infty}(\sin) \subseteq C[0,1]$ (rechts)

(c) Sei $X = C[0,1]$, $d = d_\infty$ und $f(x) = \sin(\pi x)$. Dann sieht $B_1(f)$ wie in Abbildung 1.2 aus.

(d) Sei $X = \mathbb{R}$, $d = d_2$ und $M = (a,b)$ mit $a < b$. Dann ist M offen. Wählt man nämlich für $x \in (a,b)$ als Radius $r = \min\{x-a, b-x\}$, so ist $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\} \subseteq (a,b)$

(e) $M = (a,b]$ ist nicht offen, weil für alle $\varepsilon > 0$ zwar $b + \frac{\varepsilon}{2} \in B_\varepsilon(b)$ gilt, nicht jedoch $b + \frac{\varepsilon}{2} \in (a,b]$.

(f) Sei $X = \mathbb{R}^2$. Die Kugeln zu $\varepsilon = 1$ haben bezüglich der drei Metriken d_1, d_2 und d_∞ die Gestalt wie in Abbildung (f) skizziert. Sowohl die Anschauung als auch Lemma 1.13 ergeben sofort

$$B_1^{d_1}(0) \subseteq B_1^{d_2}(0) \subseteq B_1^{d_\infty}(0).$$

(g) Die Frage, ob offene Kugeln tatsächlich offen sind, ist zu bejahen. Dies wird in den Übungen gezeigt.

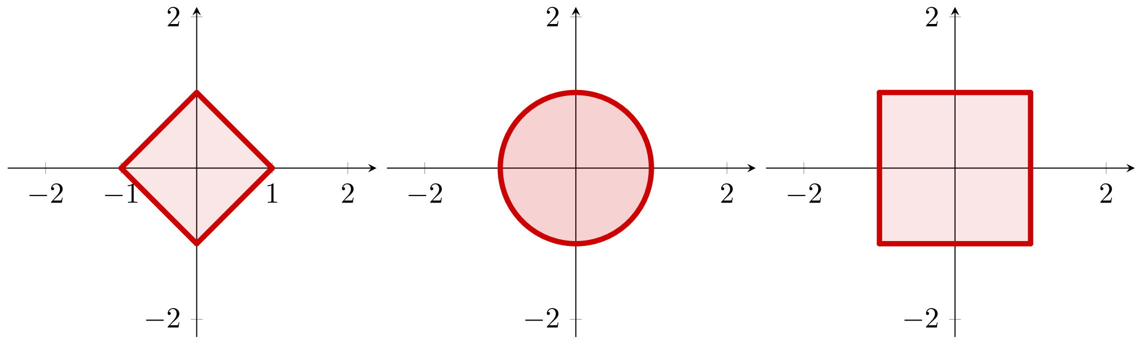

Abbildung 1.3: Die Einheitskugeln $B_1^{d_1}(0)$ (links) $B_1^{d_2}(0)$ (Mitte) $B_1^{d_\infty}(0)$ (rechts)

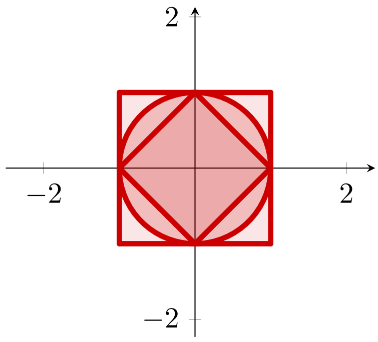

Abbildung 1.4: Die Teilmengenrelation zwischen den Einheitskugeln aus Abbildung 1.3.

(h) Dass Kugeln in einem metrischen Raum im Allgemeinen sehr unterschiedliche Gestalt annehmen können, zeigt insbesondere das Beispiel der **Paris-Metrik** *(auch "SNCF-Metrik*[5] *oder "Eisenbahn-Metrik" genannt). Wir verweisen auf das Übungsblatt 1.*

KOMMENTAR: Man überlege sich das Aussehen der Kugeln in der d_q Metrik, die in Beispiel 1.4(g), erwähnt wird (alternativ zeichne man die 1-Kugeln um 0 mit Hilfe von GeoGebra.
Weiterhin überlege man sich Folgendes: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

für positive Zahlen a, b. Dann definiert

$$d_2(x, y) = d_2(Ax, Ay)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Welche geometrische Form nehmen die Kugeln bezüglich dieser Metrik an? Was kann man in diesem Zusammenhang über allgemeinere Matrizen $A \in \mathbb{R}^2$ aussagen?

Bemerkung 1.19. *Sei (X, d) metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Dann kann man die Konvergenz der Folge gegen x jetzt so formulieren:*

$$x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \{x_n : n \geq N\} \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Definition 1.20 (Offene Mengen)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$. Dann heißt M* **offen**, *falls*

$$\forall x \in M\ \exists \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(x) \subseteq M.$$

[5] bezugnehmend auf die französische Eisenbahngesellschaft SNCF.

Um hervorzuheben, bezüglich welches (metrischen) Raumes eine Menge offen ist, sprechen wir gegebenenfalls auch davon, dass eine Menge M **offen in** X *ist.*

Satz 1.21 (Hausdorffsches Trennungsaxiom)**.** *In jedem metrischen Raum lassen sich zwei verschiedene Punkte durch offene Menge voneinander trennen, d.h. $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists O, V \subseteq X$ offen, so dass $x \in O, y \in V$ und $O \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Weil gemäß Beispiel 1.20 (c) die offenen Kugeln offene Mengen sind, genügt es, ein $r > 0$ zu finden, so dass $B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$. Wähle $r = \frac{d(x,y)}{3} > 0$. Dann ist

$$B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset.$$

Angenommen, es gäbe ein z mit $z \in B_r(x)$ und $z \in B_r(y)$. Dann gilt

$$3r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = 2r,$$

was wegen $r > 0$ einen Widerspruch darstellt. □

Bemerkung 1.22. *In allgemeinen topologischen Räumen, die nicht mehr notwendigerweise auf dem Begriff der "offenen Kugel" basieren (siehe die nachfolgende Bemerkung zu Satz 1.23), gibt es noch weitere "Möglichkeiten" zwei Elemente (oder auch zwei Mengen) trennen. Die in Satz 1.21 gesehene Eigenschaft ist nur eine spezielle — aber mitunter die wichtigste — Variante davon. Bei einer solchen Verallgemeinerung von metrischen Räumen lässt sich dann aber die obige Trennungseigenschaft nicht mehr beweisen; sie muss vielmehr gefordert werden. Dies erklärt, warum es in Satz 1.21 "Axiom" heißt, obwohl die Aussage hier im Kontext metrischer Räume bewiesen wurde.*

Die im folgenden Satz bewiesenen Eigenschaften sind fundamental für viele Argumente, die wir im weiteren Verlauf des Kapitels verwenden werden.

Satz 1.23 (Grundlegende Eigenschaften offener Mengen)**.** *Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt*

(T1) $\emptyset$ und X sind offen.

(T2) Falls $O_1, ..., O_n \subseteq X$ offen sind, dann ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ offen.

(T3) Sei I eine Indexmenge und $(O_i)_{i \in I}$ offen für alle $i \in I$. Dann ist auch $\bigcup_{i \in I} O_i$ offen.

Beweis. (T1): Die leere Menge ist trivialerweise offen und X selbst ist auch offen, weil alle Kugeln um x mit dem Radius 1 selbstverständlich auch in X enthalten sind.
(T2): Seien $O_1, ..., O_n$ offen und $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. Laut Voraussetzung existieren für alle $i = 1, \dots, n$ Radien r_i mit $B_{r_i}(x) \subseteq O_i$. Da die Anzahl dieser Radien endlich ist, existiert unter ihnen das Minimum $r := \min \{r_1, ..., r_n\} > 0$. Da diese Kugel in allen O_i enthalten ist, ist sie auch Teilmenge des endlichen Schnitts.
(T3): Für jedes x aus der Vereinigung der O_i gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann folgt

$$\exists j_0 \in I \ \exists x \in O_{j_0} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists B_\varepsilon(x) \subseteq O_{j_0} \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i.$$

□

KOMMENTAR: Nach den bisherigen Betrachtungen kann die Frage aufgeworfen werden, weshalb der Begriff der offenen Menge so stark betont wurde. Schließlich beruht dieser "lediglich" auf dem "Baustein" der (offenen) Kugeln bezüglich der Metrik (siehe Definition 1.17) und man könnte meinen, dass die Kenntnis der Kugeln bereits völlig ausreicht, um die Topologie eines Raumes zu beschreiben (Man denke an das Aussehen der Kreise bezüglich der verschiedenen Metriken, Beispiel 1.18(c)).
Weshalb also der Begriff der offenen Menge? Dies kann man in mehrerlei Hinsicht begründen. Einerseits kann ein mathematischer Begriff "nützlich" und somit sinnvoll sein, wenn dieser Zusammenhänge zu Tage bringt und somit Strukturen erkennen lässt. In den nachfolgenden Resultaten und Begriffsbildungen werden offenen Mengen eine solche Rolle einnehmen. Trotzdem ist klar, dass man in all dem, was hier zu metrischen Räumen behandelt wird, auch völlig auf den Begriff der offenen Menge verzichten könnte — zum Preis, dass vieles länger und umständlicher zu formulieren wäre. Andererseits ist das Konzept von metrischen Räumen auch in gewisser Weise begrenzt und kann nicht alle Phänomene, die wir bereits in der Analysis kennengelernt haben, beschreiben: So ist die Frage, ob man die *punktweise Konvergenz* einer Folge von Funktionen $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [6] mit Hilfe einer passenden Metrik beschreiben kann, zu verneinen (und es wird auf die Funktionalanalysis bzw. Topologie Vorlesungen verwiesen). Obwohl wir also gesehen haben, dass metrische Räume ein elegante Sprache liefern, um verschiedene Sachverhalte (wie Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$, Konvergenz von Vektoren, usw.) allgemein zu betrachten, so gibt es offenbar Konzepte (wie eben genannte punktweise Konvergenz), die nicht kompatibel mit dem Begriff des metrischen Raumes sind. Es gibt also "Landschaften", die nicht in unsere "standardisierten Landkarten" passen oder "Gebäude", die nicht mit den "Kugeln" als Bausteine zu verstehen sind. Auch deshalb kann ein Begriff, der auf den ersten Blick als überflüssig erscheint, sehr hilfreich sein. So stellt sich heraus, dass offene Mengen selbst als ein "Grundbaustein" eingesetzt werden können: Satz 1.23 gibt Aufschluss darüber, *wie* dies funktioniert: Dieser Beweis geht davon aus, dass man bereits "weiß", was offene Mengen in einem metrischen Raum sind und zeigt, dass dann die Eigenschaften (T1) bis (T3) erfüllt sind. In der Topologie geht man hingegen den umgekehrten Weg: So betrachtet man zu einer gegebenen Menge X eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge von X, so dass die Elemente von $\mathcal{T}$ den drei Bedingungen (T1) bis (T3) genügen [7]. Ein solches Paar $(X, \mathcal{T})$ nennt man einen *topologischen Raum* und die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Nach Satz 1.23 ist jeder metrische Raum X auch ein topologischer Raum, wobei in diesem Fall $\mathcal{T}$ dann genau die Menge der offenen Mengen ist, wie wir sie eingeführt haben, also

$$\mathcal{T} = \{O \subseteq X : \forall x \in O\, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq O\}.$$

Auch wenn diese allgemeine Situation von topologischen Räumen hier nicht beschritten wird, werden viele der nachstehenden Begriffe und Beweise so formuliert werden, dass sie möglichst auf den Offenheitsbegriff mittels ε-Kugeln verzichten und allein Bezug auf offene Mengen — als Mengensystem, das den drei grundlegenden Eigenschaften genügt — nehmen. Dies gibt auch Aufschluss darüber, inwiefern die hier behandelten Begriffe und Eigenschaften nicht nur in metrischen, sondern allgemeiner bereits in topologischen Räumen gelten.
Man stelle sich also einen gedeckten Tisch vor, auf dem wir unser Geschirr (also unsere Resultate) arrangieren. Die Rolle des Tischtuch — und das ist der wesentliche Punkt — spielen die Kugeln, die durch die Metrik definiert werden. Zum Schluß werden wir aber sehen, da wir den Tisch mit Sorgfalt "gedeckt" haben — das heißt die Art und Weise wie Beweise formuliert wurden — dass wir das Tischtuch (mit Schwung) wegziehen können und das meiste Geschirr heil bleiben wird. Um die leider dann doch nicht ganz vermeidbaren Scherben — unter anderem geht die Charakterisierung von Kompaktheit, Satz 1.53 zu Bruch — kümmern wir uns dann in späteren Vorlesungen.

Wir werden nun ausgesonderte Punkte im Zusammenhang mit Mengen in einem metrischen Raum (X, d) mit Hilfe der offenen Mengen in X erklären. Man könnte hier diese Begriffe aber auch äquivalent mit Hilfe der Kugeln erklären.

Definition 1.24. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ und $x \in M$. Dann heißt x*

[6] Das heißt, dass für jedes $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert.

[7] Da es sich bei $\mathcal{T}$ um keine beliebige Teilmenge handelt, spricht man auch von einem *Mengensystem* $\mathcal{T}$.

- **Häufungspunkt** *von M, wenn* $\forall O \subseteq X$ *offen,* $x \in O:\ (M \setminus \{x\}) \cap O \neq \emptyset$*, bzw.*

- **isolierter Punkt** *von M, falls $x \in M$ und x kein Häufungspunkt von M ist.*

Die Menge aller Häufungspunkte von M bezeichnen wir mit $\mathrm{HP}(M)$.

Bemerkung 1.25. *Es gilt folgende Äquivalenz für eine Menge M in einem metrischen Raum X.*

$$x \textit{ ist Häufungspunkt der Menge } M \textit{ (HP)} \iff \forall \varepsilon > 0:\ (M \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$$

Für den Beweis siehe Übung, Blatt 2. Des Weiteren beachte man den Unterschied zwischen dem "Häufungspunkt einer Folge" (wie bereits in der Analysis I kennengelernt) und dem hier definierten "Häufungspunkt einer Menge" (auch dieser Begriff wurde für Mengen in $\mathbb{R}$ und der Standard-Metrik bereits in der Analysis I behandelt). So ist für $X = \mathbb{R}$ mit der Standardmetrik zwar der Punkt $x = 1$ Häufungspunkt der konstanten Folge $1, 1, 1, \ldots$ in $\mathbb{R}$, aber kein Häufungspunkt der Menge der Folgenglieder.

Beispiel 1.26. *Sei $X = \mathbb{R}$ mit der d_2-Metrik und $M = (0, 1)$. Dann ist* $\mathrm{HP}(M) = [0, 1]$.
Beweis. Sei $x \in [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ und man erhält für die Menge aus Bemerkung 1.24: $(M \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x) = (]0, 1[\setminus \{x\}) \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ Falls $x \in]0, 1[$ ist, ist die Menge $(M \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x) = (]0, x[\cup]x, 1[) \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ nicht leer, weil sie zum Beispiel das Element $x - \frac{\varepsilon}{2}$ enthält Wenn hingegen $x \in \{0, 1\}$ ist, ist $]0, 1[\setminus \{x\} =]0, 1[$. Also lässt sich z.B. das Element $1 - \frac{\varepsilon}{2}$in $]0, 1[\cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ finden.

Definition 1.27. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann heißt die Menge A abgeschlossen, falls A alle seine Häufungspunkte enthält, also falls gilt, dass*

$$A = \{x \in X : x \in A \vee x \textit{ HP von } A\}\,.$$

Satz 1.28. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

ngen

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) $A^c := X \setminus A$ ist offen [8]

(iii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A: \qquad x_n \xrightarrow{d} x \in X \implies x \in A.$

Außerdem gilt

(iv) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(v) Seien $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen. Dann ist auch $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ abgeschlossen.

(vi) Ist I eine Indexmenge und sind alle $A_i \subseteq X$ für $i \in X$ abgeschlossen, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Beweis. Die Eigenschaften (iv) bis (vi) folgen durch Komplementenbildung aus Satz 1.23.

[8] A^c heißt das *Komplement von A in X*.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei A abgeschlossen. Um nachzuweisen, dass A^c offen ist, müssen wir für alle $x \in A^c$ ein ε finden, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq A^c$. Sei $x \in A^c$, d.h. $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, ist x kein Häufungspunkt von A, also gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\ (\forall \varepsilon > 0: && (A \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset \\
\iff\quad &\exists \varepsilon > 0: && (A \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset \\
\overset{x \notin A}{\iff}\quad &\exists \varepsilon > 0: && A \cap B_\varepsilon(x) = \emptyset \\
\iff\quad &\exists \varepsilon > 0: && B_\varepsilon(x) \subseteq A^c,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus der Definition des Komplements folgt.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei A^c offen. Wir zeigen, dass dann (iii) erfüllt ist. Sei hierzu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_n \xrightarrow{d} x \in X$. Um zu zeigen, dass x ein Element von A ist, führen wir einen Widerspruchsbeweis, d.h. wir nehmen an, dass $x \in A^c$ ist. Weil A^c offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A^c$. Weil die Folge der x_n gegen x konvergiert, gilt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \quad \{x_n : n \geq N\} \subseteq B_\varepsilon(x).$$

Da aber somit ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$ und ein $N_{\widetilde{\varepsilon}} \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\{x_n : n \geq N_{\widetilde{\varepsilon}}\} \subseteq A^c$, ist damit der Widerspruch nachgewiesen.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei x HP von A. Da nach Definition für jedes $\varepsilon > 0$ die Schnittmenge $(A \setminus \{x\}) \cap B_\varepsilon(x)$ nicht-leer ist, lässt sich zu jedem $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ein x_n auswählen, das in $A \setminus \{x\} \cap B_{\frac{1}{n}}(x)$ liegt. Dies impliziert, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen x konvergiert. Damit muss nach Voraussetzung auch x selbst in A liegen. $\square$

Beispiel 1.29. *Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $d = d_\infty$. Die Kugel*

$$M = K_\varepsilon(0) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \max\{|y_1|, |y_2|\} \leq \varepsilon \right\}$$

um den Ursprung ist abgeschlossen. Auch die reelle Achse

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon y_2 = 0 \right\}$$

ist abgeschlossen. Um letztere Aussage zu begründen, zeigen wir, dass M^c offen ist. Dies sieht man sofort, wenn man sich vor Augen hält, dass M aus den beiden Halbebenen (oben und unten) ohne die x-Achse besteht.

Definition 1.30. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Die Menge*

$$\overline{M} = \{x \in X : x \in M \vee x \text{ ist HP von } M\}$$

heißt der **Abschluss** *von M. Ein Punkt $x \in X$ heißt* **Randpunkt** *von M, falls*

$$\forall O \text{ offen mit } x \in O: \quad (M \cap O \neq \emptyset \wedge M^c \cap O \neq \emptyset)$$

bzw. äquivalent dazu $\forall \varepsilon > 0: \ (B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap M^c \neq \emptyset)$. Die Menge aller Randpunkte von M wird auch ∂M geschrieben und als **Rand** *von M bezeichnet. Die Menge $M^\circ = \{x \in X : \exists O \text{ offen mit } x \in O \subseteq M\}$ heißt* **Inneres** *von M.*

Satz 1.31. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $\overline{M} = \bigcap \{A \subseteq X : A \text{ abgeschlossen und } M \subseteq A\}$ und $\overline{M}$ ist abgeschlossen.

(ii) $\overline{M} = \partial M \dot{\cup} M^\circ$ *(wobei hier* $\dot{\cup}$ *für "disjunkte Vereinigung"*[9] *steht)*

(iii) $M^\circ = M \setminus \partial M$ *und* $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$

(iv) M° *ist offen und* ∂M *abgeschlossen.*

Beweis. (i): Aufgrund der Definitionen gelten folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x \in \overline{M} \Leftrightarrow x \in M \vee x \in \mathrm{HP}(M) &\Leftrightarrow x \in M \vee (\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M \setminus \{x\} \neq \emptyset) \qquad (1.2) \\ &\Leftrightarrow \qquad (\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \neg\,\neg\,(\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset) \\ &\Leftrightarrow \neg \quad (\exists O \text{ offen: } \quad x \in O \wedge O \cap M = \emptyset)\,. \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Wegen $O = (O^c)^c$ substituieren wir jetzt $A = O^c$ und können folgendermaßen fortfahren:

$$\begin{aligned} \neg\,(\exists O \text{ offen: } \quad x \in O \wedge O \cap M = \emptyset) &\Leftrightarrow \neg \left(\exists A \text{ abgeschlossen: } \quad x \in A^c \wedge \underbrace{A^c \cap M = \emptyset}_{\text{d.h.} A \supseteq M} \right) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap \{A \text{ abgeschlossen}, A \supseteq M\} \end{aligned}$$

Ferner ist nach 1.27 (6) auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen, wenn die A_i für alle $i \in I$ abgeschlossen sind. Also ist $\overline{M}$ abgeschlossen.

ich

(ii): Aus der Definition des Randes gilt, dass $x \in \partial M$ falls

$$(\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset) \wedge (\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M^c \neq \emptyset).$$

Andererseits ist $x \in M^\circ$ falls $\exists O$ offen: $\quad x \in O \wedge O \subseteq M$, was aber durch Betrachtung der Negation äquivalent ist zu

$$\neg\,(\forall O \text{ offen: } \quad x \in O \Rightarrow O \cap M^c \neq \emptyset)\,.$$

Man beachte, dass die Aussagen sich ausschließen, d.h. $\partial M \cap M^\circ = \emptyset$. Jetzt "vereinigen" wir die beiden Aussagen mittels des logischen Symbols für "oder", wodurch wir die Aussage $x \in \partial M \cup M^\circ$ erhalten,

$$(\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset) \wedge (\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M^c \neq \emptyset) \vee \neg\,(\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M^c \neq \emptyset)\,,$$

wobei alle betrachteten Mengen O offen sind. Durch "Umklammern" ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} &(\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset) \vee \neg\,(\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M^c \neq \emptyset) \\ \Leftrightarrow\ &(\forall O:\ x \in O \Rightarrow O \cap M \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Aus (1.2) folgt nun die Behauptung.

(iii): $M^\circ = M \setminus \partial M$: Aus (ii) wissen wir, dass $\overline{M} = \partial M \dot{\cup} M^\circ$ gilt. Da die Vereinigung disjunkt ist, folgt hieraus sofort

$$\overline{M} \cap (\partial M)^c = (\partial M \cup M^\circ) \cap (\partial M)^c = M^\circ \cap (\partial M)^c = M^\circ$$

und damit $\overline{M} \setminus \partial M = M^\circ$. Also gilt $M \setminus \partial M \subseteq M^\circ$. Um die umgekehrte Teilmengenbeziehung zu zeigen, beachte man, dass wegen (ii) M° und ∂M disjunkt sind. Andererseits ist $M^\circ \subseteq M$ nach Definition. Daraus folgt $M^\circ \subseteq M \setminus \partial M$.

Die Identität $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ$ folgt unmittelbar aus (ii) durch Schnitt mit $(M^\circ)^c$.

ich (iv): Um zu zeigen, dass M° offen ist, sei $x \in M^\circ$. Nach Definition des Inneren gibt es eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq M$. Sei nun $y \in O$ beliebig. Dann ist O natürlich eine offene Menge, die y enthält, so dass $O \subseteq M$. Also ist M° offen und damit $(M^\circ)^c$ abgeschlossen nach Satz 1.28. Die zweite Aussage in (iv), dass ∂M abgeschlossen ist, folgt nun aus der Darstellung $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \overline{M} \cap (M^\circ)^c$ gemäß (iii) und der Tatsache, dass der Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, Satz 1.28. □

Im folgenden Korollar sind noch einmal einige wichtige Konsequenzen der vorhergegangenen Sätze zusammengefasst.

Korollar 1.32. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann gilt:*

(i) Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen.

(ii) Der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.

(iii) Das Innere einer Menge ist offen.

(iv) Der Rand ist abgeschlossen.

(v) A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \overline{A}$ ist.

(vi) $A^\circ = \bigcup \{O \subseteq X : O \text{ offen} \wedge O \subseteq A\}$
Das Innere von A ist also die “größte” offene Menge, die in A enthalten ist.

(vii) $\overline{A} = \bigcap \{B \subseteq X : B \text{ abgeschlossen} \wedge A \subseteq B\}$.
Der Abschluss von A ist also die “kleinste” abgeschlossene Menge, die A enthält.

(viii) Wenn $A \subseteq B$, dann gilt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Definition 1.33. *Sei (X, d) metrischer Raum; $D \subseteq M \subseteq X$. Dann heißt die Menge D* **dicht** *in M (oft auch dicht in X, falls $M = X$ ist), falls $\overline{D} \supseteq M$ ist.*

Beispiel 1.34.

(a) $(\mathbb{R}, d_2)$. $D = \mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Begründung: Satz 1.28 (iii) besagt, dass M abgeschlossen ist, wenn jede konvergente Folge in M auch in M ihren Grenzwert hat. Aus Analysis I wissen wir, dass sich jede irrationale Zahl x durch eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ annähern lässt, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Also ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(b) Ebenso ist $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ dicht in $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass die Konvergenz im $\mathbb{R}^2$ gemäß Satz 1.14 dieselbe wie die seiner Komponenten ist.

(c) Sei $X = C[-1, 1]$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Metrik $d = d_\infty$ und $D = C^1[-1, 1]$ die Menge der auf $[-1, 1]$ stetig differenzierbaren Funktionen (Dies bedeutet, dass die Funktionen auf $(0, 1)$ stetig differenzierbar sind und in 0 sowie 1 die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte existieren). Da D eine Teilmenge von X ist können wir D auch mit der Metrik d versehen. Dann ist $C[-1, 1]$ vollständig,

[9] Eine Menge C ist die disjunkte Vereinigung von Mengen A und B ist falls $C = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$.

$C^1[-1,1]$ hingegen nicht. Um Letzteres einzusehen, betrachte man die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}, \qquad x \in [-1,1].$$

Man rechnet nach, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in D bezüglich d ist, dass aber der einzig mögliche Grenzwert, der punktweise Grenzwert gegeben durch $f(x) = |x|$, nicht in D liegt, weil die Funktion nicht differenzierbar ist.

Beispiel 1.35 (1.34)**.** *Sei $X = \mathbb{R}$, $d = d_2$ und $M = [0,1[\cup \{e^n : n \geq 2\}$. Dann ist M weder offen noch abgeschlossen und ihre isolierten Punkte besehen aus $\{e^n : n \geq 2\}$. Ferner sind*

$$M^\circ = (0,1),\ \partial M = \{0;1\} \cup \{e^n : n \geq 2\}\,,\ \overline{M} = M^\circ \cup \partial M = [0,1] \cup \{e^n : n \geq 2\}$$

und $\mathrm{HP}(M) = [0,1]$.

1.3 Stetigkeit

Überträgt man die ε-δ-Definition der Stetigkeit aus Analysis I auf metrische Räume, so ergibt sich folgende Begriffsbildung:

Definition 1.36. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Dann heißt f* **stetig in** *$x \in X$ (bzw. "an der Stelle x"), wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X : \quad d_x(x,y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Des weiteren heißt f ***stetig***, *wenn f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.*

Beispiel 1.37. *Sei $X = \mathbb{R}^2$, $d_X = d_2$, $Y = \mathbb{R}$ und $d_Y = d_\infty$. Wie später gezeigt werden wird, ist dann die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ stetig.*

Satz 1.38 (Charakterisierung der Stetigkeit)**.** *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist stetig in x

(2) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$: $\quad x_n \xrightarrow{d_x} x \implies f(x_n) \xrightarrow{d_y} f(y)$ (Folgenstetigkeit)

(3) $\forall V \subseteq Y$ offen: $\quad (f(x) \in V \implies \exists O \subseteq X$ offen mit $x \in O$ und $f(O) \subseteq V)$

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert laut Voraussetzung ein $\delta > 0$, so dass Gleichung (1.4) gilt. Ferner sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen x konvergiert. Also existiert zu diesem δ ein $N = N_0$, so dass für alle $n \geq N_0$ gilt, dass $d_X(x_n, x) < \delta$. Da f laut Voraussetzung an der Stelle x stetig ist, folgt für diese n, dass $d_Y(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ ist und demnach die Konvergenz der Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich d_Y gegen $f(x)$ gilt.
(2) $\Rightarrow$ (3): O.B.d.A. reicht es aus, Aussage (3) für den Fall zu zeigen, dass die offenen Mengen V und O Kugeln mit den Mittelpunkten $f(x)$ bzw. x sind (*man überlege sich dies*). Wir beweisen die Kontraposition, indem wir annehmen, dass (3) (für besagte Kugeln) nicht gilt, also

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ f(B_\delta(x)) \not\subseteq B_\varepsilon(f(x)) \\ \iff\quad & \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in B_\delta(x) :\ x_\delta \notin B_\varepsilon(f(x)) \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$). Es folgt, dass zwar $x_{\frac{1}{n}} \xrightarrow{d_X} x$, nicht aber, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ bezüglich d_Y konvergiert.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $V = B_\varepsilon(f(x))$. Da V offen ist, ergibt sich aufgrund der Annahme von (3), dass eine offene Menge O existiert, so dass $x \in O$ und $f(O) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$. Weil O offen ist, existiert nun ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subseteq O$. Insgesamt erhalten wir also wegen $f(B_\delta(x)) \subseteq f(O)$,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \\ \iff\quad &\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \quad \forall y \in X: \quad (d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.39.

(i) Die Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Ob eine Funktion f an einer Stelle x stetig ist, hängt nur von $f|_{B_\delta(x)}$ für beliebig kleines δ ab, also von den Funktionswerten, die "nahe bei x" liegen.

(ii) Man beachte, dass im Beweis (2) $\Rightarrow$ (3) der Begriff der Kugel von zentraler Bedeutung ist.

(iii) Verzichtet man bei der Charakterisierung der Stetigkeit auf die Eigenschaften (1) und (2), so kann man diejenige von (3) dazu benutzen, Stetigkeit mittels offener Mengen zu definieren. Ohne also "messen" zu müssen (d.h. ohne den Gebrauch einer Metrik), lässt sich demnach die Stetigkeit einer Funktion dadurch definieren, dass "die Urbilder offener Mengen offen sind". Diesen Weg in der Mathematik wählt man dann, wenn man topologische Räume (Das ist eine Menge X zusammen mit einer Menge von Teilmengen von X, die die Eigenschaften (T1) bis (T3) erfüllt.) betrachtet und zwischen ihnen Funktionen als stetig charakterisieren möchte. Diese Verallgemeinerung über metrische Räume hinaus soll aber hier nicht beschritten werden. Allerdings werden weiterhin die Beweise der folgenden Resultate möglichst "topologisch" geführt, d.h. ohne die Verwendung — sofern möglich — der Metrik.

Korollar 1.40. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Mengen $V \subseteq Y$ offen in X sind.*

Beweis. Angenommen, die Urbilder aller offenen Mengen in Y (bzgl. der Funktion f) sind offen in X und es sei $x \in X$. Für beliebiges $V \subseteq Y$ offen gilt, dass mit $O = f^{-1}(V)$ die Implikation in Satz 1.38 (3) gilt und somit f stetig an x ist. Umgekehrt folgt wegen Satz 1.38 aus der Stetigkeit von f, dass für jedes $x \in X$ und jede offene Menge $V \subseteq Y$ mit $f(x) \in V$ eine offene Menge $O_{x,V} \subseteq X$ existiert mit $x \in O_{x,V}$ und $f(O_{x,V}) \subseteq V$. Da sich das Urbild $f^{-1}(V)$ auch schreiben lässt als

$$\{x \in X\colon f(x) \in V\} = \bigcup_{x \in X} O_{x,V},$$

folgt, dass $f^{-1}(X)$ als Vereinigung offener Mengen offen ist. □

Beispiel 1.41.

(a) Nach Korollar 1.40 ist $f^{-1}(B_\varepsilon(y))$ offen, wobei $\varepsilon > 0$, $y \in Y$, falls $f : X \to Y$ stetig ist. Wählt man z.B. $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ (jeweils mit d_2) und die in Y offene Menge $V = (0, \infty)$, so ist für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((0, \infty))$ offen, wenn f stetig ist.

(b) f ist genau dann stetig, wenn auch die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Dies ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass eine Menge genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist.

Der folgende Satz macht jetzt Aussagen darüber, wie man technisch geschickt Funktionen auf Stetigkeit überprüft.

Satz 1.42. *Seien X, Y und Z metrische Räume, $f : X \to Y$ stetig in $x \in X$ und $g : Y \to Z$ stetig in $f(x) \in Y$. Dann ist $g \circ f$ stetig in x.*

Beweis. (Übungsblatt 4): Man kann die Stetigkeit leicht mittels der Charakterisierung über Folgen nachweisen. Alternativ verwenden wir hier ausschließlich die Definition. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von g in $f(x)$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall y \in Y: \ d_Y(y, f(x)) < \delta \implies d_Z(g(y), g(f(x))) < \varepsilon.$$

Da f stetig in x ist, folgt wiederum, dass ein $\delta' > 0$ existiert mit

$$\forall t \in X: \ d_X(t, x) < \delta' \implies d_Y(f(t), f(x)) < \delta.$$

Zusammen erhalten wir also (mit $y = f(t)$)

$$\forall t \in X: \ d_X(t, x) < \delta' \implies d_Z(g(f(t)), g(f(x))) < \varepsilon.$$

□

Proposition 1.43. *Es sei X ein metrischer Raum und $Y = \mathbb{R}$ mit d_2 oder $Y = \mathbb{R}^p$ mit einer der Metriken d_1, d_2 oder d_∞. Ferner sei $f_k : X \to \mathbb{R}$ für $k = 1, \dots, p$. Dann ist die Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^p$ mit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T$ genau dann stetig, wenn f_k für alle $k = 1, \dots, p$ stetig ist.*

Beweis. Es genügt aufgrund von Satz 1.38 (2) Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, die gegen $x \in X$ konvergieren, zu betrachten. Hierfür bilden die $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren des $\mathbb{R}^p$, die genau dann konvergiert, wenn ihre Komponenten gegen die Komponenten von $f(x)$ konvergieren (Satz 1.14 (4)). Weil $f(x_n)_l$ als l-te Komponente des Folgenvektors gleich $f_l(x_n)$ ist, gilt also $f_l(x_n) \to f_l(x)$ für alle $l = 1, \dots, p$, d.h. f_l ist in x stetig. Da es sich bei allen Schritten dieses Beweises um Äquivalenzumformungen handelt, ist die behauptete Aussage bewiesen. □

Satz 1.44. *(1) Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit einer der Metriken d_1, d_2 oder d_∞. Dann sind folgende Funktionen stetig:*

(i) $add : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$

(ii) $mult : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$

(iii) $quot : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, (x, y) \to \frac{x}{y}$

(2) Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ seien stetig. Dann sind folgende Funktionen stetig:

(iv) $f + g : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x)$

(v) $f \cdot g : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

(vi) $\frac{f}{g} : \{x \in X : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$

Beweis. Für Teil 1. siehe Übungsblatt 3.
Teil 2.: Hier sei exemplarisch Behauptung (iv) gezeigt. Wählt man $F = (f, g) : X \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))^T$, so lässt sich $f + g = add \circ F$ schreiben. Nach Proposition 1.43 ist F stetig da f und g stetig sind. Nun folgt aus der Stetigkeit von add (Teil (1)) und der von F die von $f + g$ aus Satz 1.42. □

Definition 1.45. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \to Y$. Sei x ein Häufungspunkt von D und $y \in Y$. Wir nennen y den* **Grenzwert der Funktion** f *für t gegen x — und schreiben dafür $\lim_{t\to x} f(t) = y$ — falls*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in B_\delta(x) \setminus \{x\} : \quad f(t) \in B_\varepsilon(y).$$

Wegen der Trennungseigenschaft des metrischen Raumes, Satz 1.21, ist der Grenzwert in Definition 1.45 eindeutig, falls dieser existiert. Man beachte auch, dass wegen der Definition der Kugeln $y = \lim_{t\to x} f(t)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ \forall t \in D \setminus \{x\} : \ d_X(t, x) < \delta \implies d_Y(f(t), y) < \varepsilon.$$

Lemma 1.46. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : X \to Y$. Sei weiterhin x ein Häufungspunkt von D und $y \in Y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) $\lim_{t\to x} f(t) = y$.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$.

Beweis. (i) ⇒ (ii) folgt unmittelbar aus Definition der Konvergenz von Folgen.
Für die Umkehrung zeigt man die Kontraposition durch die Konstruktion einer gegen x konvergenten Folge, deren Bildfolge nicht gegen y konvergiert. Hierzu nehmen wir an, dass

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \forall t \in D \setminus \{x\} : \quad d_X(x, t) < \delta \wedge d_Y\left(f(x), y\right) \geq \varepsilon.$$

Dann lässt sich eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x\}$ konstruieren mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen y konvergiert. □

Satz 1.47. *Seien X, Y metrische Räume, $x \in X$ und $f : X \to Y$. Dann ist f genau dann in x stetig, wenn $\lim\limits_{t\to x} f(t) = f(x)$.*

Beweis. Übung. □

Beispiel: *Aufgabe 1, Blatt 4*
Wir diskutieren im Folgenden ganz ausführlich die Stetigkeit der Funktionen $f : X \to Y$, wobei (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume sind.

(a) Seien $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^3$, $d_X = d_1$, $d_Y = d_\infty$ und

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^4}, \mathrm{e}^{x_1}).$$

Die Funktion ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.
Genauer: Nach Proposition 1.43 genügt es, die Stetigkeit der Komponentenfunktionen

$$f_1, f_2, f_3$$

zu zeigen. Die Funktion $f_1(x_1, x_2) = mult(x_1, x_2)$ *ist stetig von* $\mathbb{R}^2$ *nach* $\mathbb{R}$ *nach Satz 1.44. Des Weiteren ist* $f_2 = \sqrt{} \circ add \circ (g_1, g_2)$ *mit* $g_1(x) = x^2$ *und* $g_2(y) = y^4$*. Nun sind* g_1 *und* g_2 *stetig auf* $\mathbb{R}$ *und damit auch* $(g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *und da* $\sqrt{}$ *von* $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ *stetig ist, ist auch* f_2 *stetig auf* $\mathbb{R}^2$ *als Komposition von stetigen Funktionen. Natürlich wissen wir bereits aus der Analysis I, dass* f_3 *stetig auf* $\mathbb{R}$ *ist.*

(b) Seien $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $d_X = d_2$, $d_Y = d_\infty$ und

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

An Stellen $(x, y) \neq (0, 0)$ *ist die Funktion stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen. Genauer:* $g_1(y) = y^2$ *und* $g_2(x) = x$ *sind klarerweise stetig von* $\mathbb{R}$ *nach* $\mathbb{R}$ *und somit lässt sich* f *schreiben als*

$$f = quot \circ (mult \circ (g_2, g_1), add \circ (g_1, g_1 \circ g_1))$$

Da quot stetig von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *nach* $\mathbb{R}$ *ist sowie add und mult stetig von* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *und weiterhin* $add \circ (g_1, g_1 \circ g_1)(x, y) \neq 0$ *für* $(x, y) \neq (0, 0)$ *folgt die Behauptung.*
An $(x, y) = (0, 0)$ *ist die Funktion nicht stetig. Dazu betrachte man die Folge definiert durch* $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}$*. Damit ergibt sich*

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da aber $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ *in* d_2 *(Satz 1.14: Komponentenweise Konvergenz in* $\mathbb{R}^p$*) und da* $f(0, 0) = 0$*, kann* f *nicht an* $(0, 0)$ *stetig sein.*

Wichtig: Wir haben nun insbesondere auch an den Stellen, an denen die Funktionen als Verknüpfung von stetigen Funktionen stetig sind, sehr ausführlich argumentiert, um die Aussagen auf die bewiesenen Sätzen zurückzuführen. In Zukunft genügt es für diese Fälle zu argumentieren, dass die Funktion an diesen Stellen *als Verknüpfung stetiger Funktionen* stetig ist. Anders verhält es sich bei "kritische Stellen" wie $(x, y) = (0, 0)$ in Beispiel (b): Diese müssen gesondert behandelt werden. Hierfür verfährt man typischerweise wie folgt:

- Um zu zeigen, dass die Funktion an der Stelle nicht stetig ist; gebe man eine Folge in X an, die gegen den kritischen Punkt (x, y) konvergiert, so dass die Bildfolge nicht gegen den Bildwert $f(x, y)$ konvergiert.

- Um Stetigkeit zu zeigen, verwendet man typischerweise geeignete Abschätzungen: Betrachten wir beispielsweise die folgende Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

so gilt wegen $2xy \leq x^2 + y^2$, dass

$$\frac{x^2y}{x^2 + y^2} \leq \frac{x}{2}$$

und somit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$, weil $\|(x, y)\|_2 \to 0$ impliziert, dass $x \to 0$.

Definition 1.48. *Seien X, Y metrische Räume, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von X nach Y und $f : X \to Y$. Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann* **gleichmäßig** *gegen f, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall x \in X : \quad d_Y\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon.$$

In diesem Fall nennt man f auch die Grenzfunktion.

Kommentar: Die Definitionen von “punktweiser” und “gleichmäßiger” Konvergenz einer Folge von Funktionen unterscheiden sich formal durch die Position des Quantors “$\forall x \in X$”. Während dieser bei der punktweisen Konvergenz, d.h.

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \quad d_Y\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon,$$

“vorne” (also ganz links) steht, steht er bei der gleichmäßigen am Ende. Dies bedeutet, dass im ersten Fall die Wahl des N von x abhängen kann (dies manchmal dadurch verdeutlicht, dass man $N(x)$ schreibt), während es im zweiten Fall für alle x ein “gemeinsames N” gibt, das unabhängig von dem jeweiligen x ist.

Satz 1.49 (Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit)**.** *Seien X, Y metrische Räume und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen von X nach Y. Wenn die Folge gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, ist auch dieses f stetig.*

Beweis. (Übung, Blatt 4): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to Y$ und seien $x \in X$ sowie $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus der Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Existenz eines Index $n \in \mathbb{N}$ mit $d_Y(f_n(z), f(z)) < \varepsilon/3$ für alle $z \in X$. Nun gilt mit der Dreicksungleichung

$$d_Y(f(x), f(z)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(z)) + d_Y(f_n(z), f(z)).$$

Der erste und der letzte Term ist jeweils kleiner als $\varepsilon/3$ nach Wahl von n. Wegen der Stetigkeit von f_n existiert $\delta > 0$, so dass der mittlere Term auch kleiner als $\varepsilon/3$ für alle $z \in X$ mit $d_X(x, z) < \delta$. Das zeigt die Behauptung. □

Offensichtlich ist die Aussage von Satz 1.49 im Allgemeinen falsch, wenn auch die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz verzichtet wird. Dies haben wir bereits in der Analysis I anhand des Beispiels $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0, 1]$ gesehen.

1.4 Kompakte Mengen in metrischen Räumen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Eine Familie $(V_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen in X heißt **offene Überdeckung von** M, falls

$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i.$$

Für $J \subseteq I$ nennen wir $(V_i)_{i\in J}$ eine **(offene) Teilüberdeckung**, falls $(V_i)_{i\in J}$ eine (offene) Überdeckung von M ist. Im Folgenden werden wir immer offene Überdeckungen betrachten und deshalb meist nur von “einer Überdeckung” sprechen.

Definition 1.50. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann heißt $M \subseteq X$* **kompakt***, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*

Eine Menge $M \subseteq X$ ist also genau dann kompakt, wenn für jede Familie $(V_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen folgende Implikation gilt

$$M \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \quad \Longrightarrow \quad \exists J \subseteq I \text{ so dass } |J| < \infty \text{ und } M \subseteq \bigcup_{i\in J} V_i.$$

Beispiel 1.51. *Sei X ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge in X. Dann ist die Menge*

$$M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

kompakt, denn sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Index $i_n \in I$ mit $x_n \in V_{i_n}$ und ein Index $i_0 \in I$ mit $x \in V_{i_0}$. Wegen der Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gilt, dass fast alle Folgenglieder in V_{i_0} enthalten sind, also ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\{x_n : n \geq N\} \subseteq V_{i_0}$. Wir definieren nun

$$J := \{i_0\} \cup \{i_n : n < N\}.$$

Offensichtlich ist $J \subseteq I$ und $|J| = N$. Aus der Konstruktion folgt weiterhin $(V_i)_{i\in J} \supseteq M$.

Satz 1.52. *Sei (X, d) metrischer Raum und $M \subseteq X$ kompakt. Dann gilt*

(1) M ist abgeschlossen

(2) M ist beschränkt

(3) Jede abgeschlossene Teilmenge N von M ist kompakt.

(4) Jede endliche Vereinigung kompakter Menge ist kompakt.

Beweis. (1): Wir zeigen, dass M^c offen ist. Dazu nutzen wir die Eigenschaft metrischer Räume, dass Punkte durch offene Mengen getrennt werden können: Sei $x \in M^c$. Aufgrund des Hausdorff'schen Trennungsaxioms (Satz 1.21)existieren zu jedem $y \in M$ disjunkte, offene Mengen O_y und V_y mit $x \in O_y$, $y \in V_y$. Man erkennt, dass $(V_y)_{y\in M}$ eine offene Überdeckung von M ist, weshalb aus der Kompaktheit von M die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung $(V_y)_{y\in J}$ folgt. Es existiert also $J \subseteq M$ und $|J| < \infty$ mit $\cup_{y\in J} V_y \supseteq M$. Wir behaupten, dass $\tilde{O} = \cap_{y\in J} O_y$ eine offene Menge mit $x \in \tilde{O} \subseteq M^c$ ist. In der Tat ist $\tilde{O}$ als Schnitt endlich vieler offener Mengen offen und erfüllt aufgrund der Konstruktion, dass $x \in \tilde{O}$. Da $\cup_{y\in J} V_y \supseteq M$ ist und $\tilde{O} \cap V_y \subseteq O_y \cap V_y = \emptyset$ für jedes $y \in J$ ist, gilt auch $\tilde{O} \subseteq M^c$.

(2): Man wähle eine Überdeckung von M durch offene 1-Kugeln und betrachte die Vereinigung der Kugeln einer endlichen Teilüberdeckung $(B_1(x_i))_{i=1}^n$. Betrachte nun

$$r_{i,j} = d(x_i, x_j), \quad i, j \in \{1, .., n\}$$

und wähle $r = r_{i_0,j_0}$ maximal, woraus $M \subseteq B_{2r}(x_{i_0})$ folgt. *Vorsicht: In der Vorlesung wurde dieses Argument nicht explizit ausgeführt und außerdem gilt im Allgemeinen $r \geq n$.*

(3): Sei N eine abgeschlossene Teilmenge von M und betrachte eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von N. Dann ist $\mathcal{V} \cup \{N^c\}$ eine offene Überdeckung von M und demnach existiert eine endliche Teilüberdeckung von M gegeben durch $\tilde{\mathcal{V}} \cup \{N^c\}$. Es folgt $N \subseteq N \cap (\tilde{\mathcal{V}} \cup \{N^c\})$. Damit ist $(\tilde{\mathcal{V}} \cup \{N^c\})$ eine endliche Teilüberdeckung von N.

(4): Sei $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung der Vereinigung von endlich vielen kompakten Mengen $M_1, .., M_n$. Für jede einzelne Menge hat $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung. Die Vereinigung dieser Teilüberdeckungen liefert eine endliche Teilüberdeckung von $\cup_{i=1}^n M_i$. □

Der folgende Satz erweist sich als sehr hilfreich, um Kompaktheit nachzuweisen.

Satz 1.53 (Charakterisierung von Kompaktheit in metrischen Räumen)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) M ist kompakt

(ii) M ist **folgenkompakt***,*
d.h. für jede Folge in M gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M und betrachte $N = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Angenommen, die Folge hat keine in M konvergente Teilfolge. Dann folgt, dass N keinen Häufungspunkt in M hat[10]. Es gibt also zu jedem $y \in M$ eine offene Menge V_y mit $y \in V_y$ und

$$N \cap V_y \subseteq \{y\}.$$

Da $(V_y)_{y\in M}$ eine offene Überdeckung von M ist, gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilmenge K von M so dass $\bigcup_{y\in K} V_y \supseteq M$. Insbesondere gilt, dass

$$N = N \cap M \subseteq \bigcup_{y\in K} (N \cap V_y) \subseteq K,$$

womit N endlich ist. Somit existiert eine konstante Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Widerspruch.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Wir zeigen $\neg$(i) $\Longrightarrow$ $\neg$(ii). Angenommen es gäbe eine Überdeckung $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ von M ohne endliche Teilüberdeckung. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ folgende Mengen :

$$M_n = \{x \in M : \exists i \in I \text{ mit } B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq V_i\}.$$

Man sieht leicht, dass

(1) $M_n \subseteq M_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\cup_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$ (da $\mathcal{V}$ eine offene Überdeckung ist), und

(3) $x \in M_n \implies B_{\frac{1}{2n}}(x) \cap M \subseteq M_n$.

Wir zeigen nun, dass $M_{n_0} = M$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Wäre dies nicht der Fall, so wäre für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmengenrelation "$M_n \subseteq M_{n+1}$" strikt, d.h. es gäbe ein Element $x_n \in M_{n+1} \setminus M_n$. Daraus ergäbe sich eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M \setminus M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Folgenkompaktheit von M hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen $y \in M$ konvergiert. Wegen der Eigenschaften (2), (3) existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $B_{\frac{1}{2k}}(y) \cap M \subseteq M_k$. Aus Konstruktion gilt aber $x_n \notin M_n$ und wegen (1) damit $x_n \notin B_{\frac{1}{2k}}(y) \cap M$ für alle $n > k$. Dies widerspricht der Konvergenz einer Teilfolge gegen y.
Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $M_{n_0} = M$. Wir konstruieren nun rekursiv eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M. Sei $z_1 \in M$ beliebig. Dann existiert $i_1 \in I$ mit $B_{\frac{1}{n_0}}(z_1) \subseteq V_{i_1}$. Da $\mathcal{V}$ keine endliche Teilüberdeckung hat, existiert $z_2 \in M \setminus V_{i_1}$. Wähle wiederum V_{i_2} so, dass $B_{\frac{1}{n_0}}(z_2) \subseteq V_{i_2}$ und $z_3 \in M \setminus (V_{i_1} \cup V_{i_2})$. Induktiv erhalten wir eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge von Indices $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n \in M \setminus (V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}) \quad \text{und} \quad B_{\frac{1}{n_0}}(z_n) \subseteq V_{i_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

[10] Gäbe es einen solchen Häufungspunkt $x \in M$, so wäre für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap N \setminus \{x\}$ nichtleer. Damit gäbe es aber eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $x \in M$ konvergiert. Man beachte, dass hier die Metrik bzw. die Kugel ein wesentlicher Begriff ist.

Daraus folgt

$$d(z_n, z_m) \geq \frac{1}{n_0}, \quad n > m,$$

weshalb keine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist und damit auch nicht konvergent. □

Kommentar: Wir erinnern daran, dass wir uns das Ziel gesetzt hatten, den Begriff der Kugeln in den Beweisen möglichst zu vermeiden. Nun zeigt sich im Beweis von Satz 1.53, dass dies dort nicht möglich war. So haben wir bei beiden Implikationen konkret die Metrik, d.h. die Kugeln, verwendet. Und in der Tat stellt sich heraus, dass das Resultat nicht aus den grundlegenden Eigenschaften offener Mengen folgt — also nicht für allgemeine topologische Räume (siehe Kommentar im Anschluss an 1.23) gilt.

Beispiel 1.54. *(1) $X = \mathbb{R}$, $M = [a, b]$ mit $a \leq b$ ist nach Satz 1.53 kompakt, da jede Folge in $[a, b]$ beschänkt ist und somit aufgrund des Satzes von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert wegen der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ in $[a, b]$ liegt, vgl. Satz 1.28. Allgemeiner gilt mit Hilfe derselben Argumentation wie in (1): Jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt (bezüglich der Standard-Metrik).*

(2) Sei $X = \mathbb{R}^p$ versehen mit einer der Metriken d_1, d_2 oder d_∞. Dann ist für $a, b \in \mathbb{R}^p$ mit $a_i \leq b_i$ für $i = 1, .., p$, der "achsen-parallele Quader"

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^p : \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, .., p\}$$

kompakt. Um dies zu sehen, sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Q. Betrachten wir die Folge der ersten Komponenten, $(x_{m,1})_{m\in\mathbb{N}}$, so können wir wegen $a_1 \leq x_{m,1} \leq b_1$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und dem Satz von Bolzano–Weierstraß auf die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(x_{m_k,1})_{k\in\mathbb{N}}$ schließen. Betrachten wir nun die Folge $(x_{m_k,2})_{k\in\mathbb{N}}$. Da $a_2 \leq x_{m_k,2} \leq b_2$, schließen wir wiederum auf die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(x_{n_{k_l},2})_{l\in\mathbb{N}}$. Rekursiv erhalten wir somit nach p Iterationen eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die jede Komponente konvergiert und somit nach Satz 1.14 auch die Folge in $\mathbb{R}^p$. Da die Intervalle $[a_i, b_i]$ abgeschlossen sind, liegt der Grenzwert in Q. Damit folgt nach Satz 1.53 (Kompaktheit $\iff$ Folgenkompaktheit) die Aussage.
Die entsprechende Aussage für achsen-parallele Quader in $\mathbb{C}^p$ folgt unmittelbar aus der Identifikation mit $\mathbb{R}^{2p}$ und der Stetigkeit des zugehörigen Isomorphismus.

(3) Die abgeschlossenen Kugeln in $(\mathbb{R}^p, d_i)$ mit $i \in \{1, 2, \infty\}$ sind kompakt. Dies folgt aus (2) und Satz 1.52(3).

(4) Die leere Menge ist in jedem metrischen Raum kompakt.

(5) Sei $X \neq \emptyset$ versehen mit der diskreten Metrik. Die kompakten Mengen in X sind genau die **endlichen Teilmengen** *von X. Siehe Blatt 4.*

(6) Alle endlichen Teilmengen eines metrischen Raumes sind kompakt, siehe Blatt 5.

Satz 1.55 (Heine-Borel). *Eine Menge M in $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, versehen mit der Standardmetrik $d = d_2$ bzw. d_1 oder d_∞ ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Aus Kompaktheit folgt mit Satz 1.52 die Abgeschlossenheit sowie Beschränktheit. Die Umkehrung folgt aus dem Umstand, dass eine Menge, die bezüglich einer der Metriken

d_1, d_2 oder d_3 beschränkt ist, immer in einem hinreichend großen achsenparallenen Quader enthalten ist — dies folgt beispielsweise für die Metrik d_∞ explizit daraus, dass für jede beschränkte Menge M ein $R > 0$ existiert, so dass $\sup_{x\in X} d(\mathbf{0}, x) \le R$ und damit $M \subseteq Q_{a,b} = K_R^{d_\infty}(\mathbf{0})$ mit $a_i = -R$ und $b_i = R$ für alle $i = 1, .., p$. Für die anderen Metriken d_1 und d_2 gilt wegen Lemma 1.13, dass jede abgeschlossene Kugel auch in einer hinreichend großen Kugel um $\mathbf{0}$ bezüglich d_∞ enthalten ist. Da $Q_{a,b}$ kompakt ist, siehe Beispiel 1.54 (3), folgt mit Hilfe von Satz 1.52 (2), dass auch M kompakt ist. □

Bemerkung 1.56. *Es sei hier gesagt, dass die Charakterisierung der Kompaktheit im Satz von Heine–Borel sehr spezifisch für den metrischen Raum $\mathbb{R}^p$ ist. Diese Aussage gilt nicht für allgemeine metrische Räume, wie beispielsweise für jede* **unendliche Menge** *X, versehen mit der diskreten Metrik.*

Satz 1.53 und der Satz von Heine–Borel implizieren eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano–Weierstraß für den Raum $\mathbb{R}^p$.

Korollar 1.57 (Bolzano–Weierstraß in $\mathbb{R}^p$)**.** *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^p$ versehen mit den Metriken d_1, d_2 oder d_∞ hat eine konvergente Teilfolge.*

Man beachte, dass für den Beweis des Satzes von Heine–Borel das Beispiel 1.54 (2) verwendet wurde, in welchem auf den Satz von Bolzano–Weierstraß für den Raum $(\mathbb{R}, d_2)$ zurückgegriffen wurde. Das bedeutet, dass Korollar 1.57 — so wie hier bewiesen — den bekannten Fall aus der Analysis I voraussetzt und keinen alternativen Beweis liefert.

Satz 1.58 (Stetige Funktionen und kompakte Mengen)**.** *Seien X, Y metrische Räume, $D \subseteq X$ und $f : D \to Y$ stetig.*

(i) Falls D kompakt ist, so ist auch $f(D)$ kompakt.

(ii) Falls D kompakt und $Y = (\mathbb{R}, d_2)$ ist, so nimmt f auf D sein Supremum und sein Infimum an, d.h. es existieren Punkte x_{max} und x_{min} in D mit

$$f(x_{min}) = \inf_{x\in D}\{f(x) \colon x \in D\} \quad \textit{und} \quad f(x_{max}) = \sup_{x\in D}\{f(x) \colon x \in D\}$$

Beweis. (i): Sei $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $f(D)$. Dann ist aufgrund der Stetigkeit auch $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von D. Da D kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_i))_{i\in J}$ und damit ist auch $(V_i)_{i\in J}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(D)$.
(ii): Da f stetig ist, folgt nach (i), dass $f(D)$ kompakt in $\mathbb{R}$ ist. Sei $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$, die gegen das Supremum bzw. Infimum y von $f(D)$ konvergiert. Wegen der Kompaktheit gibt es eine Teilfolge mit Grenzwert in $f(D)$ — dieser muss aber mit y übereinstimmen, woraus die Behauptung folgt.
Alternativ kann folgendermaßen ohne Bezug auf (i) argumentiert werden: Sei $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$, die gegen das Supremum bzw. Infimum y von $f(D)$ konvergiert. Dann hat wegen der vorausgesetzten Kompaktheit von D die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert x in D. Deren Bildfolge muss aber — als Teilfolge von $(f(x_n))$ — auch gegen y konvergieren. Aus der Stetigkeit folgt nun $f(x) = y$ und somit die Behauptung. □

Wir haben bereits gesehen, dass stetige Funktionen und Begriffe wie *offen*, *abgeschlossen* und *kompakt* interagieren. Der folgende Typ von Funktion erhält diese Eigenschaften von Mengen.

Definition 1.59. *Zwei metrische Räume X, Y heißen* **homöomorph***, falls eine eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert, so dass f und f^{-1} stetig sind. Eine solche Abbildung heißt f* **Homöomorphismus***.*

KOMMENTAR: Warnung: Der Begriff des *Homöomorphismus* ist nicht mit dem des *Homomorphismus* zu verwecheln. Während Ersterer klar definiert ist — wie in obiger Definition — so hängt ein Homomorphismus immer von der betrachteten Struktur ab, die er erhalten soll. Natürlich kann auch ein Homöomorphismus als *strukturerhaltende* Abbildung verstanden werden: Nämlich als solche, die offene Mengen in offene Mengen überführt, siehe Bemerkung 1.61.

Satz 1.60. *Seien X und Y metrische Räume und sei X kompakt. Dann ist jede bijektive, stetige Abbildung bereits ein Homöomorphismus.*

Beweis. Übung zum Selbststudium. □

Bemerkung 1.61. *Aufgrund der bewiesenen Charakterisierung von Stetigkeit mittels offener bzw. abgeschlossener Mengen bzw. Satz 1.59 sieht man, dass Homöomorphismen offene bzw. abgeschlossene bzw. kompakte Mengen zweier metrischer Räume ineinander überführen. Entsprechend lässt sich der Konvergenzbegriff in homöomorphen metrischen Räumen charakterisieren.*

Beispiel 1.62. *(a) Die metrischen Räume $([0,1), d_2|_{[0,1)\times[0,1)})$ und $([0,1], d_2|_{[0,1]\times[0,1]})$ sind nicht homoömorph, da Y im Gegensatz zu X kompakt ist, aber die Homöomorphie wegen Satz 1.58 die Kompaktheit übertragen würde.*

(b) Die metrischen Räume $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ und $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ sind paarweise homöomorph, da die Identitätsabbildung $f(x) = x$ stetig ist und eine stetige Inverse hat, was aus Satz 1.14 folgt.

(c) Sei X eine Menge und d^1 und d^2 Metriken auf X. Falls Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$

$$c_1 d^1(x,y) \leq d^2(x,y) \leq c_2 d^1(x,y),$$

so folgt ebenfalls, dass die Identitätsabbildung $x \mapsto x$ stetig ist und stetige Inverse besitzt.

Der folgende Begriff verallgemeinert den bereits aus der Analysis I bekannten Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit.*

Definition 1.63 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann heißt f* **gleichmäßig stetig***, falls*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x, y \in X : \; d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Offensichtlich ist jede gleichmäßig stetige Funktion auch stetig. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie bereits aus der Analysis I bekannt ist. Es gilt aber

Satz 1.64. *Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Falls X kompakt ist, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir präsentieren hier einen direkten Beweis. Für eine alternative Argumentation siehe Übungsblatt 5, Aufgabe 3. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, so dass $f(B_{\delta_x}(x)) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(x))$. Da X kompakt ist, besitzt die offene Überdeckung $(B_{\delta_x/2}(x))_{x\in X}$ von X eine offene Teilüberdeckung $(B_{\delta_x/2}(x))_{x\in J}$, wobei $|J| < \infty$ ist. Für beliebiges $x \in X$ gibt es demnach ein $\tilde{x} \in J$ mit $x \in B_{\delta_{\tilde{x}}/2}(\tilde{x})$. Sei $\delta = \min_{x\in J} \delta_x/2$. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt, dass $B_\delta(x) \subseteq B_{\delta_{\tilde{x}}}(\tilde{x})$ und dass

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_{\varepsilon/2}(f(\tilde{x})) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

□

Satz 1.65 (Fortsetzbarkeit gleichmäßig stetiger Abbildungen)**.** *Seien X und Y metrische Räume, wobei Y vollständig ist und $D \subseteq X$. Sei $f : D \to Y$ gleichmäßig stetig*[11]*. Dann existiert eine eindeutige gleichmäßig stetige Abbildung $F : \overline{D} \to Y$, die f fortsetzt, d.h. $F|_D = f$.*

Beweis. Die Idee ist, F für $x \in \overline{D} \setminus D$ dadurch zu definieren, dass wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D wählen, die gegen x konvergiert und "$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$" setzen (aufgrund der gewünschten Stetigkeit von F ist dies auch die einzige Möglichkeit). Allerdings ist a-priori nicht klar, warum der eben genannte Limes überhaupt existiert. Wir gehen in folgenden Schritten vor:
1): Sei $x \in \overline{D} \setminus D$, also muss x ein Häufungspunkt von D sein, weshalb aus der Definition (und der Definition von offenen Mengen mittels Kugeln) folgt, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D existiert, die gegen x konvergiert. Das bedeutet insbesondere, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und — wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f — auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da Y vollständig ist, existiert ein Grenzwert $y \in Y$ von $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Wir definieren $F(x) = y$ und $F|_D = f$.
Es ist noch nicht klar, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Um dies zu sehen, sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in X mit Grenzwert x. Wir zeigen nun, dass $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = y$ ist. Wie zuvor sieht man, dass $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ als Cauchyfolge in Y auch konvergent ist. Es gilt, dass $d_X(x_n, y_n)$ eine Nullfolge ist (siehe Aufgabe 3, Blatt 5) und damit folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f dass

$$d_Y(f(x_n), f(y_n)) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$ und damit $F : \overline{D} \to Y$ eine wohldefinierte Abbildung. Es bleibt die gleichmäßige Stetigkeit von F und die Eindeutigkeit zu zeigen: Dies sei hier als Übungsaufgabe formuliert. □

1.5 Normierte Vektorräume

Aus der Linearen Algebra I ist der Begriff des *Vektorraumes* bekannt. Im Folgenden betrachten wir immer Vektorräume über den Skalarkörpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ — und schreiben $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ — wie beispielsweise $\mathbb{R}^p$ oder $\mathbb{C}^p$. Daneben haben auch viele andere der bisher behandelten metrischen Räume eine Vektorraumstruktur und zusätzlich hat die betrachtete Metrik eine spezielle Form. Dies motiviert folgenden Begriff:

Definition 1.66. *Sei X ein Vektoraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ heißt* **Norm auf** *X, falls*

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|cx\| = |c|\|x\|$ *für alle* $x \in X$

[11] Das heißt, f ist gleichmäßig stetig von $(D, d_X|_{D\times D})$ nach Y.

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in X$.

Wir sagen, dass $X = (X, \|\cdot\|)$ *ein* **normierter (Vektor-)Raum** *ist (Per Definition ist also* X *ein Vektorraum, falls* X *"ein normierter Raum" ist.).*

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Offensichtlich definiert die Abbildung

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

eine Metrik auf X (man überzeugt sich leicht davon, dass die entsprechenden Metrikeigenschaften aus den Eigenschaften der Norm folgen). Diese Metrik bezeichnen wir als die **von der Norm induzierte Metrik**. **Damit kann jeder normierte Raum als metrischer Raum aufgefasst werden** — in diesem Sinne bilden die normierten Vektorräume eine Klasse von Beispielen von metrischen Räumen.

Beispiel 1.67.

(a) *(i)* $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_1)$ *wobei* $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^p |x_n|$. *Man sieht leicht, dass* $\|\cdot\|_1$ *die Eigenschaften einer Norm erfüllt, bzw. kann man (N1) und (N3) aufgrund von* $\|x\|_1 = d_1(x, \mathbf{0})$ *direkt aus den Eigenschaften für die Metrik* d_1 *ablesen. (N2) folgt unmittelbar aus der Definition.*

(ii) *Ähnlich folgt, dass* $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_2)$ *mit* $\|x\|_2 = (\sum_{n=1}^p |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ *ein normierter Raum ist (Die Dreiecksungleichung ist genau die Minkowski'sche Ungleichung.).*

(iii) *Weiterhin sieht man, dass* $\|x\|_\infty = \max_{i=1,..,p} |x_i|$ *eine Norm auf* $\mathbb{R}^p$ *definiert.*

Diese drei Normen induzieren die bereits bekannten Metriken d_1, d_2 *bzw.* d_∞.

(b) *Die Paris-Metrik auf* $\mathbb{R}^2$ *sowie die diskrete Metrik auf einem nicht-trivialen Vektorraum sind nicht von einer Norm induziert.*
Diskrete Metrik: Nehmen wir an, dass die diskrete Metrik von einer Norm $\|\cdot\|$ *induziert wird, also* $d_0(x,y) = \|x-y\|$ *für alle* $x, y \in X$. *Sei* $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$ *und betrachte*

$$\|2x\| = d_0(2x, \mathbf{0}) = 1,$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Definition der diskreten Metrik und $2x \neq \mathbf{0}$ *folgt. Dies ist aber ungleich* $2\|x\| = 2d_0(x, \mathbf{0}) = 2$, *was ein Widerspruch dazu ist, dass* d_0 *von einer Norm induziert ist.*
Paris-Metrik: Diese ist gegeben durch:

$$d_P(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & \exists \lambda \in \mathbb{R}: \ x = \lambda y \ \vee \lambda x = y \\ d(x,\mathbf{0}) + d(\mathbf{0},y) & \text{sonst} \end{cases}$$

auf $X = \mathbb{R}^2$. *Wir zeigen, das* d_P *nicht von einer Norm induziert wird, wobei* d *eine beliebige Metrik auf* $\mathbb{R}^2$ *ist. Angenommen,* d_P *ist von einer Norm* $\|\cdot\|_P$ *induziert. Es gilt also insbesondere, dass* $\|z\|_P = d_P(z, \mathbf{0}) = d(z, \mathbf{0})$ *für alle* $z \in \mathbb{R}^2$. *Nach Definition von* d_P *gilt für alle Paare* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, *die nicht auf einer Geraden durch* $\mathbf{0}$ *liegen, dass*

$$\|x-y\|_P = d_P(x,y) = d(x,\mathbf{0}) + d(\mathbf{0},y) = \|x\|_P + \|y\|_P.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und setze $y_n = x + \frac{1}{n} y_0$ wobei $y_0 \in \mathbb{R}^2$ so gewählt ist, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad (x, y_n)$ jeweils nicht auf einer Geraden durch $\mathbf{0}$ liegt (Dies ist leicht möglich). Nun gilt $\|x - y_n\|_P = \frac{1}{n}\|y_0\|_P \to 0$ für $n \to \infty$, weshalb

$$\|x - y_n\|_P = \|x\|_P + \|y_n\|_P \geq \|x\|_P \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

auf $0 \geq \|x\|$ führt. Dies steht im Widerspruch zu $x \neq \mathbf{0}$.

Definition 1.68. *Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt* **Banachraum***, falls X vollständig ist, d.h. der induzierte metrische Raum vollständig ist.*

Beispiel 1.69.

(a) Da die Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^p$ jeweils die Metriken d_1, d_2 bzw. d_∞ induzieren, folgt mit Korollar 1.16, dass die normierten Räume auch Banachräume sind.

(b) $X = C(I; \mathbb{R})$, wobei I ein abgeschlossenes Intervall ist, versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$, ist ein Banachraum, siehe Blatt 4.

(c) Der normierte Raum $C^1([-1, 1]; \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$ ist kein Banachraum. Die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{1+\frac{1}{n}} & x \geq 0 \\ (-x)^{1+\frac{1}{n}} & x < 0 \end{cases}$$

ist eine Cauchyfolge bezüglich der von der Norm induzierten Metrik, aber konvergiert nicht in X — der vermeintliche (punktweise) Grenzwert $f(x) = |x|$ ist schließlich nicht differenzierbar an $x = 0$.

Im folgenden betrachten wir *lineare* Abbildungen $f : X \to Y$ immer auf Vektorräumen X, Y über dem selben(!) Skalarkörper $\mathbb{K}$, d.h. f ist nach Definition linear, falls

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in \mathbb{K} : \qquad f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Notation: Wir verwenden für lineare Abbildung oftmals Großbuchstaben und verzichten auch auf die Klammern bei der Funktionsauswertung, z.B. $Tx := T(x)$.

Satz 1.70 (Lineare Abbildungen auf normierten Räumen)**.** *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $T : X \to Y$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) T ist stetig an $x = \mathbf{0}$.

(2) T ist stetig.

(3) T ist gleichmäßig stetig.

(4) Das Bild $T(K_1(\mathbf{0}))$ der abgeschlossenen Einheitskugel ist beschränkt, d.h. $\exists C > 0$, so dass $\|Tx\|_Y \leq C$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_X \leq 1$.

In diesem Fall gilt

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \tag{1.5}$$

Beweis. Die Implikationen (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) sind klar. (4) $\Longrightarrow$ (3) folgt direkt aus der Linearität, (N2) und der Annahme von (4)

$$\|Tx - Ty\|_Y = \|T(x-y)\|_Y \leq C\|x-y\|_X.$$

(1) $\Longrightarrow$ (4): Angenommen, T ist stetig an $x = 0$. Das heißt insbesondere, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$

$$\|x\|_X \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\|_Y < 1.$$

Aus der Linearität von T folgt, dass für alle $x \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\left\| \tfrac{\delta}{\|x\|_X} Tx \right\|_Y = \frac{\delta \|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq 1,$$

und damit $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$ für alle $x \in X$, woraus die Behauptung für $C = \frac{1}{\delta}$ folgt.
Wir zeigen nun Gleichung (1.5): Wegen der Linearität folgt genauso, dass

$$\sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq \mathbf{0}} \tfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

(Falls $\|x\| < 1$ gilt, dass $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|_Y = \|T\frac{x}{\|x\|}\|_Y$). Klarerweise gilt $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \geq \sup_{\|x\|_X < 1} \|Tx\|_Y$. Für $\|x\| \leq 1$ gilt wiederum, dass

$$\|Tx\|_Y \leq 2 \left\| T \frac{x}{2\|x\|} \right\|_Y = 2 \sup_{\|x\|_X < 1} \|Tx\|_Y.$$

Falls $\sup_{\|x\|_X < 1} \|Tx\|_Y < \infty$ ist, folgt damit $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$. Nach der oben bewiesenen Äquivalenz erhalten wir damit die (gleichmäßige) Stetigkeit von T. Deshalb gilt zusammen mit der Stetigkeit von $\|\cdot\|$ (Aufgabe 3, Blatt 5) für jedes x mit $\|x\|_X = 1$, dass

$$\|Tx\| = \|T(\lim_{n\to\infty}(1 - \tfrac{1}{n})x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T(1 - \tfrac{1}{n})x\|,$$

was bedingt, dass $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X < 1} \|Tx\|_Y$. Somit gilt die besagte Identität. $\square$

Eigenschaft (4) in Satz 1.70 ist auch unter dem Begriff "die lineare Abbildung ist beschränkt" bekannt und man spricht deshalb auch von "beschränkten, linearen Abbildungen".

Beispiel 1.71. *Sei $X = \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$, versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ und Y ein normierter Raum. Dann ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ stetig. Um dies zu sehen, sei $(b_n)_{n=1}^p$ eine Basis von $\mathbb{R}^p$. Aus der Linearität, (N2) und (N3) folgt dann*

$$\|Tx\|_Y = \|T\sum_{n=1}^p x_n b_n\|_Y = \|\sum_{n=1}^p x_n T b_n\|_Y \leq \sum_{n=1}^p |x_n| \|Tb_n\|_Y \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^p \|Tb_n\|_Y.$$

Also ist T beschränkt und nach Satz 1.70 stetig.

Definition 1.72. *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ auf einem Vektorraum X heißen* ***äquivalent****, falls Konstanten $c, C > 0$ existieren, so dass*

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

Bemerkung 1.73. *Man überzeugt sich leicht davon, dass zwei Normen genau dann äquivalent sind, wenn die Identitätsabbildung $id(x) = x$ stetig von $(X, \|\cdot\|_1)$ nach $(X, \|\cdot\|_2)$ ist und die Inverse auch stetig ist, d.h. wenn id ein Homöomorphismus ist, siehe Beispiel 1.62(c). Insbesondere gilt in diesem Fall, dass Folgen genau dann bezüglich der einen Norm konvergieren/Cauchyfolgen sind, wenn dies auch bezüglich der anderen Norm gilt. Insbesondere stimmen Grenzwerte überein. Wir haben bereits Beispiele von Metriken auf $\mathbb{R}$ kennengelernt, die nicht homöomorph sind (siehe z.B., Blatt 1). Wir zeigen nun, dass dies nicht für Metriken passieren kann, die durch Normen induziert sind.*

Satz 1.74. *Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind äquivalent. Insbesondere ist eine Folge in $\mathbb{R}^p$ genau dann konvergent bezüglich einer beliebigen Norm, wenn die Folgen der Komponenten in $\mathbb{R}$ bezüglich $|\cdot|$ konvergieren.*

Beweis. Sei $\dim X = p$ und $(b_n)_{n=1}^p$ eine Basis von X. Es genügt zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf X zur Norm $\|x\|_\infty = \max_{n=1,..,p} |x_n|$ äquivalent ist, wobei $x = \sum_{n=1}^p x_n b_n$ ist. Die lineare, bijektive Abbildung $T : (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty) \to (X, \|\cdot\|_\infty), (x_n) \mapsto \sum_n x_n e_n$ ist offenbar ein Homöomorphismus. Folglich gilt wegen Satz 1.70 und Beispiel 1.71, dass es ein $C > 0$ gibt mit

$$\|x\|_X \leq C\|x\|_\infty \qquad \forall x \in X.$$

Nach Heine–Borel ist $M = \{z \in \mathbb{R}^p : \|z\|_\infty = 1\}$ kompakt und damit wegen Satz 1.58 (1) auch $S = \{x \in X : \|x\|_\infty = 1\} = T(M)$. Da ebenso $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ stetig ist (siehe Blatt 5), schließen wir nun mittels Satz 1.58 (2), dass die Funktion $\|\cdot\|$ auf der Menge S ihr Minimum c annimmt. Wegen (N1) muss $c > 0$ gelten. Es gilt also $\|x\| \geq c > 0$ für alle $x \in X$ mit $\|x\|_\infty = 1$, was aufgrund von (N2) die Ungleichung $\|x\| \geq c\|x\|_\infty$ impliziert. □

Bemerkung 1.75. *Da jeder endlich-dimensionale Vektorraum X über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{K}^{\dim X}$ ist[12], zeigt Satz 1.74 auch, dass alle n-dimensionalen Vektorräume bis auf Isomorphie äquivalente Normen haben.*

Korollar 1.76. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und X endlich-dimensional. Dann gilt*

(1) Jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ ist stetig.

(2) Der Satz von Heine–Borel gilt auch für X.

(3) Die offenen/abgeschlossenen/kompakten Mengen von X stimmen mit den offenen/ abgeschlossenen/kompakten Mengen von $(X, \|\cdot\|_2)$ überein.

Beweis. Sei $\dim X = p < \infty$. Nach Satz 1.74 und Bemerkung 1.73 können wir auf X eine spezielle Norm wählen, um die allgemeine Aussage zu zeigen. Wähle eine Basis $(b_n)_{n=1}^p$ von X und wähle $\|x\|_\infty = \|(x_n)_{n=1}^p\|_\infty$ wobei $x = \sum_{n=1}^p x_n b_n$. Mit dieser Norm ist X homöomorph zu $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ und die Stetigkeit folgt somit aus Beispiel 1.71. □

Bemerkung 1.77 (Wichtig!). *Satz 1.74 und Korollar 1.76 besagen, dass für Begriffe wie Konvergenz, Stetigkeit in endlich-dimensionalen, normierten Räumen die Angabe der Norm nicht von Bedeutung ist. Aus Satz 1.14 folgt darüberhinaus, dass die Konvergenz bezüglich allgemeiner Normen anhand der Koeffizientenfolgen bezüglich einer Basis abgelesen werden kann. Aus diesem Grund spricht man in der Praxis oft von "Konvergenz in $\mathbb{R}^n$" ohne eine spezifische Norm anzugeben. Es sei allerdings betont, dass solche Resultate nicht für unendlich-dimensionale normierte Räume wie beispielsweise $C[0,1]$ oder den Folgenraum $\ell^\infty(\mathbb{N})$ gilt.*

[12] D.h., es existiert eine lineare Bijektion $X \to \mathbb{K}$.

Beispiel 1.78. *Sei I ein kompaktes Intervall und $Y = C^1(I)$ die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ versehen mit der Norm $\|f\|_{C^1(I)} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ und $\|f\|_\infty = \|f\|_{C(I)} = \sup_{x\in I} |f(x)|$. Wir können Y aber auch mit der Norm $\|\cdot\|_{C(I)}$ versehen. Die beiden Normen $\|\cdot\|_{C^1(I)}$ und $\|\cdot\|_{C(I)}$ sind nicht äquivalent. Dies lässt sich leicht für $I = [0,1]$ anhand der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0,1]$ einsehen. Offenbar gilt, dass die Folge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C([0,1])}$ beschränkt ist, jedoch $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^1([0,1])} = \infty$ gilt. Für allgemeine kompakte Intervalle modifiziert man die Folge entsprechend.*

Bemerkung 1.79. *Wir haben gesehen, dass im Falle zweier äquivalenter Normen auf einem Vektorraum sämtliche topologische Eigenschaften übertragen werden — insbesondere ist die Identiätsabbildung ein Homömomorphismus und somit stimmen die offenen Mengen bezüglich der einen Norm mit denen bezüglich der anderen überein. Außerdem wird auch die Eigenschaft der Vollständigkeit übertragen, da nämlich eine Folge genau dann bezüglich der einen Norm Cauchyfolge ist, wenn sie auch Cauchyfolge in der äquivalenten Norm ist. Man beachte, dass dies im Allgemeinen nicht aus der Homöomorphie folgt, sondern aus dem stärkeren Begriff der äquivalenten Norm (bzw. der in Beispiel 1.62 (c) gesehenen Bedingung). So ist beispielsweise die Identitätsabbildung ein Homöomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, d_2)$ und $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}|$, aber $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig (siehe Blatt 6).*

Aus Satz 1.70 folgt, dass für eine lineare, stetige Abbildung $T : X \to Y$ zwischen normierten Räumen X, Y eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $x \in X$, $\|Tx\|_Y \le C\|x\|_X$. Dies motiviert folgenden Begriff:

Definition 1.80. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und $T : X \to Y$ linear und stetig. Dann heißt*

$$\|T\|_{X\to Y} = \sup_{x\neq \mathbf{0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \overset{\text{Satz 1.71}}{=} \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\|$$

*die **Abbildungsnorm** von T.*

Wie oben bemerkt, garantiert Satz 1.70, dass $\|T\|$ wohldefiniert ist. Tatsächlich ist die Bezeichnung “Abbildungsnorm” nicht willkürlich, wie folgender Satz zeigt.

Satz 1.81. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann ist*

$$L(X,Y) = \{T : X \to Y : T \text{ linear, stetig}\}$$

ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $T \mapsto \|T\|_{X\to Y}$ ist eine Norm auf $L(X,Y)$.

Beweis. Dass $L(X,Y)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, folgt unmittelbar aus der Eigenschaft, dass die Addition bzw. Skalarmultiplikation die Linearität und und die Stetigkeit erhält.
Die Normeigenschaften lassen sich leicht unter Verwendung der Eigenschaften von $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ (Dies war eine Übung auf Blatt 5.) nachrechnen: (N1): $\sup_{\|x\|_X\le 1} \|Tx\|_Y = 0$ ist wegen (1.5) äquivalent zu $\|Tx\|_Y = 0$ für alle $x \in X$ und somit zu $T = 0$ als Abbildung. (N2) ist trivial aufgrund von Eigenschaft (N2) der Norm $\|\cdot\|_Y$. (N3): Seien $T, S, P \in L(X,Y)$. Dann gilt

$$\|T+S\| = \sup_{\|x\|_X\le 1} \|(T+S)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X\le 1} \|Tx + Sx\|_Y \le \sup_{\|x\|_X\le 1} \|Tx\|_Y + \sup_{\|x\|_X} \|Sx\|_Y$$

und damit $\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$. □

Satz 1.82. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann ist $L(X,Y)$ versehen mit der Abbildungsnorm genau dann vollständig, falls Y vollständig ist.*

Beweis. Dies folgt aus Aufgabe 2) (Zusatzaufgabe) von Blatt 4. Dort wurde gezeigt, dass

$$\mathcal{F} = \{f : \tilde{X} \to Y | f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

[13] versehen mit der Metrik $d_{\mathcal{F}}(f,g) = \sup_{x\in\tilde{X}} d_Y(f(x), g(x))$ genau dann vollständig ist, wenn Y vollständig ist. Wir wenden dies auf $\tilde{X} = K_1(\mathbf{0})$, versehen mit $d|_{\tilde{X}}$ und $d(x,y) = \|x-y\|$, an. Wegen Satz 1.71 ist $T|_{\tilde{X}} \in \mathcal{F}(\tilde{X}, Y)$ für alle $T \in L(X,Y)$ und wir zeigen nun, dass $\{T|_{\tilde{X}} : T \in L(X,Y)\}$ sogar eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $\mathcal{F}(X,Y)$ ist und damit selbst vollständig (Aufgabe 1), Blatt 3). Dazu sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L(X,Y)$ mit $\lim_{n\to\infty} T_n|_{\tilde{X}} = f \in \mathcal{F}(X,Y)$. Wir definieren nun für $x \in X$:

$$Tx = \begin{cases} f(x) & \|x\| \leq 1 \\ \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \|x\| > 1 \end{cases}$$

Die Stetigkeit von f und $\|\cdot\|$ impliziert, dass T stetig ist. Die Linearität von T lässt sich einfach mittels der Linearität der T_n und Fallunterscheidung zeigen. So gilt z.B. für $x, y \in K_1(\mathbf{0})$ und $c_{x,y} := \|x + \lambda y\| > 1$ wobei $\lambda \in \mathbb{K}$, dass

$$T(x+\lambda y) = c_{x,y}\, f\left(\frac{x+\lambda y}{c_{x,y}}\right) = c_{x,y} \lim_{n\to\infty} T_n \left(\frac{x+\lambda y}{c_{x,y}}\right) = \lim_{n\to\infty} T_n x + \lambda \lim_{n\to\infty} T_n y = Tx + \lambda Ty.$$

□

Korollar 1.83 (Fortsetzung von stetigen, linearen Abbildungen)**.** *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$ und Y ein Banachraum. Sei des Weiteren $D \subseteq X$ ein dichter Untervektorraum von X und $T : D \to Y$ linear und stetig. Dann existiert eine eindeutige, lineare, stetige Fortsetzung $\tilde{T} : X \to Y$ von T.*

Beweis. Wegen Satz 1.70 ist T gleichmäßig stetig auf D, womit nach Satz 1.65 eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{T} : \overline{D} = X \to Y$ von T existiert. Seien nun $x, y \in X$, dann existieren Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Nun folgt aus der Stetigkeit und der Wohldefiniertheit von $\tilde{T}$, dass für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\tilde{T}(x+\lambda y) = \lim_{n\to\infty} T(x_n + \lambda y_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n + \lim_{n\to\infty} \lambda T y_n = \tilde{T}x + \lambda \tilde{T} y.$$

Also ist $\tilde{T}$ linear. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.65 und der gleichmäßigen Stetigkeit von linearen, stetigen Abbildungen, Satz 1.70. □

1.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Das folgende Resultat wird im Beweis des Satzes über implizite Funktionen in Kapitel 3 benötigt. Allerdings findet es viele weitere Anwendung, zumeist dann, wenn man die Frage nach den *Fixpunkten einer Gleichung* stellt. Die Eigenschaft einer Funktion

$$f : M \to M,$$

wobei M ein metrischer Raum ist, einen Fixpunkt zu haben, ist nur auf den ersten Blick sehr speziell. Es stellt sich heraus, dass man viele Probleme, wie beispielsweise das Lösen einer Differentialgleichung, gibt, die man auf eine Fixpunktgleichung zurückführen kann. Somit stellt die Verwendung dieses Resultates im Beweis des Satzes über implizite Funktionen nur eine der vielen Anwendungen da.

[13] f heißt beschränkt, falls das Bild $f(X)$ eine beschränkte Menge im metrischen Raum ist (d.h. $\exists y_0 \in Y$ und $r > 0$ so dass $f(\tilde{X}) \subseteq B_r(y_0)$

Lemma 1.84 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $M \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\Phi : M \to X$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\Phi(M) \subseteq M$ *(Selbstabbildung)*
- Φ *ist eine* **Kontraktion**, *d.h.*

$$\exists L \in (0,1)\, \forall x, y \in M : \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq L\, d(x, y).$$

Dann existiert ein eindeutiges $a \in M$, so dass $\Phi(a) = a$ gilt. Des Weiteren gilt für jedes $x_0 \in M$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\Phi(\Phi(\ldots..\Phi(x_0))}_{n\text{-mal}} = a,$$

d.h. die rekursive definierte Folge $x_n = \Phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen a.

Beweis.

(1) **Eindeutigkeit:** Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte $a, b \in M$ mit $\Phi(a) = a$ und $\Phi(b) = b$. Dann existiert aufgrund der Voraussetzung ein $0 < L < 1$ mit

$$d(a, b) = d\left(\Phi(a) - \Phi(b)\right) \leqslant L \cdot d(a, b)$$

Diese Ungleichung ist nur erfüllt, wenn d(a,b) = 0 ist, d.h. wenn a = b gilt.

(2) **Existenz:** Sei $x \in X$. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n = \Phi\left(x_{n-1}\right), n \in \mathbb{N}$$

und weisen deren Konvergenz nach. Es reicht hierzu aus, die Cauchy-Eigenschaft der Folge zu zeigen, weil laut Voraussetzung X vollständig ist. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und o.B.d.A. $m > n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(x_n, x_m) = \left(\Phi\left(x_{n-1}\right), \Phi\left(x_{m-1}\right)\right) \leqslant L \cdot \left(x_{n-1}, x_{m-1}\right) \\
&\Rightarrow \left(x_n, x_{n+1}\right) \leqslant L^n \cdot d\left(x, \Phi(x)\right) \\
&\Rightarrow \left(x_n, x_m\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} d\left(x, x_{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} L^k \cdot d\left(x, \Phi(x)\right) = d\left(x, \Phi(x)\right) \cdot \sum_{k=n}^{m-1} L^k
\end{aligned}$$

Die Summe stellt eine endliche geometrische Reihe dar, so dass man schließlich

$$(x_n, x_m) \leqslant (x, \Phi(x)) \cdot \frac{L^n\left(1 - L^{m-n}\right)}{1 - L}$$

erhält. Da der Abstand $d\left(x, \Phi(x)\right)$ eine feste Zahl ist und $L < 1$, konvergiert dieser Ausdruck für $n, m \to \infty$ gegen 0, d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine CF, deren Grenzwert wir mit a bezeichnen. Zum Schluss ist nur noch nachzuweisen, dass a Fixpunkt von Φ ist. Beachtet man, dass Φ als Kontraktion (Lipschitz)-stetig ist, man also die Grenzwert- und Funktionsbildungseigenschaften vertauschen kann, erhält man

$$\Phi(a) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

.

□

Der gerade bewiesene Satz macht nur eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes, nicht aber über das "Aussehen" eines solchen Punktes. Wenn wir ihn also später (siehe Satz 3.46) in dem metrischen Raum der stetigen Funktionen anwenden, so werden wir nur wissen, dass eine stetige Funktion h mit $\Phi(h) = h$ existiert und eindeutig bestimmt ist, werden aber "nichts" über das Aussehen von h sagen können.

Beispiel 1.85. *Das folgende Beispiel zeigt, wie man in konkreten Situationen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes überprüfen kann. Insbesondere ist die Kontraktionseigenschaft einer Funktion hierbei wesentlich. Bekanntlich besagt diese Bedingung im Eindimensionalen, dass ein L mit $0 < L < 1$ existiert, so dass für alle $x, y \in$ ßM die Bedingung*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

erfüllt ist. Ein solches L lässt sich beispielsweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Analysis I) bestimmen; dieser besagt bekanntlich, dass für eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\forall x, y \in [a, b]\ \exists \xi \in [x, y] : \quad f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y).$$

Betrachtet man die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$ und $M = [-1, 1]$, so hätte man mit $L = \max_{\xi\in[0,1]} |f'(\xi)|$ ein geeignetes L gefunden, falls dieser Wert kleiner als 1 wäre. Nun ist aber $f'(x) = 2x$, d.h. $L = 2$. Wählt man hingegen $M = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, so erhält man als neues L den Wert $\max_{\xi\in[0,1]} |f'(\xi)| = \frac{1}{2}$ und gewährleistet so die geforderte Kontraktionseigenschaft. Verallgemeinernd bedeutet dies, dass man die Menge M geeignet wählen muss, um die Kontraktionseigenschaft sicherzustellen. Die Ungleichung selbst (auch Lipschitz-Stetigkeit genannt) kann man häufig — wie im vorliegenden Beispiel durch Anwendung des Mittelwertsatzes — mit Eigenschaften aus der Differentialrechnung nachgewiesen werden.

Kapitel 2

Integrationstheorie

2.1 Das Riemann–Darboux Integral

Im Folgenden ist es unser Ziel,

die Fläche bzw. das Volumen unter einer Funktion

$$f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{bzw.} \quad f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

zu bestimmen.

Für die Funktion

$$f_1 : [1, 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + 3$$

lässt sich das anstehende Problem wie in Abbildung 2.1 darstellen.

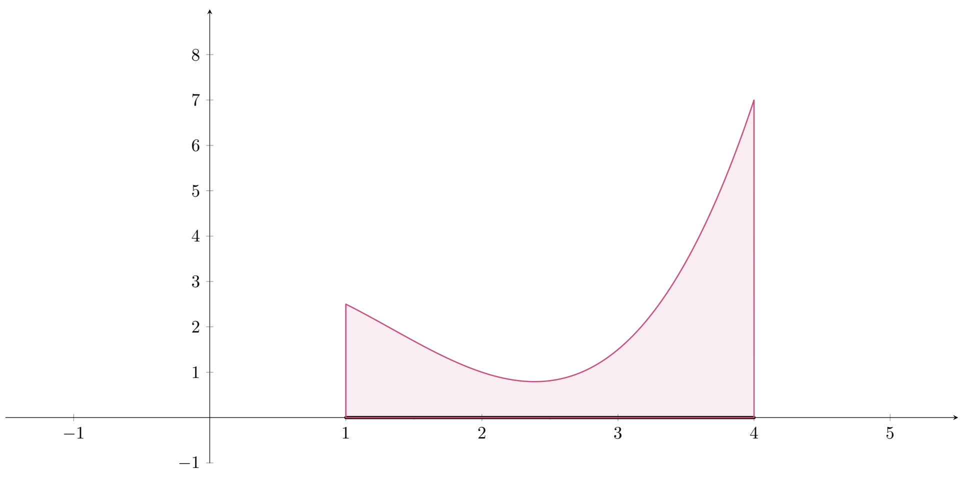

Abbildung 2.1: Die Fäche unter der Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + 3$ im Intervall $[1, 4]$.

Von nun an schreiben wir für zwei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, .., a_p), \mathbf{b} = (b_1, .., b_p) \in \mathbb{R}^p$, dass

$$\mathbf{a} < \mathbf{b}, \qquad \text{falls } a_i < b_i \text{ für alle } i \in \{1, .., p\}$$

und schreiben $Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ für den "*(abgeschlossenen p-dimensionalen achsenparallelen) Quader*[1]"

$$Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \prod_{i=1}^{p} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times .. \times [a_p, b_p] = \{x \in \mathbb{R}^p : a_i \leq x_i \leq b_i \ \forall i = 1, .., p\}.$$

[1]Wir verwenden auch manchmal auch den Begriff *p-dimensionales Intervall*

Das Innere $Q^\circ_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \prod_{i=1}^p (a_i, b_i)$ von $Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ nennen wir den offenen Quader/das offene Intervall. Im Folgenden seien Quader immer *nicht-degeneriert*, d.h. $Q = Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ mit $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

Um den Begriff der *"Fläche unter einer Funktion f"* zu definieren, betrachten wir zuerst jene Funktionen, für die wir dies geometrisch leicht motivieren können. Im Folgenden sei den Fällen $p = 1$ und $p = 2$ ein besonderer Stellenwert beigemessen, um die Begriffsbildung anschaulich zu verdeutlichen.

Definition 2.1 (Zerlegung & Treppenfunktion)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Menge.*

(1) Eine endliche Teilmenge Z der Potenzmenge $\mathcal{P}(B)$ heißt **Zerlegung** *von B, falls gilt:*

(i) Jedes $Q \in Z$ ist ein p-dimensionaler, abgeschlossener Quader;

(ii) $R, S \in Z \implies R^\circ \cap S^\circ = \emptyset$;

(iii) $\bigcup_{P \in Z} P = B$.

Sei $\mathcal{Z}(B)$ die Menge aller Zerlegungen von B. Falls $\mathcal{Z}(B) \neq \emptyset$, so nennen wir B **zerlegbar***.*

(2) Eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion***, falls es eine Zerlegung Z von B gibt, so dass $f|_{P^\circ}$ für jedes $P \in Z$ konstant ist , d.h.*

$$\exists Z \in \mathcal{Z}(B)\ \forall P \in Z\ \exists c_P \in \mathbb{R}\ \forall x \in P^\circ : \quad f(x) = c_P.$$

Wir sprechen auch von **einer Treppenfunktion über (der Zerlegung Z von) B***. Die Menge der beschränkten Treppenfunktionen über B bezeichnen wir mit $\mathrm{T}(B)$.*

Bemerkung 2.2.

(i) Eine zerlegbare Menge B muss als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Quader, die kompakt sind, kompakt sein. Darüberhinaus muss nicht jede kompakte Menge zerlegbar sein, wie man sich z.B. für die abgeschlossene Einheitskugel bezüglich der euklidischen Metrik überlegt, siehe Blatt 6 (Zusatzaufgabe).

(ii) Jeder abgeschlossene Quader in $\mathbb{R}^p$ besitzt trivialerweise eine Zerlegung. Da sich jeder abgeschlossener Quader als Vereinigung zweier abgeschlossener Quader mit disjunktem Inneren schreiben lässt, hat jede zerlegbare Menge unendlich viele Zerlegungen.

(iii) $p = 1$: Für eine Treppenfunktion $f : B \to \mathbb{R}$ über einer zerlegbaren Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ gilt $|f(B)| \leq 2|Z| + 1$. Eine Treppenfunktion über $B \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $p > 1$ muss allerdings nicht beschränkt sein.

(iv) Ein "Quader" in $\mathbb{R}$ ist genau ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall. Man sieht leicht, dass eine Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ genau dann zerlegbar ist, wenn sie gleich der Vereinigung von endlichen vielen kompakten Intervallen ist. Beispielsweise ist

$$\mathcal{Z} = \{[0, 1], [1, 2], [2, 4]\}$$

eine Zerlegung von $[0, 4]$ und

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ -1 & x \in (1, 2] \\ 3 & x \in (2, 4] \end{cases}$$

eine Treppenfunktion auf B. Offensichtlich lässt sich f auch folgendermaßen schreiben

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1] \\ -1 & x \in (1,2] \\ 3 & x \in (2,3] \\ 3 & x \in (3,4] \end{cases}$$

Es gibt also keine eindeutige Zerlegung, über der eine Funktion Treppenfunktion ist.

(v) *Die endliche Vereinigung zerlegbarer Mengen mit paarweise disjunktem Inneren ist zerlegbar.*

Wie bereits in der vorangegangen Bemerkung gesehen, ist die Zerlegung, über die eine Funktion Treppenfunktion ist, nicht eindeutig. Das folgende Lemma zeigt, dass man zu zwei Zerlegungen einer Menge B immer eine "gemeinsame Zerlegung" findet.

Lemma 2.3. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar und $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(B)$. Dann ist*

$$Z_1 \wedge Z_2 := \{P \cap Q \colon P \in Z_1, Q \in Z_2, P^\circ \cap Q^\circ \neq \emptyset\}$$

eine Zerlegung von B.

Beweis. Man sieht leicht, dass der Schnitt zweier abgeschlossener Quader P, Q mit $P^\circ \cap Q^\circ \neq \emptyset\}$ wieder ein abgeschlossener Quader ist. Da

$$\bigcup_{R \in Z_1 \wedge Z_2} R = \bigcup_{P \in Z_1, Q \in Z_2} (P \cap Q) = \bigcup_{P \in Z_1} \bigcup_{Q \in Z_2} (P \cap Q) = \bigcup_{P \in Z_1} \left(P \cap \bigcup_{Q \in Z_2} Q \right) = B,$$

folgt, dass $Z_1 \wedge Z_2$ Eigenschaft (iii) einer Zerlegung erfüllt, weil $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(B)$ sind. Um (ii) zu zeigen, halten wir erst fest, dass $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ für Mengen A, B gilt . Seien nun $P_1, P_2 \in Z_1$ und $Q_1, Q_2 \in Z_2$ mit $(P_1 \cap Q_1) \neq (P_2 \cap Q_2)$. Es folgt, dass $P_1 \neq P_2$ oder $Q_1 \neq Q_2$ und damit $P_1^\circ \cap P_2^\circ = \emptyset$ oder $Q_1^\circ \cap Q_2^\circ = \emptyset$. Daraus folgt

$$(P_1 \cap Q_1)^\circ \cap (P_2 \cap Q_2)^\circ = P_1^\circ \cap Q_1^\circ \cap P_2^\circ \cap Q_2^\circ = \emptyset.$$

□

Proposition 2.4. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar. Dann ist $\mathrm{T}(B)$ ein Untervektorraum des Raumes der beschränkten Funktionen $\mathcal{B}(B, \mathbb{R}) = \{f : B \to \mathbb{R} \colon \sup_{x \in B} |f(x)| < \infty\}$ auf B, der die konstanten Funktionen enthält.*

Beweis. Da B zerlegbar ist, ist jede konstante Funktion eine Treppenfunktion. Genauso ist $\lambda f \in \mathrm{T}(B)$, falls $f \in \mathrm{T}(B)$. Um zu sehen, dass die Summe zweier Treppenfunktionen f und g auf den Zerlegungen Z_1 bzw. Z_2 eine Treppenfunktion ist, nutzen wir Lemma 2.3. Demnach ist $Z_1 \wedge Z_2 \in \mathcal{Z}(B)$ und da $(f+g)|_{(P \cap Q)^\circ} = (f+g)|_{(P^\circ \cap Q^\circ)}$ für $P \in Z_1, Q \in Z_2$ konstant ist, auch $f + g$ eine Treppenfunktion. □

Definition 2.5 (Volumen/Fäche eines Quaders)**.** *Sei $Q = Q_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, ein abgeschlossener Quader in $\mathbb{R}^p$. Dann heißt*

$$\mathrm{vol}(Q) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$$

das **Volumen von** *Q. Im Fall $p = 1$ bzw. $p = 2$ sprechen wir auch von der* **Länge** *$|b - a|$ des Intervalls bzw. der* **Fläche** *des Rechtecks. Wir definieren weiterhin auch das Volumen des offenen Quaders Q° bzw. aller Mengen B mit $Q^\circ \subseteq B \subseteq Q$ durch $\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(Q)$.*

Definition 2.6 (Integral einer Treppenfunktion)**.** *Sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion über einer Zerlegung Z von $B \subseteq \mathbb{R}^p$. Dann heißt*

$$\int_B f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} := \sum_{Q \in \mathcal{Z}_f} \mathrm{vol(Q)} f(x_Q),$$

das **Integral von** f **über** B*, wobei $x_Q \in Q$ beliebig ist.*

Dass das Integral einer Treppenfunktion wohldefiniert ist — d.h. unabhängig von der gewählten Zerlegung, auf der f Treppenfunktion ist, — muss erst gezeigt werden. Dies beruht auf folgendem Resultat.

Proposition 2.7. *Seien Z_1 und Z_2 Zerlegungen einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion auf Z_1 und Z_2. Dann gilt*

$$\sum_{P \in Z_1} \mathrm{vol}(P) f(x_P) = \sum_{Q \in Z_2} \mathrm{vol}(Q) f(y_Q),$$

wobei $x_P \in P^\circ$ und $y_Q \in Q^\circ$ beliebig gewählt sind.

Beweis. Wir halten zuerst fest, dass die Wahl von x_P bzw. y_Q in P° bzw. Q° unerheblich für den Wert $f(x_P)$ bzw. $f(y_P)$ ist, da f auf P° und Q° konstant ist. Es genügt zu zeigen, dass die Aussage für die Zerlegungen Z_1 und $Z_1 \wedge Z_2$ gilt. Sei $P \in Z_1$ und betrachte die Menge

$$J = \{P \cap Q \colon Q \in Z_2, P^\circ \cap Q^\circ \neq \emptyset\},$$

die wegen Lemma 2.3 eine Zerlegung von P ist. Wegen $P^\circ \supseteq (P \cap Q)^\circ = P^\circ \cap Q^\circ$ nimmt f auf P° und $(P \cap Q)^\circ$ denselben konstanten Wert für jedes $Q \in Z_2$ an. Damit folgt die Behauptung, wenn wir die Identität

$$\mathrm{vol}(P) = \sum_{R \in J} \mathrm{vol}(R)$$

zeigen. Dazu nutzen wir folgende Formel, die sich grafisch leicht motivieren lässt:

$$\forall Q \text{ Quader}: \qquad \mathrm{vol}(Q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^p |Q \cap \varepsilon\mathbb{Z}^p|,$$

wobei $\varepsilon\mathbb{Z}^p = \{\varepsilon \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^p\}$ das ε-Gitter in $\mathbb{R}^p$ ist. Diese Formel kann man leicht für den Fall $p = 1$ zeigen, indem man sich überlegt, dass

$$\lfloor \tfrac{b-a}{\varepsilon} \rfloor - 1 \leq |[a, b] \cap \varepsilon\mathbb{Z}| \leq \lfloor \tfrac{b-a}{\varepsilon} \rfloor + 1,$$

und dass $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \rfloor = b - a$. Der Fall $p > 1$ folgt aus obiger Ungleichung, indem man das Produkt betrachtet.

□

Die Abbildungen 2.2 (links) und 2.3 zeigen eine Zerlegung des Intervalls $B_1 = [1, 4]$ mit

$$Z_1 = \{[1, 1.5], [1.5, 2.5], [2.5, 3], [3, 4]\}$$

mit einer Treppenfunktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & 1 \leq x < 1.5 \\ 1.4 & x = 1.5 \\ 0.5 & 1.5 < x < 2.5 \\ 0.7 & 2.5 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x < 4 \\ 3.4 & x = 4 \end{cases}$$

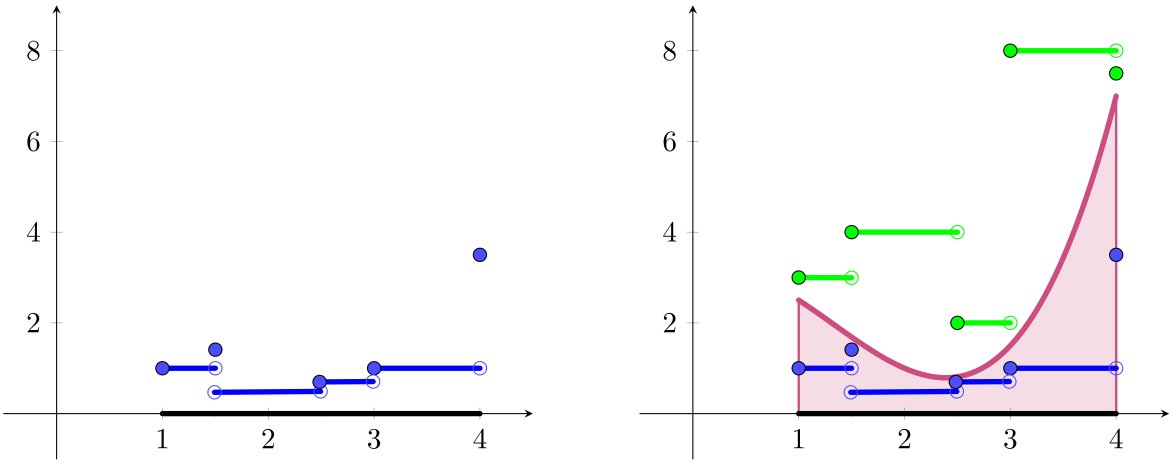

Abbildung 2.2: Treppenfunktion f_1 (links) und Beziehung zu Integralbegriff (rechts)

sowie die Zerlegung von $B_2 = [1,5] \times [2,7]$ durch

$$Z_2 = \{[1,3] \times [2,7]\,, [3,5] \times [2,4]\,, [3,5] \times [4,7]\}$$

mit der Treppenfunktion

$$f_2 : x \mapsto \begin{cases} 4 & (x,y) \in [1,3) \times [2,7] \\ -3 & (x,y) \in [3,5] \times [2,4] \\ 1 & (x,y) \in [3,5] \times (4,7] \end{cases}$$

Nach Definition 2.6 gilt damit für das Integral der Treppenfunktion f_2

$$\int_B f_2(x)dx = 2 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot 1 = 34$$

Proposition 2.8. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar. Die Abbildung*

$$I_B : \mathrm{T}(B) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

ist linear. Außerdem gilt

- $f, g \in \mathrm{T}(B),\ f \leq g \implies \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}x \leq \int_B g(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$
- $f \in \mathrm{T}(B) \implies |f| \in \mathrm{T}(B)$ *und* $\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}x \leq \int_B |f(\mathbf{x})|\mathrm{d}\mathbf{x}$.

Beweis. Folgt leicht aus Lemma 2.3, der Wohldefiniertheit des Integrals sowie elementaren Eigenschaften von Treppenfunktionen. □

Bemerkung 2.9.

(i) Insbesondere folgt aus den in Proposition 2.8 gezeigten Eigenschaften, dass I_B eine lineare Abbildung ist und eine Konstante $C = \int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x} > 0$ existiert, so dass

$$|I_B(f)| \leq C\|f\|_\infty = C \sup_{x \in B} |f(x)| \qquad \forall f \in \mathrm{T}(B).$$

Wegen Satz 1.71 ist I_B also stetig von $\mathrm{T}(B)$ nach $\mathbb{R}$, wenn wir $\mathrm{T}(B)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

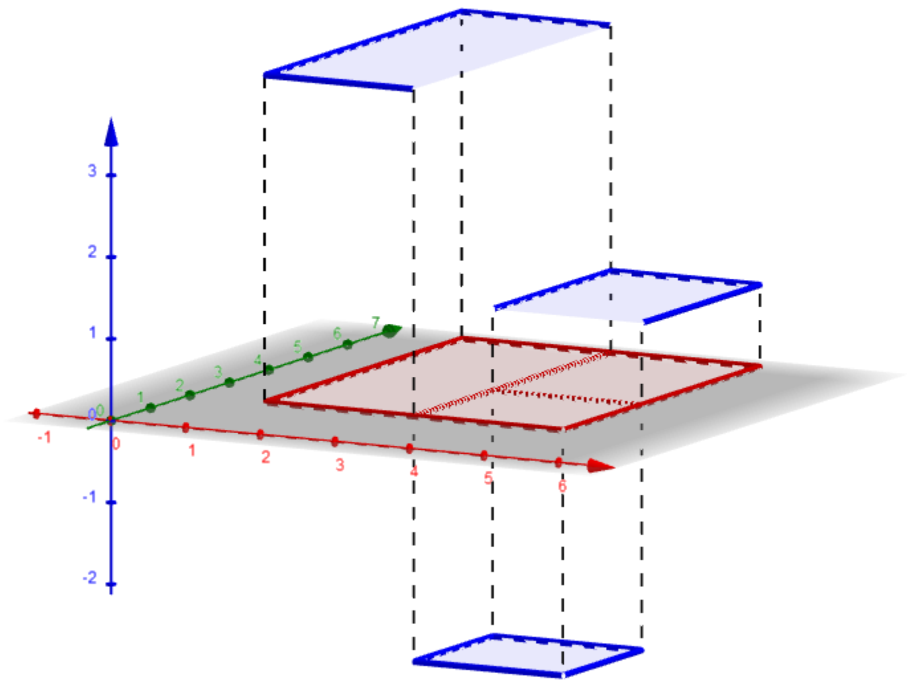

Abbildung 2.3: Die Treppenfunktion f_2.

(ii) *Wir erinnern daran, dass wir das Integral — d.h. die Fläche/das Volumen — einer Funktion über einer Menge B für allgemeinere Funktionen als Treppenfunktionen bestimmen wollen. Der Punkt (i) dieser Bemerkung gibt uns bereits die Möglichkeit, den Integralbegriff folgendermaßen "abstrakt" auf allgemeinere Funktionen zu erweitern. Da $\mathrm{T}(B)$ ein Teilraum der beschränkten, reellwertigen Funktionen $\mathcal{B}(B;\mathbb{R}) = \{f : B \to \mathbb{R} \colon \sup_{x\in B} |f(x)| < \infty\}$ ist (Proposition 2.4), und $\mathrm{T}(B)$ offensichtlich dicht in $\overline{\mathrm{T}(B)}$ ist, dem Abschluss von $\mathrm{T}(B)$ im normierten Raum $\mathcal{B}(B;\mathbb{R})$. Wegen (i) ist $I_B : \mathrm{T}(B) \to \mathbb{R}$ stetig und linear und kann deshalb eindeutig zu einer stetigen, linearen Abbildung*

$$\overline{I}_B : \overline{\mathrm{T}(B)} \to \mathbb{R}$$

fortgesetzt werden, siehe Korollar 1.84 (Hier geht ein, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist). Wir könnten also das Integral einer Funktion in $\overline{\mathrm{T}(B)}$ mittels $\overline{I}_B(f)$ definieren. Dieses Integral wird **das Regelintegral** *genannt. Wir wählen im Folgenden aber einen konstruktiveren (und klassischeren) Weg, um das Integral zu definieren und werden den Zusammenhang zu $\overline{I}_B$ klären.*

Definition 2.10 (Oberes u. Unteres Integral)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar und sei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt*

$$\int_B^* f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \inf\left\{I_B(h) \colon h \in \mathrm{T}(B), h \geq f\right\},$$

oberes (Darboux'sches) Integral *von f, und*

$$\int_{*B} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\left\{I_B(g) \colon g \in \mathrm{T}(B), g \leq f\right\},$$

unteres (Darboux'sches) Integral *von f.*
Es gilt immer

$$\int_{*B} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_B^* f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Beispiel 2.11.

(a) *Für jede Treppenfunktion gilt $\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B^* f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{*B} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.*

(b) *Für jede beschränkte Funktion f gilt*

$$-\infty < \int_{*B} f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_B^* f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mathbf{x} < \infty.$$

Dies folgt aus der Ungleichung $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$.

(c) *Das obere und untere Integral einer Funktion muss nicht übereinstimmen, wie man anhand des Beispiels der* **Dirichletfunktion**

$$f_D : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

sieht. Es gilt, dass $\int_B^* f_D(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\int_{*B} f_D(x)\mathrm{d}x = 0$.

Wir kommen nun zum zentralen Begriff dieses Kapitels, dem Riemann-Integral, welches auf Bernhard Riemann zurückgeht. Der hier gewählte Zugang über das obere und untere Integral geht allerdings auf Gaston Darboux zurück, siehe auch die abschließenden Bemerkungen am Ende des Kapitels.

Definition 2.12 (Riemann-Integral)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar. Eine beschränkte Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ heißt* **Riemann-integrierbar** *über B, falls das untere und das obere Integral übereinstimmen, und wir nennen diese Zahl das* **(Riemann) Integral** $\int_B f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$. *Alternativ schreiben wir auch*

$$\int_B f(x)\, d(x_1, .., x_p) \quad \text{oder} \quad I_B(f),$$

bzw. — falls $p = 1$ und $B = [a, b]$ — auch $\int_a^b f(x)dx$; dann sprechen wir auch vom

"Integral von a nach b der Funktion f".

Anstatt x kann auch beliebiger anderer Buchstabe als Integrationsvariable verwendet werden.

In Definition 2.12 wird für den Integralbegriff der Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ die Funktion f durch Treppenfunktionen g und h "eingegrenzt". Dies veranschaulicht für o.a. Funktion f_1 die Darstellung in Abbildung 2.2(rechts).

Beispiel 2.13.

(a) Jede Treppenfunktion ist integrierbar.

(b) Die Dirichlet-Funktion ist nicht integrierbar, siehe Beispiel 2.11(c).

(c) Die Funktion $f : [4, 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10x$ ist integrierbar: Um dies mit Hilfe des oberen und unteren Integrals zu sehen, betrachten wir die Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei der im Schritt von n nach $n+1$ alle Intervalle von Z_n in der Mitte geteilt werden,d.h. $Z_1 = \{[4, 5]\}$, $Z_2 = \{[4, \frac{4+5}{2}, \frac{4+5}{2}, 5], \ldots$ und betrachten auf Z_n Treppenfunktionen definiert durch

$$h_n|_{(a,b)} = \sup_{x\in(a,b)} f = 10b, \qquad g_n|_{(a,b)} = \inf_{x\in(a,b)} f = 10a$$

für $[a, b] \in Z_n$ (Wir können h_n, g_n an allen Punkten, die nicht in (a, b) für $[a, b] \in Z_n$ liegen, gleich 0 setzen.). Daraus ergibt sich mit Hilfe von $\sum_{\ell=1}^N \ell = \frac{1}{2}N(N + 1)$:

$$\begin{aligned}\int_4^5 h_n(x)dx &= \sum_{[a,b]\in Z_n} \mathrm{vol}((a, b))10b \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-(n-1)}10(4 + k2^{-(n-1)}) \\ &= 10(4 + 2^{-2(n-1)}\frac{1}{2}2^{n-1}(2^{n-1} + 1))\end{aligned}$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \int_4^5 h_n(x)dx = 10(4 + \frac{1}{2}) = 45$. Ebenso berechnet man

$$\begin{aligned}\int_4^5 g_n(x)dx &= \sum_{[a,b]\in Z_n} \mathrm{vol}((a, b))10a \\ &= \sum_{k=1}^{2^{n-1}} 2^{-(n-1)}10(4 + (k-1)2^{-(n-1)}) \\ &= 10(4 + 2^{-2(n-1)}\frac{1}{2}(2^{n-1} - 1)2^{n-1}),\end{aligned}$$

und $\lim_{n\to\infty} \int_4^5 g_n(x)dx = 10(4 + \frac{1}{2}) = 45$.
Somit erkennen wir, dass der Nachweis der Integrierbarkeit mit Hilfe der Definition

über unteres und oberes Integral bereits für relativ elementare Funktion etwas mühsam ist. Wir werden in Kürze zeigen, dass stetige Funktionen auf zerlegbaren Mengen immer integrierbar sind. Darüberhinaus werden wir in Abschnitt 2.2 Methoden kennenlernen, wie man Integrale von bestimmten Funktionen relativ einfach berechnen kann.

(d) *Sei* $B = [0,1] \times [0,1]$ *und* $f : B \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \wedge x \in \{0,1\} \\ -1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \wedge y \in \{0,1\} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Entgegen der Vermutung, dass die Funktion sich wie die Dirichletfunktion verhält, ist f *integrierbar, weil* f *eine Treppenfunktion (auf der Zerlegung* $\{[0,1] \times [0,1]\}$*) ist. Das Integral ist* 0*, da dies der Wert ist, den* f *auf* $(0,1) \times (0,1)$ *annimmt.*

(e) *Das nachstehende Beispiel soll das Integral einer Funktion in zwei Veränderlichen anhand der folgender Funktion veranschaulichen (siehe Abbildung 2.4).*

$$f_3 : B \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \sin(x)\sin(y) + 3,$$

mit $B = [-2\pi; 2\pi] \times [-2\pi; 2\pi]$*. Sei* $Z_3 = \{B\}$ *sowie die konstanten Treppenfunktionen*

$$g(x,y) = 1, \quad h(x,y) = 4 \quad \forall (x,y) \in B.$$

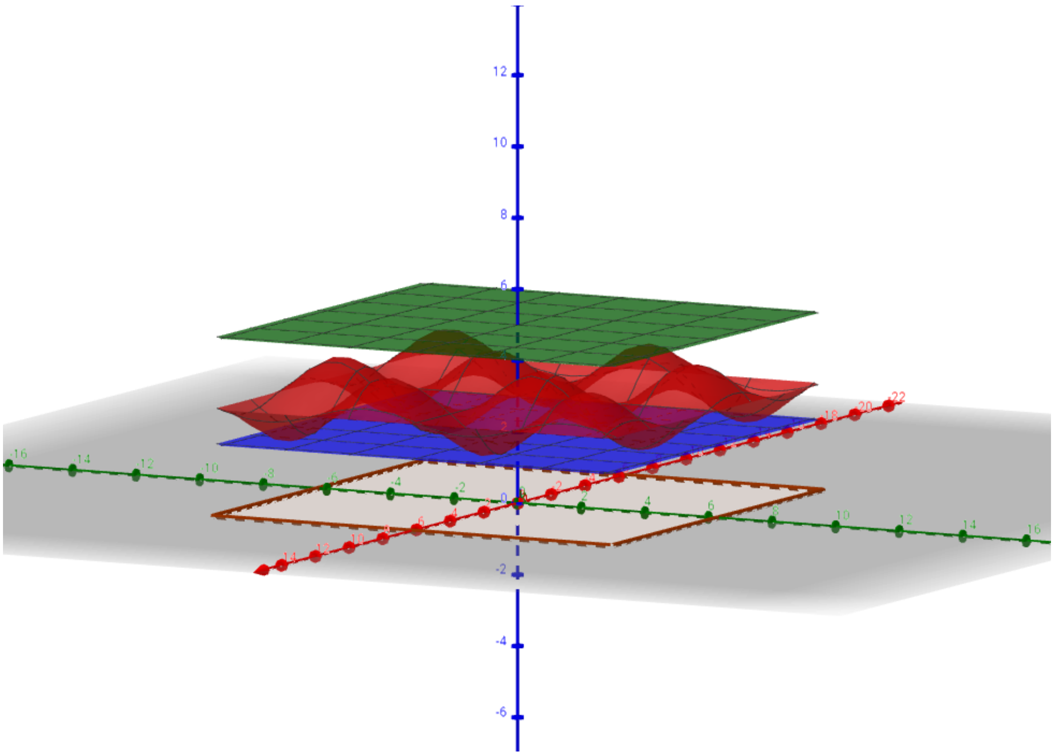

Abbildung 2.4: Graph der Funktion $f(x) = sin(x \cdot sin(y)$ zwischen zwei Treppenfunktionen

Hieraus folgt

$$\int_B 1 d(x,y) \leq \int_B \sin(x)\sin(y) d(x,y) \leq \int_B 4 d(x,y),$$

und somit
$$\Rightarrow (4\pi)^2 \cdot 1 \leq \int_B \sin(x)\sin(y)d(x,y) \leq (4\pi)^2 \cdot 4.$$

Satz 2.14. *$f : B \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, falls*
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists g, h \in \mathrm{T}(B): \quad g \leq f \leq h \text{ und } I_B(h) - I_B(g) < \varepsilon.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Integrierbarkeit. □

Bemerkung 2.15. *(i) Eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ auf einer zerlegbaren Menge ist genau integrierbar, falls Folgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{T}(B)$ existieren, so dass $g_n \leq f \leq h_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folgen $\left(\int_B h_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\int_B g_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und*
$$\lim_{n\to\infty} \int_B h_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_B g_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$
In diesem Fall ist $\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_B h_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_B g_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$.

(ii) Die Integrierbarkeit (und der Wert des Integrals) einer Funktion ist unabhängig von den Werten, den die Funktion auf endlich vielen festen Werten annimmt. Dies liegt an der entsprechenden Eigenschaft für Treppenfunktionen und dem Umstand, dass man zu einer Menge B und endlich vielen Punkten in B eine Zerlegung findet, so dass die Punkte alle im Rand der Quader der Zerlegung liegen (siehe die 3 Punkte an den Stellen 1,5 und 4 in Abbildung 2.2 rechts).

Proposition 2.16 (Linearität, Monotonie, Positivität des Integrals).
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar. Die Menge $\mathrm{R}(B)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die Abbildung
$$I_B : \mathrm{R}(B) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$$
ist linear. Weiterhin gilt für $f, g \in \mathrm{R}(B)$, dass

(i) $f \leq g$ impliziert, dass $\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int_B g(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$

(ii) $f_+ = \max\{f(\cdot), 0\}$, $f_- = -\min\{f(\cdot), 0\}$ und $|f|$ sind integrierbar und
$$\left|\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right| \leq \int_B |f(\mathbf{x})|\mathrm{d}\mathbf{x}$$

(iii) $f \cdot g \in \mathrm{R}(B)$ und, falls $g \geq C > 0$, $\frac{f}{g} \in \mathrm{R}(B)$.

Beweis. Dies folgt leicht aus den entsprechenden Eigenschaften für Treppenfunktionen, Proposition 2.8, sowie Satz 2.14. Siehe auch Blatt 6 bzw. Blatt 7 für Details. □

Satz 2.17. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar. Jede Funktion im Abschluss von $\mathrm{T}(B)$ bezüglich der Supremumsnorm ist integrierbar, d.h.*
$$\overline{\mathrm{T}(B)} \subseteq \mathrm{R}(B)$$
und für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{T}(B)$ mit $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f \in \mathrm{R}(B)$ $(n \to \infty)$ gilt
$$\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$
Daraus folgt, dass f integrierbar ist, falls f auf B stetig ist.

Ein Element in $\overline{\mathrm{T}(B)}$ wird **Regelfunktion** *genannt.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{T}(B)$ und $f_n \to f$ in der Supremumsnorm, wobei $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist. Ziel ist es, Satz 2.14 anzuwenden, um zu zeigen, dass f integrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x}},$$

wobei man beachte, dass $\int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x} > 0$ ist (warum?). Sei Z eine Zerlegung von B bezüglich der f_n Treppenfunktion und wir definieren

$$h_n|_{Q^\circ} = \sup_{x\in Q^\circ} f(x), \qquad g_n|_{Q^\circ} = \inf_{x\in Q^\circ} f(x), \qquad h_n(x) = g_n(x) = f(x) \text{ für } x \in B \setminus \bigcup_{Q\in Z} Q^\circ$$

$$h_n(x) - g_n(x) \leq |h_n(x) - g_n(x)| \leq |h_n(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x}}.$$

Daraus folgt

$$\int_B h_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_B g_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B h_n(\mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \frac{\varepsilon}{\int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x}} \int_B 1\mathrm{d}\mathbf{x} = \varepsilon.$$

Es bleibt zu zeigen, dass jede stetige Funktion auf B sich als Grenzwert bezüglich der Supremumsnorm von Treppenfunktionen darstellen lässt. □

Die Menge der Regelfunktionen $\overline{\mathrm{T}(B)}$ lässt sich im Fall $p = 1$ schön durch folgende Proposition charakterisieren

Proposition 2.18. *Sei I ein kompaktes Intervall mit $I^\circ \neq \emptyset$. Dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann ein Element von $\overline{\mathrm{T}(I)}$, wenn für jedes $x \in I$ die einseitigen Grenzwerte von f existieren*[2].

Beweis. Siehe Vorlesung bzw. auch Blatt 7. □

Korollar 2.19. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}$ zerlegbar. Eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ ist insbesondere in den folgenden Fällen integrierbar:*

- *f ist bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist, oder*
- *$\exists Z \in \mathcal{Z}(B)$ so dass f monoton ist auf allen Intervallen in Z.*

Beweis. Dass Funktionen, die bis auf endlich viele Sprungstellen stetig sind, integrierbar sind, folgt direkt aus Proposition 2.18. Dass (auf Intervallen) monotone Funktionen Regelfunktionen sind, also in $\overline{\mathrm{T}(B)}$ liegen, lässt sich mit einem ähnlichen Beweis zeigen wie für stetige Funktionen (Hausaufgabe). □

Bemerkung 2.20.

(i) Aus den Definitionen der Zerlegung und des Integrals folgt unmittelbar, dass für zerlegbare Mengen B und C mit $(B\cap C)^\circ = \emptyset$ eine Funktion $f : B \cup C \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn $f|_B$ und $f|_C$ integrierbar sind. Es gilt

$$\int_{B\cup C} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_C f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

[2] Für $\partial I = \{a, b\}$, $a < b$, existieren sinngemäß nur die Grenzwerte $\lim_{t\to a, t>a} f(t)$ und $\lim_{t\to b, t<b} f(t)$.

Insbesondere gilt, dass für $a < b < c$

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Andererseits gilt für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit M zerlegbar, dass für jede zerlegbare Menge $B \subseteq M$ die Einschränkung $f|_B : B \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn $f \cdot 1_B$ integrierbar ist, wobei

$$1_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \in M \setminus B. \end{cases}$$

(ii) Die in Bemerkung 2.9 erwähnte stetige Fortsetzung der Abbildung $\mathrm{T}(B) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ stimmt auf $\overline{\mathrm{T}(B)}$ mit dem Riemann-Integral überein.

Beispiel 2.21. *(a) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $x \in (0,1]$ und $f(0) = 0$ ist integrierbar, aber keine Regelfunktion (warum?). Das heisst, im Allgemeinen gilt $\overline{\mathrm{T}(B)} \subsetneq \mathrm{R}(B)$.*

(b) Alle stetige Funktionen (insbesondere die aus der Analysis I bekannt sind) sind über kompakten Teilintervallen (nicht einpunktig) integrierbar.

(c) Die **Thomaesche**-*Funktion*

$$f_T : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \text{ wobei } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ist als Regelfunktion integrierbar. Man beachte auch, dass f_T stetig an allen irrationalen Zahlen in $[0,1]$ ist, aber unstetig sonst, siehe Blatt 7 Aufgabe 4.

(d) Die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

liegt nicht in $\overline{\mathrm{T}([0,1])}$, da der (einseitige) Grenzwert an $x = 0$ nicht existiert. Die Funktion ist aber dennoch integrierbar; dies sieht man mit Hilfe von Satz 2.14, indem man das Intervall in $I_1 = [0, \varepsilon]$ und $I_2 = [\varepsilon, 1]$ zerteilt und die Funktion auf I_1 durch die konstante 1- bzw. 0-Funktion abschätzt.

Wir haben bereits angedeutet, dass die Eigenschaft der Zerlegbarkeit einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^p$ selbst für kompakte Mengen oft nicht erfüllt ist. Um auch beispielsweise das Integral über einen Kreis zu berechnen, führen wir folgenden Begriff ein:

Definition 2.22. *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt **messbar**, falls ein Quader Q existiert mit*

$$M \subseteq Q \quad \text{und} \quad 1_M(x) = \left.\begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \in Q \setminus M \end{cases}\right\} \text{über } Q \text{integrierbar ist.}$$

Eine beschränkte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar über M falls $f 1_M$ integrierbar über Q ist.

Der Begriff der messbaren Menge ist offensichtlich darauf "zugeschnitten", Integrale auf allgemeineren Mengen zu berechnen, indem die Menge einem Quader eingeschrieben wird. Die zu integrierende Funktion wird entsprechend durch 0 fortgesetzt. Man beachte, dass im Allgemeinen nicht klar ist, ob die resultierende Funktion auf dem Quader integrierbar ist.

Bemerkung 2.23.

(i) Beispiele für messbare Mengen, die nicht zerlegbar sind, sind

- *abgeschlossene Kugeln* $K_r(\mathbf{x})$,
- *abgeschlossene Dreiecke im* $\mathbb{R}^2$,

siehe auch Blatt 6. Aber nicht jede Teilmenge in $\mathbb{R}^p$ *ist messbar, wie man anhand von* $M = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *sieht: Dann ist* 1_M *nämlich genau die Dirichletfunktion, Beispiel 2.13.*

(ii) Die Menge

$$M = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ist messbar. Um dies zu sehen, sei $Q = [0,1]$. *Offensichtlich gilt* $Q \supseteq M$ *und wir zeigen, dass* 1_M *integrierbar auf* Q *ist. Sei* $\varepsilon > 0$ *und betrachte* $Q = [0,\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$ *und* $1_{M\cap[0,\varepsilon]} : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$, $1_{M\cap[\varepsilon,1]} : [\varepsilon,1] \to \mathbb{R}$. *Es existiert* $N \in \mathbb{N}$ *so dass* $\frac{1}{n} < \varepsilon$ *für alle* $n \geq N$. *Auf* $[\varepsilon, 1]$ *betrachte die Treppenfunktion* h *definiert durch*

$$h(x) = 1, \quad x \in \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{N^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{N^2} \right], 1 < n < N,$$

und $h(x) = 1$ *für* $x \in [1 - \frac{1}{N^2}, 1]$. *Es ist leicht zu sehen, dass diese Intervalle paarweise disjunkt sind und sich zu einer Zerlegung von* $[\varepsilon, 1]$ *ergänzen lassen. Für das Integral gilt*

$$\int_{\varepsilon}^{1} h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{N^2} + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{2}{N^2} = \frac{2N-1}{N^2} < \frac{2}{N} < 2\varepsilon.$$

Außerdem können wir $h(x) = 1$ *für* $x \in [0, \varepsilon)$ *setzen, womit insgesamt*

$$\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\varepsilon} h(x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^1 h(x)\mathrm{d}x < \varepsilon + 2\varepsilon,$$

wegen Bemerkung 2.21. Somit ist 1_M *nach Satz 2.15 integrierbar auf* $[0,1]$.

Satz 2.24. *Sei* M *messbar und kompakt. Dann ist jede stetige Funktion* $f : M \to \mathbb{R}$ *integrierbar.*

Beweis. nicht in Vorlesung behandelt. Siehe beispielsweise [7]. □

Allgemeiner gelten folgende Resultate, die für den Beweis von Theorem 2.24 verwendet werden können.

Satz* A. *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^p$ *messbar und kompakt und* $f : M \to \mathbb{R}$ *so, dass* $f|_B$ *integrierbar für alle zerlegbaren Mengen* $B \subseteq M$. *Dann ist* f *integrierbar.*

Lemma* B. *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^p$ *messbar und kompakt. Dann ist* ∂M *messbar mit Maß* $\int_M 1\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$.

Bemerkung 2.25. *(i) Man sieht leicht, dass* $M \subseteq \mathbb{R}^p$ *genau dann messbar ist, wenn für* <u>*jeden*</u> *Quader* $Q \supseteq M$ *gilt, dass* $1_M : Q \to \mathbb{R}$ *integrierbar ist.*

(ii) *Eine messbare Menge ist genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen ist.*

(iii) *Mit (i) folgt aus der Linearität des Integrals (auf Quadern), dass auch das Integral von Funktionen auf messbaren Mengen linear ist. Sinngemäß übertragen sich auch die anderen Eigenschaften von Proposition 2.16 und Bemerkung 2.20(i).*

(iv) ** Man beachte folgende etwas überraschende "Eigenheit" des Riemann-Integrals: Die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist nicht messbar, weil die Dirichletfunktion nicht integrierbar ist. Andererseits ist die Thomaesche-Funktion, die an den selben Stellen von 0 verschieden ist, integrierbar. Anhand dessen sieht man, dass auch eine Funktion, die Werte ungleich 0 auf einer nicht-messbaren Menge annimmt, trotzdem integrierbar sein kann.*

Satz 2.26 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.** *Sei M messbar, kompakt und* **zusammenhängend**[3]*, d.h. für alle $x, y \in M$ existiert eine stetige Funktion $T : [0,1] \to M$ mit $T(0) = x$ und $T(1) = y$. Außerdem sei $\phi : M \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\phi \geq 0$. Dann gilt für jede stetige Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, dass ein $\boldsymbol{\xi} \in M$ existiert mit*

$$\int_M f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = f(\boldsymbol{\xi}) \int_M \phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Beweis. siehe Vorlesung. □

Man sieht sofort, dass die Annahme "$\phi \geq 0$ in Satz 2.26 auch durch "$\phi \leq 0$" ersetzt werden kann.

2.2 Integrale von Funktionen in einer Veränderlichen

Bisher galt der Fokus des Kapitels der Definition des Integrals sowie der Frage, wann eine Funktion integrierbar ist. Im Folgenden ist das Ziel, Integrale zu berechnen.

Konvention $I = [a,b]$, $a < b$, $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ und $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Satz 2.27 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist die Funktion*

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

stetig. Ist darüberhinaus f an $x_0 \in [a,b]$ stetig, so ist F an x_0 differenzierbar[4] *und es gilt*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Beweis. Wegen Bemerkung 2.20 (i) ist F wohldefiniert. Sei $x_0 \in [a,b)$ und $h \in (0, b - x_0]$. Dann gilt wegen (2.1), dass

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(y)\mathrm{d}y - \int_a^{x_0} f(y)\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x_0+h} f(y)\mathrm{d}y. \tag{2.2}$$

[3] Die Abbildung T wird auch *Weg* genannt, weshalb man auch von "Weg-zusammenhängend" spricht.
[4] An den Randpunkten a, b ist hiermit entsprechend einseitige Differenzierbarkeit gemeint.

Wegen der Positivität und der Monotonie des Integrals (Proposition 2.16) folgt somit

$$|F(x_0+h)-F(x_0)| \leq \sup_{y\in(x_0,x_0+h)} |f(y)| \int_{x_0}^{x_0+h} 1\mathrm{d}y = h \sup_{y\in(x_0,x_0+h)} |f(y)|$$

Da f als integrierbare Funktion beschränkt ist, folgt, dass F rechtsseitig-stetig ist. Analog sieht man, dass F an $x_0 \in (a,b]$ linksseitig-stetig ist und somit F stetig auf $[a,b]$. Aus (2.2) folgt mit Hilfe von $\int_{x_0}^{x_0+h} 1\mathrm{d}y = h$ und der Lineartität des Integrals, dass

$$\frac{1}{h}\left(F(x_0+h)-F(x_0)\right) - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \left(f(y)-f(x_0)\right)\mathrm{d}y$$

für $x_0 \in [a,b)$ und $h>0$ hinreichend klein. Wie zuvor erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{1}{h}|F(x_0+h)-F(x_0)| \leq \sup_{y\in(x_0,x_0+h)} |f(y)-f(x_0)|.$$

Falls f an x_0 stetig ist, so folgt, dass die rechte Seite gegen 0 geht wenn $h\to 0^+$, da es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $h>0$ gibt mit $|f(y)-f(x_0)|<\varepsilon$ für alle $y\in(-h+x_0,x_0+h)$. Also ist F rechtssseitig-differenzierbar an x_0. Die linkseitige Differenzierbarkeit folgt analog. □

In der Literatur ist der Hauptsatz auch als *Fundamentalsatz der Analysis* bekannt. Häufig wird nur der Spezialfall für stetiges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ angegeben und mit Hilfe des Mittelwertsatzes bewiesen. Als Ursprung des Hauptsatzes werden meist die Arbeiten von Leibniz und Newton angeben.

In Kürze werden wir sehen, dass der Hauptsatz sehr nützlich ist, um Integrale zu bestimmen. Dazu ist folgender Begriff hilfreich.

Definition 2.28 (Stammfunktion)**.** *Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall* [5] *mit $I^\circ\neq\emptyset$ und $g:I\to\mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion $G:I\to\mathbb{R}$* **Stammfunktion** *von g falls G differenzierbar ist und $G'=f$ (Hierbei ist an den Randpunkten von I in I entsprechend einseitige Differenzierbarkeit gemeint.).*

Proposition 2.29. *Seien $I,J\subseteq\mathbb{R}$ Intervalle mit $I^\circ,J^\circ\neq\emptyset$. Seien S_f,S_g Stammfunktionen von $f:I\to\mathbb{R}$ bzw. $g:I\to\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) Für jedes $c\in\mathbb{R}$ ist S_f+c ist eine Stammfunktion von f. Ist umgekehrt F eine Stammfunktionen von f, so gibt es eine Konstante $c\in\mathbb{R}$, so dass $F=S_f+c$.

(2) Für jedes $\lambda\in\mathbb{R}$ ist λS_f+S_g eine Stammfunktion von $\lambda f+g$.

(3) Sind f,g differenzierbar und $S_{fg'}$ eine Stammfunktion von fg', so ist $fg-S_{fg'}$ eine Stammfunktion von $f'g$.

(4) Ist $h:J\to I$ differenzierbar, so ist $S_f\circ h:J\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $(f\circ h)\cdot h'$.

Beweis. Dass S_f+c eine Stammfunktion von f ist, folgt aus der Linearität der Ableitung und weil die Ableitung einer auf einem Intervall konstanten Funktion gleich 0 ist. Die zweite Aussage in (1) gilt, weil $(F-S_f)'=F'-S_f'=0$ ist und deshalb $F-S_f:I\to\mathbb{R}$ eine konstante Funktion ist, Analysis I. Die anderen Aussagen folgen unmittelbar aus der Linearität der Ableitung sowie der Produkt- bzw. Kettenregel. □

[5] Im Gegensatz zur Konvention des Kapitels seien hier auch offene, halb-offene und unbeschränkte Intervalle zugelassen.

Bemerkung 2.30. *Nach Proposition 2.29 (1) ist die Stammfunktion S_f einer Funktion f bis auf eine additive Konstante eindeutig. Deshalb lassen sich die Punkte (2), (3) und (4) der Proposition auch wie folgt schreiben.*

(2) $S_{\lambda f+g} = \lambda S_f + S_g + \text{Konstante}$

(3) $S_{fg'} = fg - S_{fg'} + \text{Konstante}$

(4) $S_{(f\circ h)h'} = S_f \circ h + \text{Konstante}$

Man beachte auch, dass es für Aussage (1) wesentlich ist, dass die Funktionen auf Intervallen betrachtet werden: Würde man die Definition einer Stammfunktion auf Mengen wie beispielsweise die Vereinigung von Intervallen erweitern, so sind Stammfunktionen im Allgemeinen nicht mehr bis auf additive Konstanten eindeutig.

Korollar 2.31 (Stammfunktion und Integral)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann definiert $F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ eine Stammfunktion von f. Weiterhin gilt für jede Stammfunktion S_f von f,*

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = F(b) = S_f(b) - S_f(a) =: S_f|_a^b$$

Beweis. Dass F eine Stammfunktion ist, folgt direkt aus dem Hauptsatz, Satz 2.27. Nach Definition gilt $\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = F(b)$. Da sich Stammfunktionen nur durch einen additive Konstante unterscheiden, Proposition 2.29(1), und $F(a) = 0$ ist, gilt $S_f(b) - S_f(a) = F(b) - F(a) = F(b)$. □

Der Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Integral motiviert folgenden Begriff:

Definition 2.32. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $I^\circ \neq \emptyset$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Die "Gesamtheit" (siehe nachfolgende Bemerkung) aller Stammfunktionen S_f von f wird als* **unbestimmte Integral** *$\int f$ von f bezeichnet.*

Bemerkung 2.33.

(i) Im folgenden verwenden wir die Notation $\int f$ für das unbestimmte Integral, z.B.

$$\int \cos, \qquad \int x.$$

Bei letzterem meinen wir das "unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = x$. In der Literatur wir hierfür auch oft $\int x\underset{\cdot}{x}$ geschrieben, was auf der Verbindung der Stammfunktion mit dem Integral beruht. In dieser Vorlesung sind beide Notationen zugelassen.

(ii) Eine Stammfunktion ist abhängig von dem Intervall, auf dem die Funktion betrachtet wird.

(iii) Der Begriff "Gesamtheit" in Definition 2.32 kann mit Hilfe folgender Äquivalenzrelation präzisiert werden: Zwei Stammfunktionen auf einem Intervall sind "gleich", in Zeichen $\equiv$, wenn sie sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Das unbestimmte Integral ist demnach als Äquivalenzklasse definiert. So lässt sich entsprechend Proposition 2.29(3) durch $S_{fg'} \equiv fg - S_{fg'}$ ausdrücken. In der Literatur wird diese Relation oftmals wieder mit dem Symbol "=" notiert, weil diese Identifikation zu keiner Verwirrung führt.

(iv) *Das unbestimmte Integral kann als Umkehrabbildung zur Differentiation angesehen werden. Offensichtlich ist jede Stammfunktion einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sogar stetig differenzierbar, d.h*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \{F \in C^1([a,b]) \colon F(a) = 0\} \to C([a,b]), \quad F \mapsto F'$$

Nach dem Hauptsatz und Korollar 2.31 ist $F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F(a) = 0$. Es folgt also, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ eine bijektive Abbildung ist mit Inverser Abbildung $f \mapsto F$.

(v) *Korollar 2.31 besagt, dass die Kenntnis* ***einer*** *Stammfunktion genügt, um das Integral einer stetigen Funktion in einer Veränderlichen zu berechnen. Um eine Stammfunktion zu finden, kann man das Wissen bzw. die Erfahrungen aus der Differentialrechnung verwendet werden. Dennoch gilt: Im Gegensatz zum Differenzieren gibt es für die Suche einer Stammfunktion keine "Kochrezepte".* **Wichtig**

Die beiden folgenden Resultate sind unmittelbare Konsequenz aus Proposition 2.29 (3) und (4) sowie Korollar 2.31.

Korollar 2.34 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = (fg)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Korollar 2.35 (Substitutionsregel)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $h([\alpha,\beta]) \subseteq [a,b]$. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta f(h(y))h'(y)\mathrm{d}y = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Man beachte, dass wir in obigen Korollaren — entgegen dem entsprechenden Resultat für Stammfunktionen — benötigt haben, dass f, g, h sogar *stetig* differenzierbar sind, um Korollar 2.31 anzuwenden.

Beispiel 2.36. *Man überlege sich das unbestimmte Integral folgender elementarer Funktionen. Im folgenden sei I immer ein Intervall (mit der Konvention wie in Definition 2.28).*

(a) *$I \subseteq \mathbb{R}$, $r \geq 0$: $\int x^r = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$*

(b) *$I \subseteq (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$: $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$* [6]

(c) *$I \subseteq \mathbb{R}$: $\int \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + C$, $\int \sin = \cos + C$, $\int \cos = -\sin + C$, $\int \sinh = \cosh + C$, $\int \cosh = \sinh + C$*

(d) *$I \subseteq \mathbb{R}$: $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$, wobei $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Umkehrfunktion von $\tan$ ist.* [7]

(e) *$I \subseteq \mathbb{R}$, $r > 1$: $\int \frac{x}{(1+x^2)^r} = -\frac{1}{2r(1+x^2)^{r-1}} + C$ und $\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$*

[6] Wir verwenden auch die Notation log für den natürlichen Logarithmus ln.

[7] Man beachte $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion folgt.

(f) $I \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: $\int \cos^k = \frac{\sin \cos^{k-1}}{k} + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2} + C$, *weil (partielle Integration):*

$$\begin{aligned}\int \cos^k &= \int \cos \cdot \cos^{k-1} \\ &= \sin \cdot \cos^{k-1} + (k-1) \int \sin^2 \cdot \cos^{k-2} \\ &= \sin \cdot \cos^{k-1} + (k-1) \int \cos^{k-1} - (k-1) \int \cos^k\end{aligned}$$

(g) $I \subseteq \mathbb{R}$, $r > 0$: $\int \frac{1}{(1+y^2)^r} = \frac{1}{(2r-2)} \frac{y}{(1+y^2)^{r-1}} + \frac{2r-3}{2r-2} \int \frac{1}{(1+y^2)^{r-1}}$, *weil (Subsitutionsregel):*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+y^2)^r} &= \left| \begin{array}{c} y = \tan(x) = h(x) \\ h'(x) = \cos^{-2} x = 1 + \tan^2 x \end{array} \right| \\ &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 x)^r} \cos^{-2}(x) \\ &= \int \cos^{2r-2}(x) \overset{(f)}{=} \frac{\sin \cos^{2r-3}}{2r-2} + \frac{2r-3}{2r-2} \int \cos^{2r-4}\end{aligned}$$

(h) $I = (0, \infty)$: $\int \ln = x \ln(x) - x + C$

(i) $I \subseteq (-1, 1)$: $\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(y) + C$ *(Substitutionsregel $y = \sin x$)* [8]
$\int \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}(\ln|1+y|) - \ln|1-y|) + C$

(j) $I \subseteq \mathbb{R}$: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$, *(Substitutionsregel $y = \sinh x$)* [7] [9]
$I \subseteq (1, \infty)$: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ *(Substitutionsregel $y = \cosh x$)* [7] [8]

Proposition 2.37 (Partialbruchzerlegung)**.** *Bei rationalen Funktionen, das heißt bei Funktionen, die aus dem Quotienten zweier Polynome bestehen, führt manchmal die sogenannte Partialbruchzerlegung des Quotienten zu Summanden, die für sich genommen integriert werden können. Das Verfahren selbst wird hier exemplarisch an einen Beispiel vorgestellt.*
Ausgehend von dem Integral

$$\int \frac{4x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + -2} dx$$

bestimmt man in einem ersten Schritt die Nullstellen des Nennerpolynoms. Es ergeben sich die drei Werte 2 und $\pm i$. Deshalb lässt sich der Nenner zu

$$\frac{4x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + -2} = \frac{4x^2 - x}{(x-2)(x^2+1)}$$

faktorisieren. Nun existieren zwei Polynome P und Q, so dass

$$\frac{4x^2 - x}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{P(x)}{x-2} + \frac{Q(x)}{x^2+1}$$

[8] wobei $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ die Umkehrfunktionen von $\sin, \sinh$ und $\cosh$ sind.
[9] Man beachte $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

gilt. Man weiß aus der allgemeinen Theorie über solche Zerlegungen, siehe Satz 7.5.8 und Bemerkung 7.5.9 in [3], dass P eine konstante und Q eine lineare Funktion sind, also dem Ansatz $P(x) = A$ und $Q(x) = Bx + C$ genügen müssen. Damit ergibt sich

$$\frac{4x^2 - x}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}$$
$$\Rightarrow A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x-2) = 4x^2 - x$$
$$\Leftrightarrow Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C = 4x^2 - x$$
$$\Leftrightarrow (A+B)x^2 + (-2B+C)x + (A-2C) = 4x^2 - x$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Gleichungssystem $A + B = 4 \wedge -2B + C = -1 \wedge A - 2C = 0$ Dieses hat die Lösung $A = \frac{14}{5}, B = \frac{6}{5}$ und $C = \frac{7}{5}$. Diese Teilergebnisse erlauben es jetzt, das ursprüngliche Integral zu berechnen.

$$\int \frac{4x^2 - x}{x^3 - 2x^2 + -2} dx = \int \left(\frac{\frac{14}{5}}{x-2} + \frac{\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{14}{5} \ln\left(|x-1|\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \ln\left(x^2+1\right) + \frac{7}{5} \arctan(x) + C$$

2.3 Uneigentliche Integrale für Funktionen einer Veränderlichen

Bisher waren zu integrierende Funktionen immer auf abgeschlossenen Quadern, im Eindimensionalen also auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$ definiert. Jetzt soll untersucht werden, was geschieht, wenn eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ oder $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ (Die nicht zum Intervall gehörende Randstelle kann auch $+\infty$ bzw. $-\infty$ sein.) vorliegt und man die Frage nach deren Integrierbarkeit stellt. In manchen Fällen besteht die Lösung dieser Frage darin, die gegebene Funktion f zu einer auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definierten und dort integrierbaren Funktion $\widetilde{f}$ fortzusetzen — sofern dies möglich. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x}{x},$$

die sich stetig auf $[0, 1]$ fortsetzen lässt. Anders verhält es sich beispielsweise für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ definiert auf $(0, 1]$. Allgemein verfährt man folgendermaßen.

Definition 2.38. *Sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls $f|_{[a,\tilde{b}]}$ für jedes $\tilde{b} \in (a, b)$ integrierbar ist und*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\tilde{b}\to b, \tilde{b}<b} \int_a^{\tilde{b}} f(x)\mathrm{d}x \text{ existiert,}$$

dann heißt f **uneigentlich integrierbar** *und der Grenzwert das* **uneigentliches Integral** *. Analog definiert man uneigentliche Integrierbarkeit für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ und für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ — letzteres, indem man die uneigentliche Integrierbarkeit für $f|_{(a,c]}$ und $f|_{[c,b)}$ für ein $c \in (a, b)$ fordert und $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ setzt. Man beachte, dass hier jeweils b bzw. a auch als $+\infty$ bzw. $-\infty$ zugelassen sind.*
Die Funktion f heißt **absolut uneigentlich integrierbar**, *falls $|f| : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist bzw. analog für die entsprechenden Varianten von Intervallen $(a, b]$ oder (a, b).*

Beispiel 2.39. *(a) Es gilt, dass*

$$\int_1^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{\widetilde{b}\to\infty} \int_1^{\widetilde{b}} e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{\widetilde{b}\to\infty} \left(e^{-1} - e^{-\widetilde{b}}\right) = \frac{1}{e}.$$

Also ist $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = e^{-t}$ uneigentlich integrierbar. Weil der Wertebereich dieser Funktion $(0, \infty)$ ist, ist f auch absolut uneigentlich integrierbar.

(b) Sei die Funktion $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}.$$

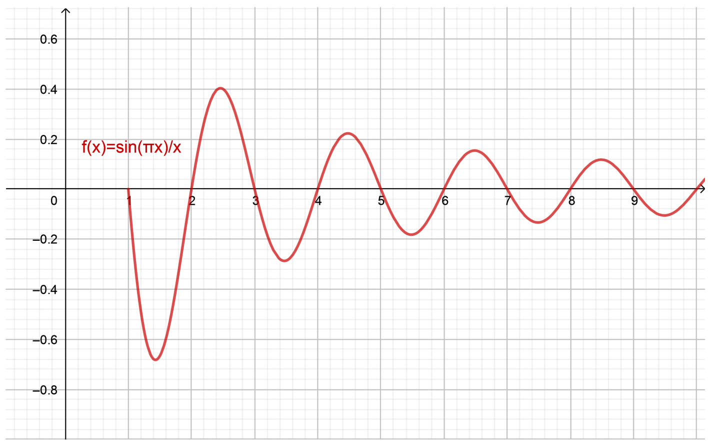

Abbildung 2.5: Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{sin(\pi \cdot x)}{x}$

.

Da die Funktion nur natürliche Zahlen als Nullstellen hat und alternierend unter- und oberhalb der x-Achse liegt, bietet es sich an, das Integral bis $\widetilde{b}$ in einen "ganzzahligen Teil" und den Rest aufzuspalten.

$$\int_1^{\widetilde{b}} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\lfloor \widetilde{b} \rfloor - 1} \int_n^{n+1} f(x) dx + \int_{\lfloor \widetilde{b} \rfloor}^{\widetilde{b}} f(x) dx \tag{2.3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\lfloor \widetilde{b} \rfloor - 1} (-1)^n \underbrace{\int_n^{n+1} \left| \frac{\sin(\pi x)}{x} \right| dx}_{=:c_n} + \int_{\lfloor \widetilde{b} \rfloor}^{\widetilde{b}} f(x) dx \tag{2.4}$$

Wie man sieht, bilden die c_n eine monotone Nullfolge, so dass die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium für $\widetilde{b} \to \infty$ gegen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$ konvergiert. Für den zweiten Summand von (2.4) können wir folgende Abschätzung durchführen:

$$\left| \int_{\lfloor \widetilde{b} \rfloor}^{\widetilde{b}} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\lfloor \widetilde{b} \rfloor} \int_{\lfloor \widetilde{b} \rfloor}^{\lceil \widetilde{b} \rceil} \sin(\pi x)\, dx \leq \frac{1}{\lfloor \widetilde{b} \rfloor} \frac{2}{\pi} \to 0 \qquad \textit{für} \quad \widetilde{b} \to \infty$$

Damit ist also f uneigentlich integrierbar und man erhält

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n.$$

Wenn man aber stattdessen den Betrag der Funktion f betrachtet, so ist die der Reihe zugrundeliegende Folge von (2.4) nicht mehr alternierend, d.h. das Leibniz-Kriterium kann nicht angewendet werden. Vielmehr ergibt sich für die einzelnen c_n wegen $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{n+1}$ für $x \in [n, n+1]$, dass

$$c_n = \int\limits_n^{n+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{x} dx \geqslant \frac{1}{n+1} \int\limits_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\, dx = \int\limits_0^1 |\sin(\pi x)|\, dx.$$

Weil die zu dem rechts stehenden Integral gehörenden Flächen unabhängig von n gleich groß sind (und ungleich 0), divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, d.h. f ist nicht absolut uneigentlich integrierbar.

(c) Wegen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{\tilde{b}\to\infty} \ln(x)|_1^{\tilde{b}} = \lim_{\tilde{b}\to\infty} \ln(\tilde{b}) = \infty$$

ist die Funktion $x \to \frac{1}{x}$ über dem Intervall $[1, \infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.

Lemma 2.40. *Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ so dass $f|_{[a,x]}, g|_{[a,x]}, |f|_{[a,x]}|$ und $|g|_{[a,x]}|$ integrierbar sind für alle $x \in (a, b)$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) Falls g absolut uneigentlich integrierbar ist, so ist g uneigentlich integrierbar

(ii) Falls g absolut uneigentlich integrierbar und $c \in (a, b)$ existiert mit $|f(x)| \leq |g(x)|$ für alle $x \in [c, b)$, dann ist auch f absolut integrierbar.

Die Behauptung gilt auch für Funktionen auf Intervallen der Typen $(a, b]$ und (a, b).

Beweis. Übung, Blatt 8, Aufgabe 3. □

2.4 Vertauschung von Integralen und Grenzwerten

Satz 2.41. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar und $f : B \to \mathbb{R}$. Außerdem definiere $f_n : B \to \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dann gilt, dass f integrierbar ist und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_B f_n(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Beweis. Sehr ähnlich zu Beweis von Satz 2.17. Man überlege sich das Argument als Übung. □

In den Übungen haben wir folgendes Resultat für das uneigentliche Integral bewiesen.

Satz 2.41.1 (Aufgabe 3, Blatt 10)**.** *Seien $a < b \leq \infty$ und seien $f, f_n : [a, b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen so dass*

- *$f_n|_{[a,x]}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f|_{[a,x]}$ für alle $x \in (a, b)$,*
- *$f_n|_{[a,x]}$ ist integrierbar für alle $x \in (a, b)$ und alle $n \in \mathbb{N}$.*

- *Es existiert $c \in (a,b)$ und eine uneigentlich integrierbare Funktion $g : [c,b) \to \mathbb{R}$ mit*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \qquad \forall x \in [c,b), n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind f_n und f (absolut) uneigentlich integrierbar und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Beweis. Dass die f_n's absolut integrierbar sind, folgt bereits aus Lemma 2.43. Außerdem gilt, dass für jedes $x \in (a,b)$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert und somit auch die Ungleichung $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (c,b)$ gilt. Nun folgt wiederum aus dem Lemma, dass f uneigentlich integrierbar ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ und betrachte

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^c f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_c^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x,$$

wobei wir zuerst die Linearität des Integrals und die Additivität von Grenzwerten sowie zweimal die Dreiecksungleichung (auch für das Integral) verwendet haben. Der zweite Term lässt sich wegen

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$$

durch $2\int_c^b g(x)\mathrm{d}x$ abschätzen. Da nach Definition

$$\int_c^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tilde{b}\to b^+} \int_c^{\tilde{b}} g(x)\mathrm{d}x$$

folgt, dass $\int_c^b g(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$ für hinreichend großes c (Dies folgt wie im Beweis von Lemma 2.40: Ist nämlich $\lim_{m\to\infty} \int_c^{b_m} g(x)\mathrm{d}x$ konvergent für eine Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $b_m < b$ und $b_m \to b$, so ist $(\int_c^{b_m} g(x)\mathrm{d}x)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.). Wähle ein solches c. Nach der gleichmäßigen Konvergenz existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass der erste Term für alle $n \geq N$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Insgesamt folgt die Behauptung.

□

Als Anwendung von Satz 2.41 kann man den folgenden Satz über die Differenzierbarkeit von Funktionenfolgen zeigen, der bereits in der Analysis I besprochen wurde (man denke an das Differenzieren von Potenzreihen).

Satz 2.42. *Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen, so dass*

- *ein $t_0 \in [a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = y$ existiert und*
- *$(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert.*

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die stetig differenzierbar ist und $f' = g$. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty} f)(x)$.

Beweis. Dies ist eine Konsequenz des Hauptsatzes und von Satz 2.41. Zuerst erkennen wir, dass g als gleichmäßiger Grenzwert von stetigen Funktionen stetig ist (siehe Analysis I bzw. Kapitel 1). Aufgrund des Hauptsatzes schließen wir, dass $t \mapsto \int_{t_0}^t g(x)\mathrm{d}x$ [10] eine stetig differenzierbare Funktion f auf $[a,b]$ definiert mit $f' = g$. Weiterhin gilt wegen der beiden Voraussetzungen, Satz 2.41 und wiederum dem Hauptsatz, dass für jedes $t \in [a,b]$,

$$f_n(t) = f_n(t_0) + \int_{t_0}^t f_n'(x)\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{t_0}^t g(x)\mathrm{d}x = f(t).$$

[10] Hierbei gilt die Konvention $\int_\alpha^\beta = -\int_\alpha^\beta$ für $\alpha < \beta$ und $\int_\alpha^\alpha = 0$

Somit ist gezeigt, dass f_n punktweise gegen f konvergiert. Um die gleichmäßige Konvergenz zu beweisen, verwenden wir die Positivität des Integrals und wieder die Voraussetzung.

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \left| f(t_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} g(x) - f_n'(x)\mathrm{d}x - f_n(t_0) \right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Korollar 2.43. *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in (0, \infty]$. Dann hat die Potenzreihe*

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n$$

denselben Konvergenzradius und f ist auf $B_r(0)$ differenzierbar mit $f'(z) = g(z)$ für alle $z \in B_r(0)$.

Beweis. Der Beweis beruht darauf, dass eine Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzradius (gleichmäßig) konvergiert und der Konvergenzradius von g sich leicht als r bestimmen lässt. Der Rest ist eine Anwendung von Satz 2.42. □

Beispiel 2.44. *(a) Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$ ist nicht gleichmäßig konvergent, also ist Satz 2.41 nicht anwendbar. Dennoch gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. Man beachte aber, dass sich dies auch aus Satz 2.41.1 folgern lässt: Dieser besagt zwar "nur", dass die Grenzfunktion uneigentlich integrierbar ist, aber für das betrachtete Beispiel gilt, dass g sogar integrierbar gewählt werden kann, woraus folgt, dass auch f integrierbar sein muss.*

(b) Die Voraussetzung in Satz 2.42, dass (f_n) für einen festen Punkt t_0 konvergiert muss, ist notwendig (Man überlege sich warum?).

(c) Mit Hilfe von Korollar 2.43 lassen sich Potenzreihendarstellungen beweisen, z.B. ist die Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(1 - x)$ für $x \in (-1, 1)$ gleich $\frac{1}{x-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit Konvergenzradius 1. Auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ hat den Konvergenzradius 1 und somit gilt nach dem Korollar, dass f und $x \mapsto -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ bis auf eine additive Konstante übereinstimmen. Da die beiden Funktionen an 0 übereinstimmen, gilt

$$\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Da für $x = -1$ die Reihe (bedingt) konvergiert, (Warum?) ergibt sich, dass $\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(d) Ähnlich wie in c) kann man eine Reihendarstellung von arctan *beweisen, siehe Blatt 9, Aufgabe 3.*

Der folgende Satz und seine Folgerungen stellen sich als sehr nützlich heraus, um Integrale von Funktionen in mehreren Veränderlichen, insbesondere Volumsintegrale zu berechnen.

Satz 2.45 (Satz von Fubini für das Riemann Integral auf Quadern)**.** *Seien*

$$B = P \times Q \subseteq \mathbb{R}^{p_1+p_2},\ P \subseteq \mathbb{R}^{p_1},\ Q \subseteq \mathbb{R}^{p_2}$$

Quader. Sei $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar und seien zusätzlich die Funktionen

- $f(\mathbf{x},\cdot) : Q \to \mathbb{R}$ *integrierbar für alle* $\mathbf{x} \in P$,
- $f(\cdot,\mathbf{y}) : P \to \mathbb{R}$ *integrierbar für alle* $\mathbf{y} \in Q$.

Dann sind die Funktionen

$$P \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}, \qquad Q \to \mathbb{R}, \mathbf{y} \mapsto \int_P f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}$$

integrierbar [11] *und es gilt*

$$\int_{P\times Q} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_P \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_Q \int_P f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten: Im ersten Schritt zeigen wir die Behauptung für Treppenfunktionen, im zweiten zeigen wir sie für beliebige Funktionen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

(1) Sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, die den Voraussetzungen genügt. Also existiert eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(P \times Q)$, so dass $f|_{(\widetilde{P}\times\widetilde{Q})^\circ}$ konstant gleich $c_{\widetilde{P}\times\widetilde{Q}}$ für alle $\widetilde{P} \times \widetilde{Q} \in Z$ ist. Man sieht leicht, dass

$$\left(\widetilde{P} \times \widetilde{Q}\right)^\circ = \widetilde{P}^\circ \times \widetilde{Q}^\circ$$

nt in Vorlesung
: ausgeführt

ist. Wir definieren nun für $\mathbf{x} \in P$ und $\mathbf{y} \in Q$ die Mengen

$$Z_\mathbf{y} = \{\widetilde{P} \colon \exists \widetilde{Q} \text{ mit } \mathbf{y} \in \widetilde{Q}^\circ \wedge \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \in Z\},\ Z_\mathbf{x} = \{\widetilde{Q} \colon \exists \widetilde{P} \text{ mit } \mathbf{x} \in \widetilde{P}^\circ \wedge \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \in Z\}.$$

Bis auf endlich viele $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind $Z_\mathbf{y}$ und $Z_\mathbf{x}$ Zerlegungen von P bzw. Q. Nach Voraussetzung ist die Funktion $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ über Q integrierbar für alle $\mathbf{x} \in P$ und für alle bis auf endlich viele $\mathbf{x} \in P$ ist das Integral durch

$$\int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \sum_{\tilde{Q}\in Z_\mathbf{x}} c_{\tilde{P}\times\tilde{Q}} \mathrm{vol}(\tilde{Q}).$$

gegeben. Sei nun Q_0 die Menge derjenigen $\mathbf{y} \in Q$, für die $Z_\mathbf{y}$ eine Zerlegung von P ist. Die Menge $\{Z_\mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in Q_0\}$ ist endlich, da es nur endlich viele Mengen in Z gibt; diese bezeichnen wir mit $Z_{\mathbf{y}_1}, .., Z_{y_k} \in \mathcal{Z}(P)$. Wir können nun Lemma 2.3 iterativ anwenden, und erhalten (mit der Notation des Lemmas), dass

$$Z_g = Z_{\mathbf{y}_1} \wedge Z_{\mathbf{y}_2} \cdots \wedge Z_{\mathbf{y}_k} := Z_{\mathbf{y}_1} \wedge (Z_{\mathbf{y}_2} \wedge (\cdots \wedge Z_{\mathbf{y}_k}))$$

eine Zerlegung von P ist. Für $P' \in Z_g$ ist $\sum_{\tilde{Q}\in Z_\mathbf{x}} c_{\tilde{P}\times\tilde{Q}}\mathrm{vol}(\tilde{Q})$ konstant für $\mathbf{x} \in P'^\circ$. Deshalb ist $\mathbf{x} \mapsto \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}$ integrierbar und für das Integral gilt

$$\int_P \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{P'\in Z_g} \mathrm{vol}(P') \sum_{\tilde{Q}\in Z_\mathbf{x},\text{ für ein } \mathbf{x}\in P'^\circ} c_{\tilde{P}\times\tilde{Q}}\mathrm{vol}(\tilde{Q})$$

Man beachte, dass in der zweiten Summe $\tilde{P}$ nach Definition von $Z_\mathbf{x}$ und der Konstruktion von Z_g die Menge P' enthält. Deshalb gilt $c_{\tilde{P}\times\tilde{Q}} = c_{P'\times\tilde{Q}}$, wobei letzteres den

[11] Wir sprechen auch davon, dass die *iterierten Integrale existieren.*.

(konstanten) Funktionswert von f auf dem Inneren des Quaders $P' \times \tilde{Q}$ bezeichnet. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_P \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x} &= \sum_{P' \in Z_g} \sum_{\tilde{Q} \in Z_{\mathbf{x}},\ \text{für ein } \mathbf{x} \in P'^{\circ}} c_{P' \times \tilde{Q}} \mathrm{vol}(\tilde{Q}) \mathrm{vol}(P') \\ &= \sum_{P' \times \tilde{Q} \in Z_G} c_{P' \times \tilde{Q}} \mathrm{vol}(P' \times \tilde{Q})\end{aligned}$$

wobei $Z_G = \{P' \times \tilde{Q} \colon P' \in Z_g, \tilde{Q} \in Z_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in P'^{\circ}\}$ eine Zerlegung von $P \times Q$ ist (Dies folgt im Wesentlichen daraus, dass $Z_g \in \mathcal{Z}(P)$ und $Z_x \in \mathcal{Z}(Q)$.) Sei $\widetilde{P} \in Z_P$ und $x \in \widetilde{P}^{\circ}$. Dann gilt $f(x,y) = c_{\widetilde{P} \times \widetilde{Q}}$, falls $y \in \widetilde{Q}^{\circ}$ ist. Nach Definition des Integrals für Treppenfunktionen folgt damit die Behauptung des Satzes von Fubini.

(2) Nun zeigt man mit Hilfe der Aussagen für Treppenfunktionen den Fall allgemeiner Funktionen: Sei f eine Funktion wie in den Voraussetzungen des Satzes. Für Treppenfunktionen $g, h : B \to \mathbb{R}$ mit $g \leq f \leq h$ gilt wegen des ersten Punktes, dass die Funktionen

$$\tilde{h} : P \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_Q h(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \qquad \tilde{g} : P \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \int_Q g(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{2.5}$$

integrierbar auf P sind, wobei das Integral mit $\int_B h(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$ bzw. $\int_B g(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$ übereinstimmt. Offensichtlich sind $\tilde{h}$ und $\tilde{g}$ Treppenfunktionen auf P und wegen der Monotonie des Integrals gilt außerdem für alle $\mathbf{x} \in P$

$$\tilde{h}(\mathbf{x}) = \int_Q h(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \geq \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}) = \int_Q g(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \leq \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

In der letzten Zeile haben wir ausgenutzt, dass das Integral von $f(\mathbf{x},\cdot)$ für jedes $\mathbf{x} \in P$ existiert. Daraus folgt unmittelbar mit der Definition des oberen und unteren Integrals, dass

$$\begin{aligned}\sup\left\{\int_P \tilde{g}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} : \ g \leq f \ \wedge g \in \mathrm{T}(P)\right\} &\leq \int_{*P} \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ \inf\left\{\int_P \tilde{h}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} : \ h \leq f \ \wedge h \in \mathrm{T}(P)\right\} &\geq \int_P^* \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},\end{aligned}$$

wobei man beachte, dass die Funktionen $\tilde{h}$ und $\tilde{g}$ im Supremum bzw. Infinimum über die h und g mittels (2.5) definiert sind. Da aber, wie bereits erwähnt, $\int_P \tilde{g}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B g(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$ und $\int_P \tilde{h}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_B h(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$, und f nach Voraussetzung integrierbar ist, folgt, dass die beiden linken Terme in den obigen Ungleichungen gleich und gleich $\int_B f(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z}$ sind. Damit ist

$$\int_{*P} \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x} \geq \int_B f(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} \geq \int_P^* \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x},$$

was aber aufgrund der Ungleichung $\int_P^* f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \leq \int_{*P} \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}$ sogar Gleichheit bedingt. Es gilt also damit, dass $\mathbf{x} \mapsto \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}$ integrierbar ist, und, dass

$$\int_{P \times Q} f(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \int_P \int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Aus Symmetrie folgt auch die andere Gleichheit der Behauptung.

□

Bemerkung 2.46.

(a) *Die Bedingungen, dass $f(x,\cdot)$und $f(\cdot,y)$ integrierbar sind, sind notwendig. Wählt man nämlich beispielsweise $B=[0,1]\times[0,1]$ und*

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{falls } x=0\wedge y\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

so ist f als Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^2$ integrierbar, $f(0,\cdot)$ als Dirichlet-Funktion aber nicht.

(b) *Der Satz von Fubini gilt nicht nur für Quader als Teilmengen reeller Vektorräume, sondern allgemein für $B=P\times Q$ mit beliebigen zerlegbaren Mengen P und Q, wie man sich leicht überlegt.*

Die folgenden beiden Folgerungen sind **wichtig** in der Anwendung des Satzes von Fubini.

Korollar 2.47. *Sei $f:P\times Q\to\mathbb{R}$ stetig und P,Q seien zerlegbar. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes von Fubini erfüllt und es gilt insbesondere, dass*

$$\int_{P\times Q} f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\int_Q\int_P f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_P\int_Q f(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

ig

Korollar 2.48. *Sei $Q\subseteq\mathbb{R}^p$ ein Quader und seien $\varphi_1,\varphi_2:Q\to\mathbb{R}$ stetig mit $\varphi_1\le\varphi_2$. Dann gelten für die Menge*

$$M=\left\{(\mathbf{x},y)\in\mathbb{R}^{p+1}:\mathbf{x}\in\mathbb{R}^p\wedge\varphi_1(\mathbf{x})\le y\le\varphi_2(\mathbf{x})\right\}.$$

folgende Aussagen:

(i) *M ist messbar, und*

(ii) *M ist kompakt.*

Sei weiterhin $f:M\to\mathbb{R}$ integrierbar und $f(x,\cdot):[\varphi_1(x),\varphi_2(\mathbf{x})]\to\mathbb{R}$ für alle $\mathbf{x}\in Q$ integrierbar. Dann gilt außerdem, dass

(iii) $$\int_M f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}=\int_Q\int\limits_{\varphi_1(\mathbf{x})}^{\varphi_2(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Beweis. (i) Sind die φ_i Treppenfunktionen, so sind ihre Einschränkungen auf bestimmte Quader konstant. Damit lässt sich M als Vereinigung der kartesischen Produkte eines Quaders und eines Intervalls schreiben, und ist somit messbar. Sind die φ_i keine Treppenfunktionen, so sind sie als auf einem Kompaktum stetige Funktionen sogar gleichmäßig stetig, lassen sich also bezüglich der Metrik d_∞ durch Treppenfunktionen approximieren. Damit ergibt das passende Grenzwertargument die Behauptung.

(ii) Q ist kompakt. Da die φ_i stetig sind, ist auch die 2. Komponente (folgen-)kompakt und damit M als kartesisches Produkt zweier kompakter Mengen kompakt.

(iii) Die Aussage folgt durch Fortsetzung von f auf die Menge $Q\times[\min\varphi_1,\max\varphi_2]$ mit dem Funktionswert 0 und dem Satz von Fubini. Genauer: Wir bezeichnen die Fortsetzung der

Funktion mit f_M. Wegen (i) ist f_M eine integrierbare Funktion (vgl. Definition 2.22 und für das Integral gilt

$$\int_M f(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{Q\times[\min\varphi_1,\max\varphi_2]} f_M(\mathbf{x},s)\mathrm{d}(\mathbf{x},s) = \int_Q \int_{[\min\varphi_1,\max\varphi_2]} f_M(\mathbf{x},s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\mathbf{x},$$

wobei die letzte Gleichheit aus dem Satz von Fubini, Satz 2.45, folgt. Das innere Integral auf der rechten Seite ist aufgrund der Definition von f_M aber gleich

$$\int\limits_{\varphi_1(\mathbf{x})}^{\varphi_2(\mathbf{x})} f(\mathbf{x},s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

woraus direkt die Behauptung folgt. □

Wichtig: Korollar 2.48 und der Satz von Fubini eignen sich sehr gut, um Integrale durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge zu berechnen, wie beispielsweise bei Integralen der Form

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

siehe das nachfolgende Beispiel 2.49(c). Hierbei gilt zu beachten, dass die Integrationsgrenzen typischerweise angepasst werden müssen, wenn die Integrationsreihenfolge vertauscht wird. Am einfachsten überlegt man sich dies, indem man (mittels des Satzes von Fubini) ein solches Integral als Volumensintegral über der nach Korollar 2.48 messbaren Menge

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon x\in[a,b], \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)\}$$

auffasst und die "Reihenfolge von x und y vertauscht": Damit ist gemeint, dass man die definierende Bedingung

$$x\in[a,b]\wedge\phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)$$

so äquivalent umformt, dass x explizit durch y ausgedrückt wird, also

$$y\in[c,d]\wedge\psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y),$$

für Konstanten $c<d$ und stetige Funktionen ψ_1,ψ_2.

Beispiel 2.49. *(Bsp 2.48 und 2.53 aus Vorlesung)*

(a) Das folgende Beispiel zeigt, wie man mit Hilfe des Satzes von Fubini ein zweidimensionales Integral auf die Hintereinanderausführung zweier eindimensionaler zurückführt.

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} x^2yd(x,y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x^2ydxdy = \int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}x^3y\Big|_0^1\right)dy = \int\limits_0^1\frac{y}{3}dy = \frac{y^2}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

(b) Bezüglich der d_2-Metrik lässt sich die abgeschlossene Kugel um den Ursprung im $\mathbb{R}^2$ in der Form

$$\overline{B_1(0)} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1]\wedge-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$$

darstellen. Dann gilt aufgrund der obigen Ausführungen für den Flächeninhalt/das Volumen dieser Einheitskugel

$$\int_{B_1(0)} 1\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \pi,$$

was offenbar mit der aus der Schule bekannten Formel übereinstimmt.

(c) *Wir wollen das iterierte Integral*

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

bestimmen. Die Idee dazu ist, die Integrationsreihenfolge mit Hilfe von Korollar 2.48 (Folgerung des Satzes von Fubini) zu vertauschen. Wir werden dies in Kürze begründen. Falls das Vertauschen zulässig ist, berechnen wir

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^t \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\cdot t\mathrm{d}t = \cos(0) - \cos(1) = 1 - \cos(1).$$

Man überlegt sich zuerst in welchem Sinne das innere Integral existiert: Dieser Integrand ist zwar für $t = 0$ nicht definiert, allerdings können wir aber $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ an $t = 0$ (stetig) durch $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos'(0) = 1$ fortsetzen. Der Grund für die Vertauschbarkeit der Integrale ist nun, dass die Funktion

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & x \in [0,1], t \in (0,x] \\ 1 & x \in [0,1], t = 0. \end{cases}$$

stetig auf $M = \{(x,t) : x \in [0,1], 0 \le t \le x\}$ ist[12]*. Dann gilt nämlich nach Korollar 2.50, dass*

$$\int_0^1 \int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_M f(x,t)\mathrm{d}(x,t) = \int_0^1 \int_0^t f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Da das Integral $\int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t$ nicht von endlichen vielen Funktionswerten des Integranden abhängt, ist $\int_x^1 f(x,t)\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.

(d) *Für folgende Funktion f lässt sich zeigen, dass im Allgemeinen die iterierten Integrale nicht übereinstimmen, d.h.*

$$\int_P \int_Q f(x,y)dydx \neq \int_Q \int_P f(x,y)dxdy.$$

Dies zeigt insbesondere, nach Korollar 2.47, dass f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig sein kann. Sei $f : [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[12] Dies impliziert nämlich, dass sowohl $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,\cdot)$ und $f(\cdot,t)$ integrierbar sind für alle $(x,t) \in M$. Man beachte, dass f als stetige Funktion auf einer messbaren, kompakten Menge integrierbar ist, Satz 2.25.

Wir zeigen nun, dass $\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Für festes x *bzw.* y *sind die Funktionen* $y \mapsto f(x,y)$ *bzw.* $x \mapsto f(x,y)$ *beschränkt und jeweils auf* $(0,1]$ *bzw.* $(0,2]$ *stetig (sogar beliebig oft differenzierbar). Somit sind diese Funktionen auch auf* $[0,1]$ *bzw.* $[0,2]$ *integrierbar. Wir berechnen nun die beiden inneren Integrale. Dazu geben wir erst die beiden unbestimmten Integrale an. Sei* $x \in (0,2]$ *fest und* $y \in (0,2)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}y &= \left|\begin{array}{c} u = h(y) = x^2+y^2 \\ du = h'(y)dy = 2ydy\end{array}\right| \\ &= \int \frac{x(2x^2-u)}{2u^3}\mathrm{d}u = -\frac{x^3}{2u^2}+\frac{x}{2u} = -\frac{x^3}{2(x^2+y^2)^2}+\frac{x}{2(x^2+y^2)} \\ &= \frac{xy^2}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\int \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c} u = h(x) = x^2+y^2 \\ du = h'(x)dx = 2xdx\end{array}\right| \\ &= \int \frac{y(u-2y^2)}{2u^3}\mathrm{d}u = -\frac{y}{2u}+\frac{y^3}{2u^2} = -\frac{y}{2(x^2+y^2)}+\frac{y^3}{2(x^2+y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2y}{2\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Sei $b \in [0,1)$ *und* $a \in [0,2)$ *und definiere (Die Parameter* a, b *führen wir hier nur ein, weil dies für Aufgabe 5 hilfreich ist — für Aufg 4 genügt* $a = b = 0$.*)*

$$f_x^b = \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \frac{xy^2}{2(x^2+y^2)^2}\bigg|_{y=b}^{y=1} = \frac{x}{2(x^2+1)^2} - \frac{xb^2}{2(x^2+b^2)^2},$$

woraus $f_x := f_x^0 = \frac{x}{2(x^2+1)^2}$ *folgt. Offensichtlich ist außerdem* $f_0^b = \int_b^1 f(0,y)\mathrm{d}y = 0$. *Genauso ergibt sich*

$$f_y^a = \int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x = -\frac{x^2y}{2(x^2+y^2)^2}\bigg|_{x=a}^{x=2} = -\frac{2y}{(4+y^2)^2}+\frac{ya^2}{2(a^2+y^2)^2},$$

woraus $f_y := f_y^b = -\frac{2y}{(4+y^2)^2}$ *folgt. Außerdem gilt* $f_y^a = \int_a^1 f(x,0)\mathrm{d}x = 0$. *Die Funktionen* $x \mapsto f_x^b$, $y \mapsto f_y^a$ *sind integrierbar für alle* a, b *(weil stetig). Wir berechnen nun (mit Hilfe der bereits bekannten Stammfunktionen aus Beispiel 2.38 bzw. durch "Erraten einer Stammfunktion"),*

$$\begin{aligned}\int_a^2\int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_a^2 f_x^b\mathrm{d}x = -\frac{1}{4(1+x^2)}+\frac{b^2}{4(x^2+b^2)}\bigg|_a^2 \\ &= -\tfrac{1}{20}+\tfrac{b^2}{4(4+b^2)}+\tfrac{1}{4(1+a^2)}-\tfrac{b^2}{4(a^2+b^2)} \\ \int_b^1\int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_b^1 f_y^a\mathrm{d}y = \frac{1}{(4+y^2)}-\frac{a^2}{4(a^2+y^2)}\bigg|_b^1 \\ &= \tfrac{1}{5}-\tfrac{a^2}{4(a^2+1)}-\tfrac{1}{(4+b^2)}+\tfrac{a^2}{4(a^2+b^2)}.\end{aligned}$$

Für $a = b = 0$ ergibt dies

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{4} = \frac{4}{20} \neq -\frac{1}{20} = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4} = \int_0^1 \int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Man rechnet aber leicht nach, dass für $a, b > 0$ gilt. $\int_a^2 \int_b^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_b^1 \int_a^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Der Satz von Fubini (bzw. das Korollar für stetige Funktionen) besagt, dass die iterierten Integrale mit dem Integral $\int_{[0,2]\times[0,1]} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}$ übereinstimmen, wenn f auf $[0,2] \times [0,1]$ stetig wäre. Deshalb folgt, dass f nicht stetig sein kann. Alternativ kann man mit den Folgen $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{2}{n}$ einsehen, dass f an $(0,0)$ nicht stetig ist.

Die folgenden beiden Resultate geben Auskunft darüber, wann Parameterintegrale stetig bzw. differenzierbar sind.

Satz 2.50 (Stetigkeit von Parameterintegralen)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar, (U, d_U) ein kompakter metrischer Raum*[13] *und $f : B \times U \to \mathbb{R}$. Ferner sei $d : B \times U \to \mathbb{R}$ eine Metrik der Form*

$$d\left(\begin{pmatrix} b \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{b} \\ \widetilde{u} \end{pmatrix}\right) = d_i\left(\left\|b - \widetilde{b}\right\|_2, d_U(u, \widetilde{u})\right), \quad i = 1, 2, \infty$$

und f stetig bezüglich d [14]*. Dann ist auch die folgende Abbildung stetig*

$$U \to \mathbb{R}, u \mapsto \int_B f(x,u)dx.$$

Beweis. Analog wie im Beweis von Korollar 2.48 gesehen, ist das kartesische Produkt $B \times U$ zweier (folgen-)kompakter Mengen (folgen-)kompakt. Damit ist f auf dieser Menge gleichmäßig stetig. Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \in U$. Dann gilt

$$\int_B f(x, u_n)\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_B f(x,u)\, dx$$

bezüglich der beiden in der Aussage des Satzes angenommenen Metriken. Wählt man nun $g_n(x) := f(x, u_n)$ sowie $g(x) := f(x,u)$, so konvergiert die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen den Grenzwert g, weil dies für die Paare (x, u_n) gilt und f auf dem Kompaktum stetig ist. Somit sind die Voraussetzungen von Lemma 2.40 erfüllt und es ergibt sich die Behauptung □

Satz 2.51 (Vertauschung von Integration und Differentiation)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ zerlegbar und $[a,b]$ ein Intervall. Sei $f : B \times [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

- *f ist stetig*
- *Für jedes $x \in B$ ist die Abbildung $[a,b] \to \mathbb{R}, s \mapsto f(x,s)$ differenzierbar* [15]
- *Die Abbildung $B \times [a,b] \to \mathbb{R}, (\mathbf{x}, s) \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s)$ ist stetig.*

Dann ist die Abbildung

$$[a,b] \to \mathbb{R}, s \mapsto \int_c^d f(\mathbf{x}, s)\mathrm{d}\mathbf{x}$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_c^d f(\mathbf{x}, s)\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_c^d \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s)\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.6}$$

[13] Das bedeutet, dass die Menge U im metrischen Raum (U, d_U) kompakt ist.
[14] Die drei Metriken sind paarweise äquivalent.
[15] Hier ist die entsprechende einseitige Differenzierbarkeit an den Randstellen a, b gemeint.

Beweis. Sei $\mathbf{x} \in B$. Die Idee dieses Beweises ist, die Aussage mittels des Hauptsatzes zu beweisen, indem man, grob gesprochen, eine "integrierte Version" von 2.6 verwendet. Weil laut Voraussetzung $(\mathbf{x}, s) \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s)$ stetig ist, gilt mit dem Satz von Fubini, dem Hauptsatz, sowie der Linearität des Integrals, dass

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^\xi \int_B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s) \mathrm{d}\mathbf{x} \mathrm{d}s &= \int_B \int\limits_a^\xi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s) \mathrm{d}s \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_B \left(f(\mathbf{x}, \xi) - f(\mathbf{x}, a)\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \int_B f(\mathbf{x}, \xi) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_B f(\mathbf{x}, a) \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von $(\mathbf{x}, s) \mapsto \frac{d}{ds} f(\mathbf{x}, s)$ gilt weiterhin nach Satz 2.50, dass $s \mapsto \int_B \frac{d}{ds} f(\mathbf{x}, s) d\mathbf{x}$ stetig auf B ist. Damit ergibt sich aus dem Hauptsatz, dass die linke Seite der obigen Gleichung in ξ stetig differenzierbar ist. Damit ergibt sich für die Ableitung (nach ξ und man setze $s = \xi$), dass

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\mathbf{x}, s) \mathrm{d}\mathbf{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(\int_B f(\mathbf{x}, s) \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_B f(\mathbf{x}, a) \mathrm{d}\mathbf{x} \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \int_B f(\mathbf{x}, s) \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 2.52. *Unter Anwendung von Satz 2.55 kann man zeigen, dass*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Dies ist Aufgabe 1 Blatt 10. Hierzu verfährt man folgendermaßen:

(a) Auf jedem kompakten Intervall ist $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ stetig und somit integierbar. Da

$$1 + t^2 \leq \mathrm{e}^{t^2}$$

gilt $h(t) = \frac{1}{1+t^2} \geq e^{-t^2}$ und da $\int \frac{1}{1+t^2} = \arctan(t) + C$ folgt mit $\lim_{t \to \pm\infty} \arctan(t) = \pm\frac{\pi}{2}$, dass h absolut uneigentlich integrierbar ist. Mit Lemma 2.40 ergibt sich also, dass auch f uneigentlich integrierbar ist.

(b) Seien

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t, \qquad G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \right)^2,$$

für $x \in [0, \infty)$. Wir zeigen nun, dass F, G wohldefiniert sind und dass $F(x) = G(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$ ist. Die Integranden f in F und g in G sind als Funktionen in t jeweils differenzierbar (und damit insbesondere stetig) und somit existieren die Integrale $F(x)$ und $G(x)$ für jedes feste x. Darüberhinaus sind die Funktionen

$$(x, t) \mapsto f(t), \quad (x, t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}$$

stetig. Also können wir nach Satz 2.54 Integration (nach t) und Differential vertauschbar und erhalten

$$F'(x) = \int_0^1 2x\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

und durch die Kettenregel sowie dem Hauptsatz

$$G'(x) = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

.

Die Substitution $tx = y$ liefert dann $F'(x) = G'(x)$. Um zu zeigen, dass $F = G$ ist, genügt es zu sehen, dass $F(0) = G(0)$ (Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch additive Konstante). Dass $F(0) = 0$ folgt daraus, dass $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(t)|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

(c) *Da*

$$\int_{-x}^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{G(x)} = 2\sqrt{F(x)}$$

ist, genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$ (Dann gilt ja $\lim_{x\to\infty} 2\sqrt{F(x)} = \sqrt{\pi}$ aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion). Dazu zeigen wir, dass

$$\lim_{x_n\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0,$$

für beliebige Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$. Wir nutzen den Satz über die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral, Satz 2.41. Dazu betrachten wir eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$, $x_n > 0$ und entsprechend $f_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-x_n^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Wegen $\mathrm{e}^{-a} \leq \frac{1}{1+a}$ gilt, dass

$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\frac{1}{(1+t^2)(1+x_n^2(1+t^2))}| \leq \frac{1}{1+x_n^2} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Da die Folge beliebig war, folgt somit aus dem Satz, dass $\lim_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}x = 0$ und damit $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$.

2.5 Bemerkungen zur Integralrechnung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Integrale für reellwertige Funktionen definiert und betrachtet. Wenn man nun zu komplexwertigen Funktionen oder Funktionen nach $\mathbb{R}^m$, $m > 1$, übergehen möchte, so lassen sich alle diejenigen Begriffsbildungen und Schritte relativ leicht übertragen, die ohne eine Ordnung auf dem Zielbereich auskommen. Hierzu kann man den Integralbegriff einfach mittels der Komponentenfunktionen bzw. dem Real- und Imaginärteil der Funktion einführen, z.B.:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \\ \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix}.$$

Sobald man jedoch Eigenschaften wie $f \leq g$ benötigt bzw. verwenden will, also die Funktionen bzw. ihre Werte bezüglich einer Ordnungsrelation vergleichen will, ist der hier vorgestellte Weg nicht mehr klar — dies gilt insbesondere für komplex-wertige Funktionen. Die Probleme vergrößern sich noch, wenn das Ziel der zu integrierenden Funktion ein beliebiger Banach-Raum ist. In diesen Fällen kann man einen dem kennengelernten Riemann-Integralbegriff äquivalenten Integrationsbegriff benutzen, denjenigen über Riemann-Summen.

Definition 2.53 (Ausgezeichnete Zerlegungsfolge)**.** *Sei $f : B \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$, wobei Y ein Banach-Raum ist. Dann heißt eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(B)$ von Zerlegungen mit $\max\limits_{Q\in Z_n} \operatorname{vol}(Q) \to 0$ für $n \to \infty$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge.*

Definition 2.54 (Riemannsche (Zwischen-)Summe)**.** *Sei $f : B \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$, wobei Y ein Banach-Raum ist und $Z \in \mathcal{Z}(B)$. Dann heißt*

$$\sum_{Q\in Z} \operatorname{vol}(Q) \cdot \alpha_Q$$

mit $\alpha_Q = f(x_Q)$, $x_Q \in Q^\circ$ eine Riemannsche Zwischensumme von f bezüglich der Zerlegung Z.

Mit diesen beiden Grundbegriffen kann man jetzt den Begriff des Riemann-Integrals einführen, ohne auf Y eine Ordnungsrelation zur Verfügung zu haben (man beachte, dass die Ordnungsstruktur bei Definition 2.12 notwendig war). Es lässt sich nun zeigen, dass eine Funktion $f : B \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ mit B zerlegbar genau dann Riemann integrierbar im Sinne von Definition 2.12 ist, wenn für jede ausgezeichnete Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen die Folge der Riemannschen Zwischensummen gegen ein festes $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Somit lässt sich der Integralbegriff, den wir mittels oberem und unterem Darbouxintegral definiert haben, ohne eine Ordnungsrelation charakterisieren bzw. äquivalent einführen. Tatsächlich wurde, wie der Name bereits verrät, das auf Bernhard Riemann zurückgehende Integral ursprünglich mittels Riemannschen Summen definiert. Die von uns hier verfolgte äquivalente Methode geht auf Gaston Darboux zurück.
Allgemein lässt sich nun der Integralbegriff auf Funktionen ausweiten, die in allgemeine normierte Räume abbilden: Konvergieren die Riemannsche Zwischensummen für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge und ist der Grenzwert hiervon unabhängig, so heißt die o.a. Funktion f Riemann-integrierbar und der Grenzwert das Riemann-Integral. Bis auf wenige Ausnahmen wie z.B. den Mittelwertsatz lassen sich dann alle Resultate von Kapitel 2 auf diesen allgemeineren Integralbegriff übertragen.

Ein weiteres grundlegendes Problem des hier vorgestellten Integralbegriffes besteht in den durch Quader zerlegbaren "Ausgangsmengen" B. Wie in 2.15(ii) bereits erwähnt, kann man die Funktionswerte in endlich vielen Punkten von B variieren, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Es kommt also offensichtlich nicht auf "so viele" Werte von B an. Wie man mit Hilfe des Begriffs "messbare Menge" (Definition 2.22) und anderer Begriffsbildungen zu einem auch über Riemann hinausgehenden Integralbegriff gelangt, kann hier nicht ausgeführt werden. Wir verweisen hier auf die Analysis III.

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass stetige Funktionen (auf zerlegbaren, bzw. allgemeiner, auf messbaren Mengen) integrierbar sind. Wie eng aber die Begriffe der Integrierbarkeit und der Stetigkeit miteinander verknüpft sind, zeigt exemplarisch der folgende

Satz 2.55. *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ eine messbare, kompakte Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Falls f bis auf eine Teilmenge $M \subseteq B$ mit Maß gleich 0 stetig ist, so ist f Riemann-integrierbar und*

$$\int_B f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{B\setminus M} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Mit Hilfe eines allgemeineren Maßbegriffs, dem des *Lebesguemaßes*, gilt sogar die Umkehrung des Satzes: Wir verzichten hier auf eine Definition dieses Maßes und verweisen auf die Analysis III bzw. die Literatur. Es sei jedoch bemerkt, dass eine *messbare Menge*[16] nach

[16] In der Literatur wird der Begriff *messbar* meist für "Lebesgue-messbar" verwendet und *messbar* wie wir es hier definiert haben mit "Jordan-messbar" bezeichnet.

Definition 2.22 auch automatisch *Lebesgue-messbar* ist. Allerdings gilt die Umkehrung nicht, wie beispielsweise die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ zeigt. Dies kann man sich (selbst ohne den Begriff hier zu definieren) anhand des folgenden Resultates überlegen.

Satz 2.56 (Lebesgue)**.** *Sei $B \subseteq \mathbb{R}^p$ eine messbare, kompakte Menge und $f : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn f bis auf eine Menge vom Lebesgue–Maß gleich* 0 *stetig ist.*

Für einen Beweis auf die Analysis III bzw. [5, Satz 13.1.4]. Um ein Gefühl für obige Sachverhalte zu bekommen, vergleichen wir noch einmal die Dirichletfunktion f_D mit der Thomaeschen Funktion f_T (Beispiel 2.21): Letztere ist an allen irrationalen Zahlen in $[0,1]$ stetig. Die Mengen, an denen die beiden beschränkten Funktionen von 0 verschieden sind, sind allerdings gleich (den rationalen Zahlen in $[0,1]$). Dennoch ist f_T Riemann integrierbar, aber f_D nicht. Aus Theorem 2.56 schließen wir, dass $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Menge mit Lebesgue-Maß 0 ist, aber wegen Satz 2.55 nicht messbar.

Kapitel 3

Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Veränderlichen

Motivation & Wiederholung

Wie aus Analysis I bekannt, gibt es mehrere Möglichkeiten, die Ableitung einer Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (typischerweise betrachtet man in der Analysis I Intervalle D) an einer Stelle $x \in D$ zu definieren bzw. zu interpretieren und zwar als

(i) *Steigung* der Funktion an x bzw.

(ii) *lineare* Näherung an die Funktion im Punkt x,

Möglichkeit (i) definiert die Tangente an den Graphen von f in einem Punkt $\mathbf{A} = (x, f(x))$ als Grenzwert von Sekanten, bei denen der zweite Punkt auf der Sekanten, hier mit $\mathbf{B} = (x+h, f(x+h))$ bezeichnet, auf $\mathbf{A}$ "zustrebt".
Die Ableitung/das Differential

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

von f an der Stelle x "entspricht", falls existent, dann der Steigung der sich als Grenzwert ergebenden Tangente. Diese Sichtweise führt auch auf eine erste Anwendung des Ableitungsbegriffes: bei der Bestimmung von Extremwerten liefert dieser eine notwendige Bedingung mit $f'(x)$ für alle Extremstellen x im Inneren von D.

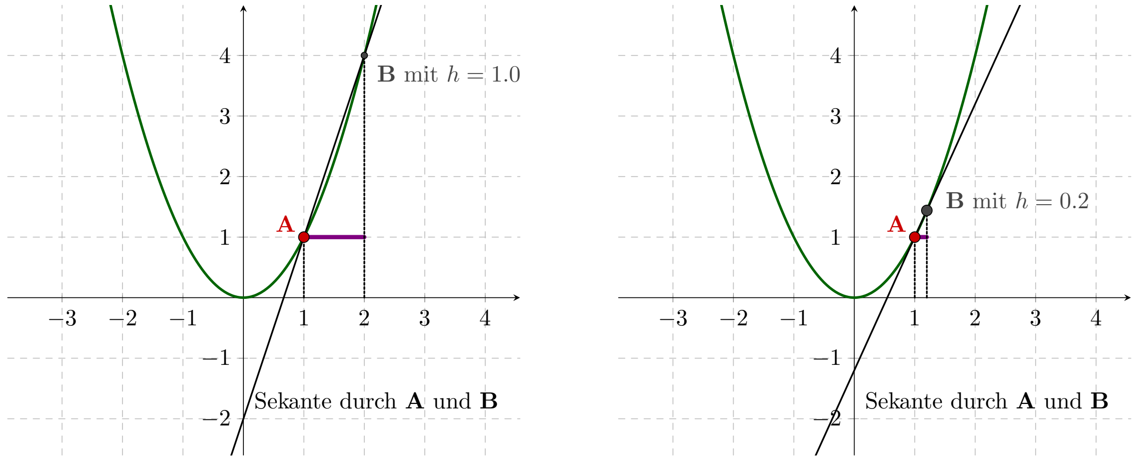

Abbildung 3.1: Die Sekanten an die Funktion $f(x) = x^2$ durch die Punkte $\mathbf{A} = (x, f(x))$ und $\mathbf{B} = (x + h, f(x + h))$ für $h = 1.0$ bzw. $h = 0.2$.

Eine eher statische Interpretation der Ableitung besteht darin, eine möglichst gute "lineare Näherung" (oder "Approximation") an die Funktion f im Punkt $\mathbf{A}$ zu bestimmen. In der folgenden Abbildung "ist" diese Näherung die Gerade an $\mathbf{A}$, die der Tangenten als Grenzwert der Sekanten entspricht. Somit ist gewährleistet, dass beide Vorgehensweisen zu demselben Resultat führen.

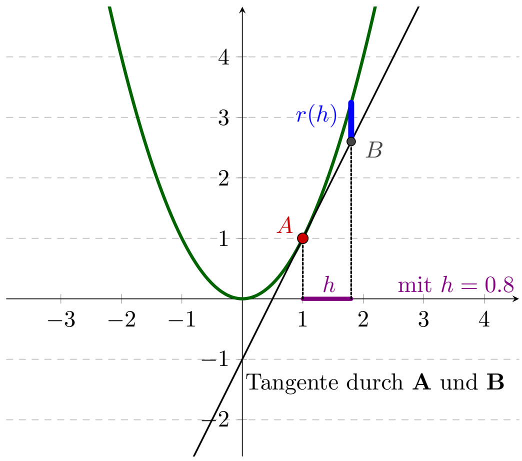

Abbildung 3.2: Die Tangente an die Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $\mathbf{A}$

Diese lineare Näherung lässt sich durch die Beziehung

$$f(x + h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h \tag{3.1}$$

für $x + h$ "nahe bei" x beschreiben. Unter bestimmten und später noch zu formulierenden Voraussetzungen (Satz von Taylor 3.29) kann man die "approximative Gleichheit" in (3.1) präzisieren zu:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(h)$$

für alle $h \in (-\delta, \delta)$ und eine hinreichend kleinen $\delta > 0$. Hier bezeichnet r den *Fehler* der linearen Approximation, der die Bedingung $\frac{r(h)}{h} \to 0$ für $h \to 0$ erfüllt.

Beim Übergang von diesem eindimensionalen Problem zu den hier anstehenden mehrdimensionalen Verallgemeinerungen sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ betrachtet. Überträgt man die Sichtweise der "linearen Näherung" auf ihren Graphen, so kann man eine Tangentialebene an den Graphen im Punkt $A(x, f(x))$ bilden, die den ursprünglichen Graphen in der Nähe dieses Punktes gut annähert. Diese Ebene "entspricht" der linearen Funktion A in der nachfolgenden Definition 3.8.. Man sollte sich bei der Betrachtung der folgenden Abbildung aber vor Augen führen, dass sich nicht an jeden Funktionsgraphen und in allen Punkten eine solche Ebene anschmiegen lässt und auch der Wert des Restes $r(h)$ davon abhängt, aus welcher Richtung man sich dem Punkt A nähert.

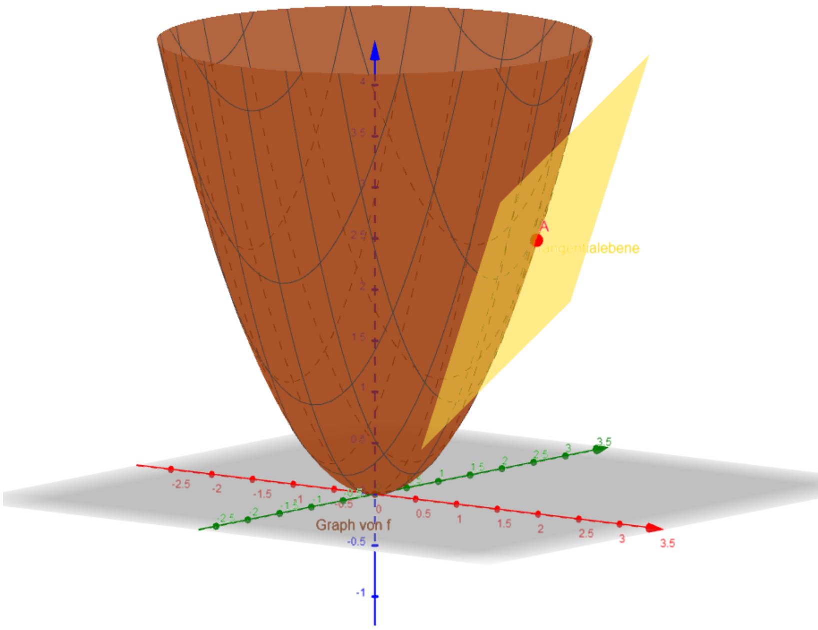

Abbildung 3.3: Tangentialebene zum Rotationsparaboloid

In diesem Kapitel werden wir wie in dem gerade skizzierten ersten Beispiel den Begriff des Differentials auf Funktionen in mehreren Veränderlichen ausweiten. Typischerweise werden wir Beispiele von Funktionen

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$$

betrachten (meistens sogar mit $m = 1$), wobei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^p$ ist. Es wird sich herausstellen, dass wir im Gegensatz zum Fall einer Funktion in *einer* Veränderlichen hierbei mehrere Möglichkeiten, das heißt Konzepte, zur Verfügung haben, einen Ableitungsbegriff zu definieren. Diese Begriffe lassen sich aber mitunter allgemeiner behandeln, weshalb wir im Folgenden auch Funktionen $f : X \to Y$ für allgemeine Banachräume X und Y [1] betrachten wollen — diese allgemeine Sichtweise stellt sich aber auch bereits für den Fall $X \subseteq \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^m$ als vorteilhaft heraus. Um mit den Begriffen vertraut zu werden, genügt es, wie schon in Kapitel 1, die oben genannte Situation $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^m$ im Kopf zu haben.

[1] Man könnte hier in den meisten Fällen auch noch allgemeiner normierte Räume betrachten.

3.1 Richtungsableitungen und totales Differential

Die folgende Definition ist eine einfache Verallgemeinerung des bereits bekannten Begriffs der Differenzierbarkeit aus der Analysis I.

Definition 3.1 (Differenzierbarkeit von vektorwertigen Funktionen)**.** *Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall und Y ein Banachraum (bzw. allgemeiner ein normierter Raum). Eine Funktion $f : (a, b) \to Y$ heißt* **differenzierbar an** *$x \in I$ falls der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x + h) - f(x)\right) =: f'(x)$$

existiert (als Element von Y). Das Element $f'(x)$ heißt das **Differential** *bzw. die* **Ableitung** *von f an x.*

Beispiel 3.2.

(a) Für Funktionen $f : (a, b) \to Y$ für $Y = \mathbb{R}$, die differenzierbar im Sinne der Analysis I sind, stimmt der Differential-Begriff offensichtlich mit dem aus Definition 3.1 überein.

(b) Insbesondere kann man mit Definition 3.1 den Begriff der Differenzierbarkeit für komplexwertige Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ einführen. Dies stimmt mit dem eventuell bereits in der Analysis I behandelten Begriff überein.

(c) Sei

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Komponentenfunktionen, gegeben durch $g_1(t) = t^2$ und $g_2(t) = \mathrm{e}^t$, differenzierbar. Der Grenzwert in Definition 3.1 ist ein Grenzwert im metrischen Raum $\mathbb{R}^2$ (versehen mit einer beliebigen Norm) und existiert deshalb genau dann, wenn die Grenzwerte aller Komponenten existieren, siehe Satz 1.14 und Lemma **??***. Somit existiert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g(t + h) - g(t)) = \begin{pmatrix} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g_1(t + h) - g_1(t)) \\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(g_2(t + h) - g_2(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

für jedes $t \in \mathbb{R}$ und die Funktion g ist differenzierbar.

(d) Sei $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$. Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{p\times p}, \quad t \mapsto t \cdot A$$

ist differenzierbar. Hierbei ist $\mathbb{C}^{n\times n}$ versehen mit einer beliebigen Abbildungsnorm, definiert durch eine Norm auf $\mathbb{C}^p$. Um dies zu sehen, beachte man, dass für alle $h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\frac{1}{h}((t + h)A - tA) - A = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{p\times p}.$$

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich vieles, was bereits für das Differential aus der Analysis I bekannt ist, direkt auf den Fall vektorwertiger Funktionen verallgemeinern. Es ist deshalb nicht überraschend, dass auch der Hauptsatz sein Gültigkeit behält. Für das folgenden Resultat wird das Riemann Integral für vektorwertige Funktionen benötigt. Hierfür rufe man sich die Kommentare im letzten Abschnitt von Kapitel 2 in Erinnerung. Insbesondere gilt der folgende Satz für Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}^p$. In diesem Fall ist das vektorwertige Integral komponentenweise gegeben,

$$\int_a^x f(s)\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \int_a^x f_1(s)\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_a^x f_p(s)\mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

Satz 3.3 (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung für vektorwertige Funktionen)**.** *Seien $a < b \in \mathbb{R}$, Y ein Banachraum und $f : [a,b] \to Y$ eine Riemann integrierbare Funktion. Dann ist*

$$F : [a,b] \to Y, x \mapsto \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$$

eine stetige Funktion. Falls f an $t_0 \in [a,b]$ stetig ist, so ist F an dieser Stelle differenzierbar mit Ableitung $f(t_0)$ [2].

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des "skalaren Hauptsatzes", Satz **??**, indem man den Absolutbetrag durch die (euklidische) Norm ersetzt. □

Obwohl das bisher gesehene nahelegt, dass die Differentialrechnung für vektorwertige Funktionen völlig analog verläuft wie im skalaren Fall, so gibt es dennoch ein paar Eigenschaften, die nicht im Allgemeinen gelten (siehe auch die Kommentare am Ende von Kapitel 2): So lässt sich beispielsweise der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht verallgemeinern.

Nun wollen wir uns der Frage widmen, wie sich der Differentialbegriff erweitern lässt, wenn der Eingangsraum X der Funktion

$$f : X \to Y$$

vektorwertig ist. Für den Rest des Kapitels spielt die Wahl des Ausgangsraumes Y eine eher untergeordnete Rolle, und kann — der Einfachheit und Anschauung halber — meist als $Y = \mathbb{R}^m$ oder sogar $Y = \mathbb{R}$ angenommen werden. Ausgehend von unserer Interpretation des Differentials für skalare Funktionen, liegt es nahe einen Differentialbegriff für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu definieren, indem wir für jede *Richtung* der Ebene $\mathbb{R}^2$ die Ableitung der Funktion f *entlang* dieser Richtung betrachten.

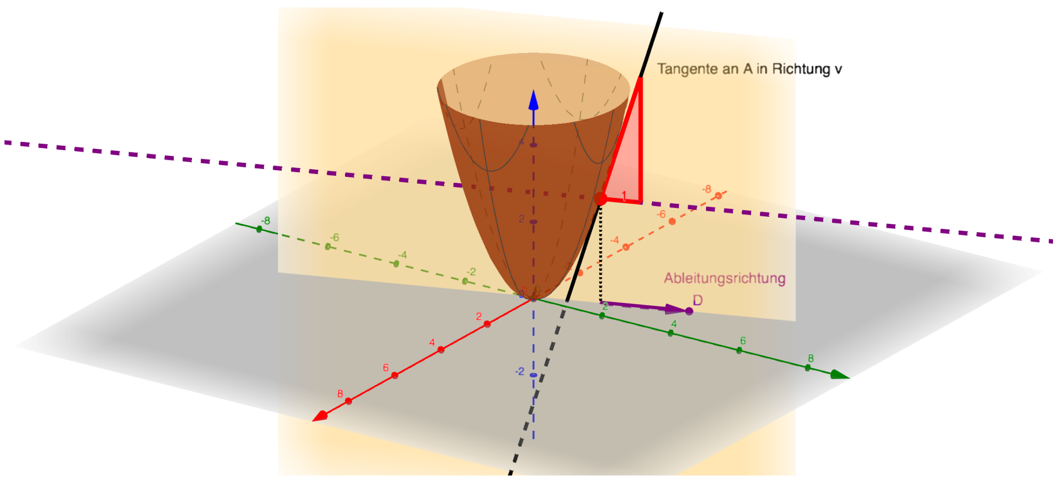

Abbildung 3.4: Eine Richtungsableitung (in Richtung v) der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$.

[2] mit der üblichen Modifikation, falls $t_0 \in \{a,b\}$.

In Anlehnung an die Einleitung dieses Kapitels betrachten wir nun beispielsweise die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

In Abbildung 3.4 ist die Ableitung an einem Punkt der skalaren Funktion, die durch den "Schnitt" der in gelb dargestellten Ebene mit dem Funktionsgraphen entsteht, dargestellt (siehe auch Beispiel 3.6 (3)).
Diese Überlegungen führen zu folgender Definition.

Definition 3.4 (Richtungsableitung und partielle Ableitung)**.** *Seien X, Y Banachräume und $f : D \subseteq X \to Y$ eine Abbildung, wobei D eine offene Menge ist. Sei $x \in D$.*

(i) Für $v \in X$ heißt f an $\mathbf{x}$ **in Richtung von** v **differenzierbar**, *falls die Funktion*

$$t \mapsto \Psi_v(t) = f(\mathbf{x} + tv) \tag{3.2}$$

an $t = 0$ differenzierbar ist (im Sinne von Definition 3.1, siehe auch die folgende Bemerkung) und man nennt $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) := \Psi_v'(0)$ die **Richtungsableitung** *von f in $\mathbf{x}$ nach v.*

(ii) Falls $X = \mathbb{R}^p$ und falls f an $\mathbf{x}$ in Richtung von e_i differenzierbar ist für alle kanonischen Basisvektoren e_i, $i \in \{1, .., p\}$, so heißt f an x **partiell differenzierbar** *und man nennt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{x})$ die* **partiellen Ableitungen** *von f. Weiterhin bezeichnet*

$$D_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = (\mathrm{grad} f)(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), .., \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{x})\right)^T \in \prod_{i=1}^{p} Y = Y^p$$

den **Gradienten** *von f. Falls f an allen $x \in D$ partiell differenzierbar ist, so heißt f partiell differenzierbar auf D.*

Bemerkung 3.5.

(1) Die Funktion Ψ_v in Definition 3.4 ist auf einem Intervall $I = (-\delta, \delta)$ für ein $\delta > 0$ wohldefiniert (Deshalb kann man von der Ableitung an $t = 0$ sprechen.). Dies liegt daran, dass D offen ist und somit eine δ-Kugel um x existiert, die in D enthalten ist.

(2) Offensichtlich gilt, dass die Existenz aller Richtungableitungen in einem Punkt $\mathbf{x}$ *die partielle Differenzierbarkeit impliziert, falls $X = \mathbb{R}^p$ ist. Die Umkehrung, also, dass die Existenz der partiellen Ableitungen bereits die Existenz <u>aller</u> Richtungsableitungen impliziert,* **gilt** *im Allgemeinen* **nicht**, *siehe Beispiel 3.6*

(3) Falls $Y = \mathbb{R}^m$ ist, so folgt aus der Äquivalenz der Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen, Bemerkung 1.77 bzw. Satz 1.14, dass $f : (a, b) \to Y$ genau dann an t_0 differenzierbar ist, wenn alle Komponenten $f_k : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind für alle $k \in \{1, .., m\}$, siehe auch Beispiel 3.2.

(4) Wir haben in der Definition der Richtungsableitung darauf verzichtet, das Element v, so wie eigentlich in diesem Skript üblich, als $\mathbf{v}$ *zu schreiben. Diese vermeintliche inkonsistente Notation rührt daher, dass wir die Notation $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ für die Richtungsableitung vermeiden möchten, um etwaige Verwechslungen mit der Jacobi-Matrix, siehe Bemerkung 3.10, zu vermeiden.*

Beispiel 3.6.

(a) *Falls $D = (a, b) \subseteq X = \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist, so gilt für $f : D \to Y$:*

$$f \text{ differenzierbar an } x \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ partiell differenzierbar an } x,$$

da es nur einen einzigen kanonischen Basisvektor in X gibt.

(b) *Alle konstanten Funktionen $f : X \to Y$, $f(x) = c \in Y$ für alle $x \in X$ sind an jeder Stelle $x \in X$ in alle Richtungen $v \in X$ differenzierbar.*

(c) *Sei $f(x, y) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{array} \right\}$. Dann existieren die partiellen Ableitungen an $(x, y) = (0, 0)$, da*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h, 0) - f(0, 0)) = \lim_{h\to 0} 0 = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(0, y+h) - f(0, 0)) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Andererseits ist f an $(0, 0)$ nicht in Richtung von $v = (1, 1)$ differenzierbar [3] *, weil für $h \neq 0$ gilt, dass*

$$\frac{1}{h}(f(0 + h, 0 + h) - f(0, 0)) = \frac{1}{h} \frac{h^2}{h^2 + h^2} = \frac{1}{2h} \to \infty \quad (h \to 0).$$

Demnach impliziert partielle Differenzierbarkeit nicht die Existenz aller Richtungsableitungen. Wir erinnern auch daran, dass wir außerdem schon früher gesehen hatten, dass f an $(0, 0)$ nicht stetig ist (Man überlege sich, inwiefern die partielle Differenzierbarkeit mit dem bekannten Resultat aus der Analysis I zusammenhängt, wonach differenzierbare Funktionen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig sein müssen.).

(d) *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

ist an jedem Punkt ihres Definitionsbereiches in alle Richtungen differenzierbar. Abbildung 3.4 zeigt die Richtungsableitung von f an einem Punkt (x, y) in Richtung v. Der Wert der Richtungsableitung entspricht der Steigung der Geraden, die durch den Punkt $A = (x, y, f(x, y))$ geht.

Definition 3.7 (Stetige partielle Ableitungen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und Y ein Banachraum. Eine partiell differenzierbare Funktion $f : D \to Y$ heißt* **stetig partiell differenzierbar** *falls die Abbildung*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \mapsto Y, \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

für jedes $i \in \{1, .., p\}$ stetig ist.

Man beachte, dass für $Y = \mathbb{R}^m$ die Bedingung, dass alle partiellen Ableitungen stetig sind (im Sinne von Definition 3.7) äquivalent dazu ist, dass $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{grad} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ stetig von D nach $\mathbb{R}^m$ ist. Dies folgt wiederum aus Satz 1.14 und Bemerkung 1.77.

[3] Unter

`https://www.geogebra.org/m/wtmrgqfb`

findet sich der Graph der Funktion sowie eine Sekante in Richtung von $v = (1, 1)$ Bewegt man diese auf $A(0, 0)$ zu, so erkennt man, dass sie immer steiler wird.

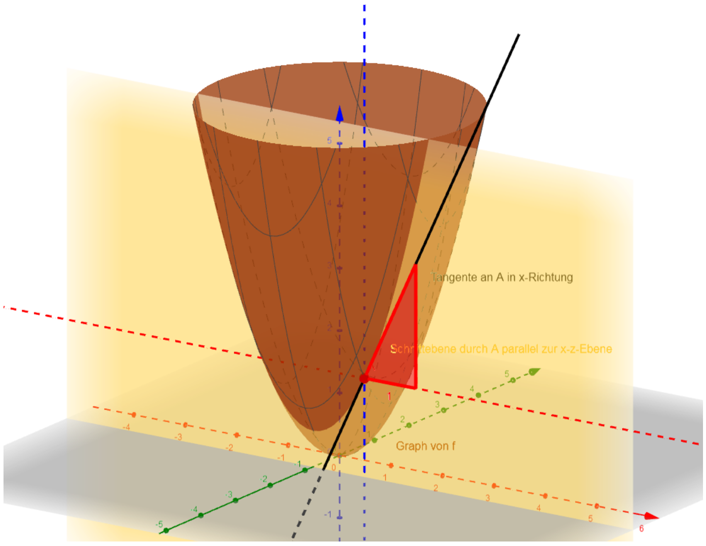

Abbildung 3.5: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$— hierbei ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ die Steigung im Punkt A parallel zur x-z-Ebene.

Bemerkung 3.8 (Produktregel)**.** *Unmittelbar aus der Produktregel für Funktionen von in einer Variablen (die nach $\mathbb{R}$ abbilden) erkennt man für partiell differenzierbare Funktionen $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dass*

$$\mathrm{grad}(f \cdot g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{grad} g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{grad} f(\mathbf{x}),$$

Man beachte hierbei, dass hier $Y = \mathbb{R}$ ist und in welchem Sinne das Produkt und die Summe zu verstehen sind.

Definition 3.9 (Totales Differential)**.** *Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ offen, $\mathbf{x} \in D$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt f an $\mathbf{x}$* **total differenzierbar** *oder* **Fréchet differenzierbar***, falls Folgendes gilt: Es existieren*

- *eine Konstante $\rho > 0$,*
- *eine Funktion $\phi : B_\rho(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$, sowie*
- *eine lineare und stetige Abbildung $A : X \to Y$, also $A \in L(X, Y)$, siehe Satz 1.81,*

so dass

- *$B_\rho(\mathbf{x}) \subseteq D$,*
- *$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{\phi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|_X} = 0$, $\phi(\mathbf{0}) = 0$ und*
- *$f(\mathbf{x} + \boldsymbol{h}) = f(\mathbf{x}) + A\boldsymbol{h} + \phi(\boldsymbol{h})$ für alle $\boldsymbol{h} \in B_\rho(\mathbf{0})$.*

In diesem Fall heißt $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = A$ das **totale Differential** *von f an x. Falls f für jedes $x \in D$ total differenzierbar, so nennt man f* **total differenzierbar** *auf D.*

Bemerkung 3.10.

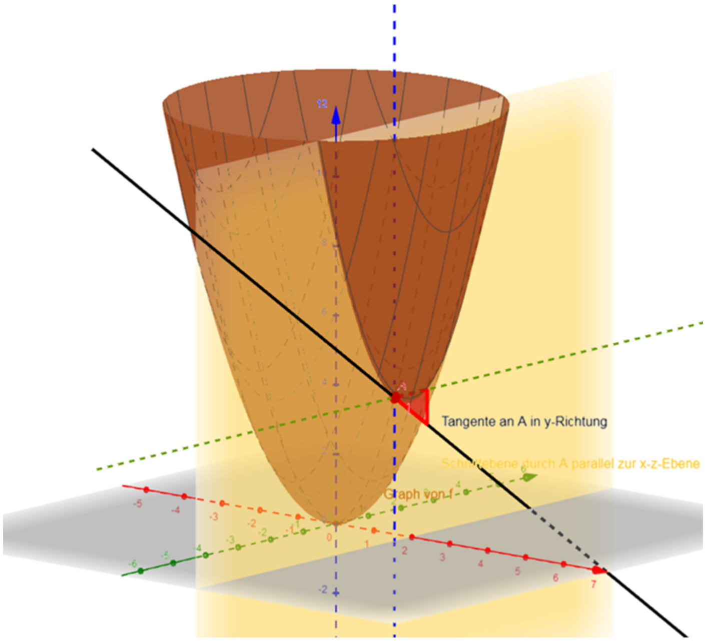

Abbildung 3.6: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$; hierbei ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ die Steigung im Punkt A parallel zur y-z-Ebene.

(1) *Wir sehen also, dass die Eigenschaft der totalen Differenzierbarkeit der Motivation folgt, eine Funktion lokal — das heißt in einer hinreichend kleinen Kugel um einen festen Punkt* $\mathbf{x}$ *— mit Hilfe einer linearen Funktion anzunähern. Deshalb nennt man die Funktion* ϕ *aus Definition 3.9 auch Fehlerfunktion. Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wann eine Funktion total differenzierbar ist und speziell damit, wie der Begriff mit den anderen bereits gesehenen Typen von Differenzierbarkeit zusammenhängt. Man beachte auch, dass auch erst begründet werden muss, dass das totale Differential* $\mathrm{d}f(x)$ *wohldefiniert ist (d.h., dass* A *eindeutig bestimmt ist).*

(2) *Weitere in der Literatur verwendete Bezeichnungen für die partiellen Ableitungen und den Gradienten sind*

$$D_{x_i} f(\mathbf{x}) = \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathrm{grad} f(x)$*. Typischerweise wird für den Fall* $Y = \mathbb{R}^m$ *zwischen* $m = 1$ *und* $m > 1$ *unterschieden. So schreibt man für* $m = 1$ *meistens* $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{1\times p}$ *und spricht (wie oben definiert) vom "Gradienten" von* f *an* $\mathbf{x}$*, während man im Fall* $m > 1$ *eher die Notation*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathrm{grad} f_1(\mathbf{x})^T \\ \mathrm{grad} f_2(\mathbf{x})^T \\ \cdots \\ \mathrm{grad} f_m(\mathbf{x})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

verwendet. Dann spricht man auch von der **Jacobi-Matrix** *oder* **Funktionalmatrix** $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ *von* f *an* $\mathbf{x}$*.*

(3) *Wie zeigt man, dass* f *total diffbar? Man gibt* ρ, ϕ *und* A *an.*

Satz 3.11 (Eigenschaften des totalen Differentials)**.** *Sei $f : D \subseteq X \to Y$ total differenzierbar an $\mathbf{x} \in D$ und sei $A \in L(X,Y)$ wie in Definition 3.9. Dann gilt*

(1) f ist stetig an $\mathbf{x}$

(2) f ist an $\mathbf{x}$ in alle Richtungen $v \in X$ differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = Av$.

(3) $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ ist wohldefiniert und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x})(v)$.
Insbesondere gilt, falls $X = \mathbb{R}^p$, dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{e}_i)$ für alle $i \in \{1, .., p\}$.

Beweis. Siehe Vorlesung. □

Man beachte, dass Satz 3.11 insbesondere aussagt, dass für eine total differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ gilt, dass das totale Differential $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ an der Stell $\mathbf{x}$ durch die partiellen Ableitungen bestimmt ist, denn $\mathrm{d}f(\mathbf{x})$ ist als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^p$ nach $\mathbb{R}^m$ eindeutig durch die Matrixdarstellung bezüglich der kanonischen Basis gegeben. Nach Satz 3.11(3), dass

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x})(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Satz 3.11 zeigt, dass die aus der Analysis I bekannte Intuition "*Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit*" wahr ist, wenn man den Begriff der totalen Differenzierbarkeit betrachtet, und dass die Richtungsableitungen sowie partiellen Ableitungen durch das totale Differenzial bestimmt sind.

Korollar 3.12. *Jede total differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ ist partiell differenzierbar.*

Aus Beispiel 3.6 und Satz 3.11(1) oder (2) folgt, dass die Umkehrung von Korollar 3.12 nicht gilt. Wir zeigen nun, dass die "Umkehrung" aber gilt, wenn wir "partiell differenzierbar" durch "stetig partiell differenzierbar" ersetzen.

Satz 3.13. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f total differenzierbar.*

Beweis. Sei $x \in D$. Wir suchen ρ, ϕ und A. Aus Satz 3.11 wissen wir bereits, welche Form A nur haben kann, nämlich

$$Av = \sum_{i=1}^{p} v_i A e_i = \sum_{i=1}^{p} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \in Y, \tag{3.3}$$

wobei wir verwendet haben, dass A linear ist (sofern ein solches A existiert, was wir ja zeigen wollen). Die rechte Seite der Gleichung ist also der Kandidat für A und wir setzen

$$\phi(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - A\mathbf{h},$$

für $\mathbf{h} \in B_\rho(\mathbf{0}) \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\phi(\mathbf{0}) = 0$, wobei wir ρ so bestimmen, dass $B_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \subseteq D$ ist. Ziel ist es nun, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\phi(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_1} = 0$ zu zeigen. Hierfür erinnern wir uns daran, dass eine entsprechende Aussage für $p = 1$ und $Y = \mathbb{R}$ gilt — dies folgt direkt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus der Analysis I. Wir wollen dieses Argument nun in höhere Dimension "hochziehen". Allerdings möchten wir den Mittelwertsatz vermeiden, weil er gewissermaßen zu sehr an der Theorie für Funktionen in einer Veränderlichen hängt. Stattdessen wird sich der Hauptsatz (in der vektorwertigen Version wie in Abschnitt 2.5 angedeutet) als geeignetes

Hilfsmittel erweisen. Mit $\tilde{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{j} h_i \mathbf{e}_i$ für $j \in \{1,..,p\}$ und $\tilde{\mathbf{x}_0}$ erhalten wir mit Hilfe einer Teleskopsumme und (3.3)

$$\phi(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{p} f(\tilde{\mathbf{x}}_j) - f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$$

und damit aufgrund der Dreiecksungleichung der Norm (im Falle $Y = \mathbb{R}$ ersetze man diese durch $|\cdot|$),

$$\frac{\|\phi(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_1} \leq \frac{1}{\|\mathbf{h}\|_1} \sum_{j=1}^{p} \left\| f(\tilde{\mathbf{x}}_j) - f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\|_Y \tag{3.4}$$

Die Normen der einzelnen Summanden lassen sich nun wegen $\tilde{\mathbf{x}}_j = \tilde{\mathbf{x}}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j$ mit Hilfe des Hauptsatzes — man beachte, dass $s \mapsto f(\tilde{\mathbf{x}}_j + s\mathbf{e}_j)$ aufgrund der Voraussetzung stetig differenzierbar ist — als

$$f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j) - f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \int_0^{h_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}_j + s\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathrm{d}s$$

schreiben. Nun folgt mit der Dreiecksungleichung des Integrals, dass

$$\left\| f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1} + h_j \mathbf{e}_j) - f(\tilde{\mathbf{x}}_{j-1}) - h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\| \leq \int_0^{h_j} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}_j + s\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\| \mathrm{d}s \leq |h_j| M_{h_j},$$

wobei $M_{h_j} = \sup_{s \in [0,h_j]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tilde{\mathbf{x}}_j + s\mathbf{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right\|$. Man beachte, dass $\lim_{h_j \to 0} M_{h_j} = 0$ für jedes j aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitung erfüllt ist. Deshalb gilt mit (3.4),

$$\frac{\|\phi(\mathbf{h})\|_Y}{\|\mathbf{h}\|_1} \leq \sum_{j=1}^{p} \frac{|h_j|}{\|\mathbf{h}\|_1} M_{h_j} \leq \sum_{j=1}^{p} M_{h_j} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \|\mathbf{h}\|_1 \to 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Definition 3.14. *Eine total differenzierbare Funktion $f : D \subseteq X \to Y$ heißt* **stetig differenzierbar**, *falls*

$$\mathrm{d}f : D \to L(X,Y), x \mapsto \mathrm{d}f(\mathbf{x})$$

eine stetige Abbildung ist, wobei $L(X,Y)$ mit der Abbildungsnorm, Def. 1.80, versehen ist.

Aus Satz 3.13 folgt unmittelbar das folgende Resultat.

Korollar 3.15. *Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ ist genau dann stetig differenzierbar, wenn sie stetig partiell differenzierbar ist.*

Beweis. Wenn f stetig differenzierbar ist, so ist für $i \in \{1,..,p\}$ wegen

$$\|\mathrm{d}f(\mathbf{x})(e_i) - \mathrm{d}f(\mathbf{y})(e_i)\|_{L(X,Y)} = \|(\mathrm{d}f(\mathbf{x}) - \mathrm{d}f(\mathbf{y}))(e_i)\|_{L(X,Y)} \leq \|(\mathrm{d}f(\mathbf{x}) - \mathrm{d}f(\mathbf{y}))\| \|e_i\|,$$

— wobei wir die Definition der Abbildungsnorm verwendet haben — auch $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}f(\mathbf{x})(e_i)$ stetig. Nach Satz 3.11(2) folgt, dass f stetig partiell differenzierbar ist. Umgekehrt ergibt sich aus Satz 3.13, dass aus stetiger partieller Differenzierbarkeit auch die totale Differenzierbarkeit folgt. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}f(\mathbf{x})$ stetig ist. Hierzu schreiben wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.13 $\mathrm{d}f(\mathbf{x})(v)$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen,

$$\|\mathrm{d}f(\mathbf{x})(v) - \mathrm{d}f(\mathbf{y})(v)\|_Y = \left\| \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{x}) v_i - \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{y}) v_i \right\|_Y \leq \|v\|_\infty \sum_{i=1}^{p} \left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{y}) \right\|_Y,$$

für $v = \sum_i v_i e_i$. Somit gilt $\|\mathrm{d}f(\mathbf{x}) - \mathrm{d}f(\mathbf{y})\|_{L(X,Y)} \leq \sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial e_i}(\mathbf{y}) \right\|_Y$, woraus die gewünschte Stetigkeit folgt. □

Bemerkung 3.16. *Satz 3.13 und Korollar 3.15 erweisen sich in der Praxis als nützlich, um totale Differenzierbarkeit zu beweisen. Die dazu benötigte partielle Differenzierbarkeit lässt sich meist mit Hilfe der bereits bekannten Theorie der Differentialrechnung in einer Veränderlichen nachweisen. Es sei hier auch betont, dass falls $Y = \mathbb{R}^m$ ist, die partielle Differenzierbarkeit anhand der Komponentenfunktionen gezeigt werden kann.*

Beispiel 3.17. *(a) Für die Polarkoordinatenfunktion*

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}$$

existieren die partiellen Ableitungen, die sich mit Hilfe der Jacobi-Matrix schreiben lassen als

$$\frac{\partial f}{\partial(r, \phi)}(r, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Da die Einträge der Jacobi-Matrix stetige Funktion in den Variablen r, ϕ sind, ist f auf seinem Definitionsbereich stetig partiell differenzierbar und somit nach Korollar 3.15 stetig total differenzierbar.

(b) Die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist zwar stetig und die partiellen Ableitungen $\partial_x f, \partial_y f$ existieren an allen Punkten, aber f ist nicht an $(0, 0)$ total differenzierbar: Dies sieht man leicht dadurch, dass man zeigt, dass die Richtungsableitungen an $(0, 0)$ existieren, aber $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ keine lineare Abbildung ist. Dies widerspricht der Definition des totalen Differentials $\mathrm{d}f(0, 0)$ da $\mathrm{d}f(0, 0)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ ist. Um dies einzusehen, beachte man, dass nach Definition die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ im Punkt $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ durch den Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\mathbf{x} + tv) - f(\mathbf{x})) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(tv) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 v_1 + t^2 v_2} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

gegeben ist. Für $v = \mathbf{0}$ gilt offensichtlich $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0}) = 0$. Wir wissen aus Satz 3.9, dass, falls f an $\mathbf{0}$ total differenzierbar ist,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}))(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

gilt. Offensichtlich ist hier $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{0})$ keine lineare Abbildung.

Satz 3.18 (Linearität des totalen Differentials)**.** *Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ offen und die Funktionen $f, g : D \subseteq X \to Y$ an $\mathbf{x}$ total differenzierbar. Dann ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\lambda f + g$ an $\mathbf{x}$ total differenzierbar und*

$$\mathrm{d}(\lambda f + g)(\mathbf{x}) = \lambda \mathrm{d}f(\mathbf{x}) + \mathrm{d}g(\mathbf{x}).$$

Sind f und g sogar stetig differenzierbar (auf D), so gilt dies auch für $\lambda f + g$.

Beweis. (siehe Aufgabe 5, Blatt 10) Seien $\rho > 0, \phi_f, \phi_g : B_\rho(\mathbf{0}) \to Y$ und $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = A_f, \mathrm{d}g(\mathbf{x}) = A_g \in L(X,Y)$, so dass $B_\rho(\mathbf{x}) \subseteq D$, $\phi_f(\mathbf{0}) = \phi_g(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in Y$, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\phi_f(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\phi_g(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \in Y$ und

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + A_f\mathbf{h} + \phi_f(\mathbf{h})$$
$$g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = g(\mathbf{x}) + A_g\mathbf{h} + \phi_g(\mathbf{h})$$

für alle $\mathbf{h} \in B_\rho(\mathbf{0})$ (Man überlege sich leicht, warum ρ simultan für f und g wählen kann.). Multiplizieren der ersten Gleichung mit λ und Addieren der Gleichungen liefert

$$\lambda f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) + g(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = (\lambda f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) + (\lambda A_f + A_g)(\mathbf{h}) + (\lambda\phi_f(\mathbf{h}) + \phi_g(\mathbf{h})),$$

wobei wir die Linearität von A_f und A_g verwendet haben. Es folgt die Behauptung, da $\phi = \lambda\phi_f + \phi_g$ erfüllt, dass $\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\phi(\mathbf{h})}{\mathbf{h}} = \mathbf{0} \in Y$ ist.

□

Satz 3.19 (Kettenregel)**.** *Seien X, Y, Z Banachräume,, $D_f \subseteq X, D_g \subseteq Y$ offen und $f : D_f \subseteq X \to Y$, $g : D_g \subseteq Y \to Z$ und $\mathbf{x} \in D_f$, so dass*

- *$f(D_f) \subseteq D_g$,*
- *f ist total differenzierbar an $\mathbf{x}$ und*
- *g ist total differenzierbar an $f(\mathbf{x})$.*

Dann ist $g \circ f$ total differenzierbar an $\mathbf{x}$ und es gilt

$$\mathrm{d}(g \circ f)(\mathbf{x}) = \mathrm{d}g(f(\mathbf{x})) \circ (\mathrm{d}f(\mathbf{x})).$$

Beweis. Skizziert in der Vorlesung. □

Korollar 3.20. *Seien $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ und $\phi : D_\phi \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ total differenzierbar auf den offenen Mengen D_f bzw. D_ϕ und $\phi(D_\phi) \subseteq D_f$. Dann gilt, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist und es gilt*

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(\mathbf{t}))\frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{grad} f(\phi(\mathbf{t}))^T \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}), \qquad \forall \mathbf{t} \in D_\phi, i \in \{1,..,p\}.$$

Beweis. (Aufgabe 4, Blatt 12) Die Kettenregel besagt, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist und dass

$$\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \circ \mathrm{d}\phi(\mathbf{t})$$

ist, wobei wir daran erinnern, dass $\mathrm{d}\phi(\mathbf{t}) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ und $\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ gilt. Aus den Eigenschaften des totalen Differentials (Satz 3.10) wissen wir, dass für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = (\mathrm{d}\phi(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(\mathbf{t})) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_j)$$

gilt[4]. Außerdem können wir $\phi(t) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j(\mathbf{t})\mathbf{e}_j$ schreiben. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial t_i}(\mathbf{t}) &= (\mathrm{d}(f \circ \phi)(\mathbf{t}))(\mathbf{e}_i) = (\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})) \circ \mathrm{d}\phi(\mathbf{t}))\,(\mathbf{e}_i) \\
&= \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\,(\mathrm{d}\phi(\mathbf{t})(\mathbf{e}_i)) = \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\left(\frac{\partial \phi}{\partial t_i}(\mathbf{t})\right) \\
&= \mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t}))\left(\sum\nolimits_{j=1}^{p} \frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t})\mathbf{e}_j\right) \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{p} \big(\mathrm{d}f(\phi(\mathbf{t})(\mathbf{e}_j)\big)\frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}) \\
&= \sum\nolimits_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi_j(\mathbf{t}))\frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}(\mathbf{t})
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichung aus der Linearität des totalen Differentials folgt. □

3.2 Höhere Ableitungen und Taylorpolynome

Wir wollen nun wie in der bekannten Differentialrechnung für Funktionen in einer Veränderlichen Ableitungen höherer Ordnung einführen. Wie bisher seien im Folgenden weiterhin $D \subseteq X$ offen und X, Y Banachräume. Zur Veranschaulichung der Resultate und ihrer Beweise genügt es, den Fall $Y = \mathbb{R}$ zu betrachten.

Definition 3.21 (höhere partielle Ableitungen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und Y ein Banachraum und $\mathbf{x} \in D$. Dann heißt $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$*

- **zweimal partiell differenzierbar an $\mathbf{x}$**, *falls f partiell differenzierbar ist (auf D) und die partiellen Ableitungen partiell differenzierbar an $\mathbf{x}$ sind. Die partiellen Ableitungen von f nennt man partielle Ableitungen erster Ordnung.*
- **$(k+1)$-mal partiell differenzierbar an $\mathbf{x}$**, *falls f k-mal partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung partiell differenzierbar an $\mathbf{x}$ sind. Die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen k-ter Ordnung heißen partielle Ableitungen $(k+1)$-ter Ordnung.*
- **$(k+1)$-mal stetig partiell differenzierbar**, *falls f k-mal stetig partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der k-ter Ordnung stetig partiell differenzierbar sind.*

Wir benutzen die folgende Notation für Ableitungen k-ter Ordnung

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \qquad \textit{sowie} \qquad \underbrace{\partial x_i \partial x_i \cdots \partial x_i}_{k\text{-mal}} = \partial x_i^k.$$

Definition 3.22. *Seien X und Y Banachräume, $D \subseteq X$ offen und $\mathbf{x} \in D$. Eine Funktion $f : D \subseteq X \to Y$ heißt* **zweimal (total) differenzierbar an $\mathbf{x}$**, *falls f differenzierbar auf D ist und die Abbildung*

$$\mathrm{d}f : D \mapsto L(X, Y)$$

total differenzierbar an x ist. Das totale Differential $d^2 f(\mathbf{x})$ dieser Abbildung heißt **zweite Ableitung** *oder* **totales Differential 2. Ordnung** *von f an x. Falls f für alle $x \in D$*

[4] Man beachte, dass in dieser Zeile $\mathbf{e}_i$ der i-te kanonische Basisvektor in $\mathbb{R}^m$ ist, wohingegen $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^p$ gilt.

zweimal differenzierbar ist, so heißt f **zweimal total differenzierbar** *auf D.*
Induktiv definiert man für $k \in \mathbb{N}$, dass $f : D \subseteq X \to Y$

- $(k+1)$**-mal differenzierbar an $\mathbf{x}$** *ist, falls f k-mal differenzierbar ist und die Abbildung $\mathbf{z} \mapsto \mathrm{d}^k f(\mathbf{z})$ an $\mathbf{x}$ total differenzierbar ist mit Ableitung $\mathrm{d}^{k+1} f(\mathbf{x})$ $k+1$-Ordnung, bzw.*

- k**-mal differenzierbar** *ist, falls f an jedem $\mathbf{x} \in D$ k-mal differenzierbar ist, bzw.*

- k**-mal stetig differenzierbar** *ist, falls f k-mal differenzierbar und $\mathrm{d}^k f$ stetig ist.*

Bemerkung 3.23. *Sei $f : D \subseteq X \to Y$ an $x \in D$ zweimal differenzierbar. Dann ist also $d^2 f(x) \in L(X, L(X,Y))$ eine stetige, lineare Abbildung von X nach $L(X,Y)$, dem Banachraum der stetigen, linearen Abbildungen von X nach Y. Um sich dieses Objekt zu veranschaulichen, betrachten wir den Fall $X = \mathbb{R}^2$ und $Y = \mathbb{R}$. Dann lässt sich gemäß der linearen Algebra $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit den (Zeilen-)Vektoren $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ identifizieren und genauso die lineare Abbildung*

$$\mathrm{d}^2 f(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 1}$$

durch eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ darstellen.
Grob gesprochen gilt also, dass in diesem Fall das Differential (erster Ordnung) an einem Punkt x einem Vektor *und das Differential zweiter Ordnung an x einer* Matrix *entspricht. Dementsprechend sind Differentiale verschiedener Ordnung als unterschiedliche Objekte aufzufassen. Ähnlich lässt sich auch $\mathrm{d}^k f(x)$ für $k > 2$ als* Tensor *auffassen. Im bekannten Fall $dim(X) = dim(Y) = 1$ lassen sich $X, Y, L(X,Y), L(X, L(X,Y)), ..$ paarweise identifizieren, wodurch man tatsächlich wieder "dieselben Objekte" für $f(x), f'(x), f''(x)$, usw. erhält.*

Proposition 3.24. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) Falls f k-mal total differenzierbar ist, so ist f k-mal partiell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\Big(\dots((\mathrm{d}^k f(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_{i_1}))(\mathbf{e}_{i_2}))\dots(\mathbf{e}_{i_k})\Big) &= d^k f(\mathbf{x})(e_{i_1})(e_{i_2})\cdots(e_{i_k}) \\ &= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(\mathbf{x}). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

(2) f ist k-mal stetig partiell differenzierbar genau dann wenn f k-mal stetig total differenzierbar ist.

Beweis. Der Fall $k = 1$ folgt aus Satz 3.11(3). Der allgemeine Fall ergibt sich mittels Induktion. □

Satz 3.25 (Schwarz)**.** *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in D$ und Indizes $i, j \in \{1, .., p\}$, dass*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Beweis. Vorlesung. Grundidee: Hauptsatz und Satz über Vertauschung von Integral und Differential. □

Korollar 3.26 (Folgerung des Satzes von Schwarz)**.** *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ k-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $\mathbf{x} \in D$ und jede Permutation $\pi : \{1,..,k\} \to \{1,..,k\}$, dass*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \partial x_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(k)}}}(\mathbf{x})$$

Das heißt, die Reihenfolge spielt bei der partiellen Differentiation keine Rolle.

Definition 3.27 (Multiindex und stetige partielle Ableitung)**.** *Ein endliches Tupel $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ von Zahlen α_i in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ heißt* **Multiindex**. *Die Zahlen*

$$\ell(\alpha) := n, \quad |\alpha| := |\alpha_1| + |\alpha_2| + .. + |\alpha_n|, \quad \alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdot .. \cdot \alpha_n!$$

bezeichnen die **Länge** *$\ell(\alpha)$, die* **Ordnung** *$|\alpha|$ und die* **Fakultät** *$\alpha!$ eines solchen Multiindex. Sei $p \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ k-mal stetig differenzierbar. Für einen Multiindex α mit $\ell(\alpha) = p$ verwenden wir die Notation*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{x}^\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} x_2 \partial^{\alpha_2} \cdots \partial x_p^{\alpha_p}}(\mathbf{x})$$

bzw. auch das Symbol $D^\alpha f(\mathbf{x})$ und sprechen von einer **partiellen Ableitung der Ordnung** *$|\alpha|$ an der Stelle $\mathbf{x}$.*

Beispiel 3.28. *Sei $\alpha = (1, 2, 3)$. Dann ist $\ell(\alpha) = 3$, $|\alpha| = 6$ und $\alpha! = 1! \cdot 2! \cdot 3! = 12$. Sei $f(x, y, z) = xz^4 \cos(y)$, definiert von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$, so ist*

$$D^\alpha f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^6}{\partial x \partial y^2 \partial z^3} f(x, y, z) = -24 \cos(y) z,$$

und für $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ ist $\mathbf{x}^\alpha = xy^2z^3$.

Im Folgenden benutzen wir für eine k-mal differenzierbare Funktion die **Notation**

$$(\ldots \Big((\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(v_1))(v_2)\Big) \ldots (v_k)) = \mathrm{d}^k f(v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

für $v_1, .., v_k \in X$.

Proposition 3.29. *Sei $f : D \subseteq X \to Y$ k-mal total differenzierbar an $\mathbf{x} \in D$. Dann gilt für Richtungsvektoren $v_1, .., v_k \in X$, dass*

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \frac{\partial}{\partial v_1} \frac{\partial}{\partial v_2} \cdots \frac{\partial f}{\partial v_k}(\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

Falls $X = \mathbb{R}^p$ und f k-mal stetig differenzierbar ist, gilt dann außerdem für $\mathbf{h} \in X$, dass

$$\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k-mal}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p, |\alpha| = k} D^\alpha f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^\alpha,$$

wobei wir die Summe über alle Multiindizes mit Ordnung $|\alpha| = k$ bilden.

Beweis. Für $k = 1$ folgt (3.6) direkt aus Satz 3.11(1). Der allgemeine Fall folgt nun induktiv. Sei dazu die Aussage für k wahr, d.h. für $k + 1$-mal differenzierbares f. Dann gilt nach der Definition des totalen Differentials und der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\mathrm{d}^{k+1} f(\mathbf{x})(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \Big(\mathrm{d}(\mathrm{d}^k f)(\mathbf{x})(v_1)\Big)(v_2, \ldots, v_{k+1}) = \mathrm{d}(\tfrac{\partial}{\partial v_2} \tfrac{\partial}{\partial v_2} \cdots \tfrac{\partial f}{\partial v_{k+1}})(\mathbf{x})(v_1)$$

woraus wiederum mit dem Fall $k = 1$ die Behauptung folgt. Die zweite Identität folgt mit Hilfe der Darstellung $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{p} h_i \mathbf{e}_i$ und der bereits gezeigten Gleichung und der Richungsableitung $\frac{\partial g}{\partial h}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x})$. Wegen der Folgerung aus dem Satz von Schwarz, Korollar 3.26, lassen sich die partiellen Ableitung mit Hilfe der Multiindizes wie in Definition 3.27 schreiben. □

Man beachte, dass wir im folgenden Satz $Y = \mathbb{R}$ annehmen. Außerdem schreiben wir $\mathrm{d}^0 f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Satz 3.30 (Taylor'scher Lehrsatz). *Sei $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, $\mathbf{x} \in D$ und $\mathbf{h} \in X$ so, dass $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in D$ für alle $t \in [0,1]$ ist*[5]*. Dann existiert ein $\xi \in [0,1]$, so dass*

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \mathrm{d}^j f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{j-mal}) + \frac{1}{(k+1)!} \mathrm{d}^{k+1} f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{(k+1)-mal}).$$

Falls $X = \mathbb{R}^p$ ist, so folgt die Darstellung

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{x}) \mathbf{h}^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h}) \mathbf{h}^\alpha. \tag{3.7}$$

Vorsicht Tippfeh
kultät) in Vorles
letzten Term (3.8)

Beweis. Wir definieren die Funktion $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Da g aufgrund der Voraussetzung k-mal stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Taylor'schen Satz für Funktionen in einer Veränderlichen[6], dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = g(1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} + \frac{g^{(k)}(\xi)}{k!}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $g^{(j)}(0) = \mathrm{d}^j f(\mathbf{x})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h})$ ist für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $g^{(k)}(\xi) = \mathrm{d}^k f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h})$. Dies folgt durch k-malige Anwendung der Kettenregel, Satz 3.19, wobei man g als Verknüpfung von f und $\phi(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$ betrachte. Für $j = 0$ ist die Aussage klar. Für $j = 1$ gilt: Da ϕ (beliebig oft) differenzierbar und $\mathrm{d}\phi(t) = \mathbf{h}$ ist, erhält man

$$g'(t) = (\mathrm{d}f(\phi(t)))(\mathrm{d}\phi(t)) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}))(\mathbf{h}),$$

also $g'(0) = (\mathrm{d}f(\mathbf{x}))(\mathbf{h})$. Induktiv folgt $g^{(j)}(t) = \underbrace{\mathrm{d} \cdots \mathrm{d}}_{j-\mathrm{mal}} f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}) \underbrace{(\mathbf{h}) \cdots (\mathbf{h})}_{j-\mathrm{mal}}$ und damit die Behauptung. Gleichung (3.7) folgt direkt aus dem eben Bewiesenen und Proposition 3.29. □

Wir haben im Taylorschen Lehrsatz nur Funktionen betrachtet, die nach $\mathbb{R}$ abbilden. Diese Voraussetzung kann abgeschwächt werden. Allerdings würde dies — zumindest im Lichte des präsentierten Beweises — eine Version des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to Y$ für allgemeine Banachräume Y benötigen, den wir hier nicht explizit bewiesen haben, der aber dennoch gilt, siehe [3, 10.2.10]. Bei diesem allgemeinen Fall wird allerdings das Restglied anders dargestellt, siehe auch Bemerkung 3.35 (ii).

Definition 3.31 (Taylorpolynom). *Sei $f : D \subseteq X$ k-mal total differenzierbar an $\mathbf{x} \in D$, so nennen wir die Funktion*

$$\tilde{T}_{k,\mathbf{x}} f : X \to \mathbb{R}, \ \mathbf{y} \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \mathrm{d}^j f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{y}-\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{y}-\mathbf{x}}_{j-mal})$$

[5] Dies bedeutet, dass die Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ in D enthalten ist.
[6] siehe beispielsweise [3, 1].

das **Taylorpolynom** *k-ter Ordnung (oder k-tes Taylorpolynom) von f an der Anschlussstelle* $\mathbf{x}$ *. Im Fall $X = \mathbb{R}^p$ nutzen wir die Darstellung wie in* (3.8)*.*

Alternativ kann man auch

$$T_{k,\mathbf{x}}f(\mathbf{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\mathrm{d}^j f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h},\ldots,\mathbf{h}}_{j-\mathrm{mal}})$$

als "Taylorpolynom" (in $\mathbf{h}$) definieren. Dies entspricht $\mathbf{h} \mapsto \tilde{T}_{k,\mathbf{x}}f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$, also

$$\tilde{T}_{k,\mathbf{x}}f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = T_{k,\mathbf{x}}f(\mathbf{h})$$

und ist gleich $f(\mathbf{x})$ für $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Wir wollen aber möglichst die Notation von Definition 3.31 verwenden — dann "approximiert $T_{k,\mathbf{x}}f$ die Funktion f in $\mathbf{x}$".

Beispiel 3.32. *Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ k-mal stetig partiell differenzierbar und $\mathbf{x} \in D$.*

(1) Für $p = 1$ gilt $\mathrm{d}^j f(x) = f^{(j)}(x)$ und damit stimmt das in Definition 3.31 definierte Taylorpolynom mit dem aus der Analysis I bekannten Begriff überein.

(2) Im Allgemeinen nimmt das k-te Taylorpolynom von f an $\mathbf{x}$ folgende Form an

- $k = 0$: $\tilde{T}_{0,\mathbf{x}}f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$ *(konstantes Polynom)*
- $k = 1$: $\tilde{T}_{1,\mathbf{x}}f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+\mathrm{d}f(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+\operatorname{grad} f(\mathbf{x})^T\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ *(lineares Polynom)*
- $k = 2$: $\tilde{T}_{2,\mathbf{x}}f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+\operatorname{grad} f(\mathbf{x})^T\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} D^iD^jf(\mathbf{x})(y_i-x_i)(y_j-x_j)$ *(quadratisches Polynom).*
  Mit der $p \times p$ Matrix $B := (D^iD^jf(\mathbf{x}))_{i,j\in\{1,..,p\}}$ lässt sich dies auch mit Hilfe der Matrix-Vektor Multiplikation schreiben,

$$\tilde{T}_{2,\mathbf{x}}f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})^T B(\mathbf{y}-\mathbf{x}). \tag{3.8}$$

Die Matrix B wird auch **Hesse-Matrix** *genannt.*

Definition 3.33 (Hesse-Matrix)**.** *Für eine im Punkt $\mathbf{x}$ zweimal partiell differenzierbare Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to Y$ nennt man die $p \times p$ Matrix mit Einträgen*

$$\big(D^iD^jf(\mathbf{x})\big)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x})\right)_{i,j} \in Y$$

für $i, j \in \{1, .., p\}$ die **Hesse-Matrix** $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ *von f an der Stelle $\mathbf{x}$.*

Unmittelbar aus dem Satz von Schwarz, Satz 3.25, folgt, dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist, falls f zweimal stetig differenzierbar ist. Wir werden in Kürze sehen, dass die Definitheit von $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ eine Rolle für die Bestimmungen von Extremwerten von f spielt. Davor wollen wir uns noch mit der Güte der Approximation einer Funktion durch Taylorpolynome beschäftigen. Man beachte in der folgenden Aussage, dass wir das $(k+1)$-te Taylorpolynom betrachten.

Satz 3.34 (Abschätzung des Restglieds)**.** *Sei $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}^p$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für das Restglied*

$$R_{k+1,f,\mathbf{x}}(\mathbf{h}) := f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - T_{k+1,\mathbf{x}}f(\mathbf{h}),$$

dass

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|R_{k+1,f,\mathbf{x}}(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|_X^{k+1}} = 0.$$

Beweis. Aus Satz 3.30 folgt, dass für $\mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{0})$ mit $B_\delta(\mathbf{0}) \subseteq D$ gilt, dass

$$R_{k+1,f,\mathbf{x}}(\mathbf{h}) = \frac{1}{(k+1)!}\left(\mathrm{d}^{k+1}f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h})\,\underbrace{(\mathbf{h},..,\mathbf{h})}_{(k+1)\text{-}mal} - \mathrm{d}^{k+1}f(\mathbf{x})\,\underbrace{(\mathbf{h},..,\mathbf{h})}_{(k+1)\text{-}mal}\right).$$

Daraus ergibt sich aufgrund der Definition der Abbildungsnorm in $L(X, L(X, ..., \mathbb{R}))$, dass

$$|R_{k+1,f,\mathbf{x}}(\mathbf{h})| \leq \frac{1}{(k+1)!}\left\|\mathrm{d}^{k+1}f(\mathbf{x}+\xi\mathbf{h}) - \mathrm{d}^{k+1}f(\mathbf{x})\right\|_{L(X,L(X,...,\mathbb{R}))} \|\mathbf{h}\|_X^{k+1}$$

und, wegen der $(k+1)$-maligen stetigen Differenzierbarkeit von f, damit die Behauptung. □

Bemerkung 3.35 (zum Taylorschen Lehrsatz). *(i) Der Taylorsche Lehrsatz ermöglicht die Approximation einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion durch ein Polynom (in mehreren Veränderlichen). Satz 3.34 gibt Aufschluss darüber, inwiefern die Fehlerterme von "höherer Ordnung sind".*

(ii) Es gibt weitere Möglichkeiten, das Restglied im Satz von Taylor darzustellen. Die hier präsentierten Formen werden auch **Lagrange Form** *(Satz 3.30) bzw.* **Peano Form** *(Satz 3.34) genannt. Beide beruhen auf der Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung im Satz von Taylor in einer Veränderlichen.*

(iii) In Satz 3.30 wurde der Taylorsche Lehrsatz nur für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ gezeigt. Dies liegt daran, dass im Beweis auf den entsprechenden Satz für Funktionen in einer Veränderlichen nach $\mathbb{R}$ verwiesen wurde. Es ist auch möglich, diesen für Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to Y$ für $Y = \mathbb{R}^m$ bzw. allgemeine Banachräume Y zu formulieren — allerdings mit einer adaptierten Darstellung des Restglieds, da in diesem Fall keine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung zur Verfügung steht (siehe auch den ersten Punkt dieser Bemerkung). Insbesondere behält Satz 3.34 seine Gültigkeit in allgemeineren Situationen. Dies und weitere Analysen verschiedener Restglieddarstellungen verweisen wir beispielsweise auf [3, Bemerkung 7.4.3].

Beispiel 3.36. *Für die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \mathrm{e}^x y^2 + \cos(y)\arctan(x)$$

ist das 2-te Taylorpolynom $T_{2,\mathbf{x}}f$ an der Anschlussstelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gegeben durch

$$T_{2,\mathbf{0}}f(x,y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} = x + y^2$$

Um dies einzusehen, bemerken wir zunächst, dass die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion existieren (an allen Punkten), da die Funktion Verknüpfung (beliebig oft) differenzierbarer Funktionen in x und y ist. Die partiellen Ableitungen sind auch stetig (siehe unten) und die Funktion damit zweimal stetig differenzierbar. Es ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$D^{(1,0)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x y^2 + \frac{\cos(y)}{1+x^2}, \quad D^{(0,1)}f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^x 2y - \sin(y)\arctan(x).$$

sowie

$$\begin{aligned} D^{(2,0)}f(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^x y^2 - \frac{2x\cos(y)}{(1+x^2)^2}, \\ D^{(1,1)}f(\mathbf{x}) &= \mathrm{e}^x 2y - \frac{\sin(y)}{1+x^2}, \\ D^{(0,2)}f(\mathbf{x}) &= 2\mathrm{e}^x - \cos(y)\arctan(x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $D^{(1,0)}f(\mathbf{0}) = 1$, $D^{(0,1)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(2,0)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(1,1)}f(\mathbf{0}) = 0$, $D^{(0,2)}f(\mathbf{0}) = 2$. Aus Satz 3.34 folgt, dass für den Fehler der Approximation gilt, dass $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|R_{2,f,\mathbf{x}}(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} = 0$ gilt.

3.3 Extremwerte

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, an welchen Stellen eine reellwertige Funktion f (lokal) maximal bzw. minimal ist.

Definition 3.37 (Extremwerte)**.** *Sei $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}$, wobei X ein metrischer Raum[7] und $D \subseteq X$ ist[8]. Dann hat f an $\mathbf{x} \in D$*

Vorlesung wurde was anders defi- ehe nachfolgende ung. Man beach- s die Kugel hier geschnitten wird.

- *ein* **lokales Maximum / lokales Minimum** $f(\mathbf{x})$*, falls*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall y \in D \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}) : \quad f(\mathbf{x}) \substack{\geq \\ \leq} f(\mathbf{y})$$

- *ein* **globales Maximum / globales Minimum** $f(\mathbf{x})$*, falls* $f(\mathbf{x}) \substack{\geq \\ \leq} f(\mathbf{y})$ *für alle* $\mathbf{y} \in D$*.*

Die Stelle $\mathbf{x}$ *heißt lokale/globale* **Extremstelle** *bzw.* **Minimal-/Maximalstelle***. Falls obige Ungleichungen strikt sind, spricht man von einem* **strikten lokalen/globalen Maximum** *bzw.* **strikten lokalen/globalen Minimum***.*

Bemerkung (nicht in Vorlesung gemacht): Man beachte, dass in der Literatur auch manchmal folgende Definition eines lokalen Maximum/Minimums $f(x)$ gegeben wird:

$$\exists \varepsilon > 0 : \left(B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subseteq D \ \wedge \ \forall y \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) : f(\mathbf{x}) \substack{\geq \\ \leq} f(\mathbf{y}) \right). \tag{3.9}$$

Dieser Begriff ist stärker als der in Definition 3.37. Dies kann man sich anhand des einfachen Beispiels $f : [-1,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ überlegen: Nach Definition 3.37 sind ± 1 lokale (und sogar globale) Maximalstellen. Allerdings ist keine der Kugeln $B_\varepsilon(\pm 1)$, $\varepsilon > 0$ im Definitionsbereich von f enthalten, weshalb (3.9) nicht für $x = \pm 1$ gilt. Siehe auch Beispiel 3.43.

Wichtig: Die beiden Begriffe sind äquivalent, falls D eine offene Menge ist.

Bereits für Funktionen in einer Veränderlichen war folgende notwendige Bedingung von Proposition 3.38 bei der Bestimmung von Extremstellen zentral (Man beachte, dass in den nachfolgenden Resultaten meist nur offene Mengen D betrachtet werden. Um eine Aussage für allgemeine Mengen D zu treffen, müssen meist weitere Untersuchungen gemacht werden, siehe Beispiel 3.43):

[7] In der Vorlesung wurde hier X als Banachraum vorausgesetzt.
[8] D ist hier nicht notwendigerweise als offen vorausgesetzt

Proposition 3.38 (Notwendige Bedingung Extremum). *Sei $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem lokalen Extremwert an $\mathbf{x} \in D$ und D offen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) Sei $v \in X$ und für jedes $\mathbf{y} \in D$ existiere die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{y})$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = 0$.

(ii) Falls f total differenzierbar ist, so ist $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in L(X, \mathbb{R})$.

(iii) Falls $X = \mathbb{R}^p$ und f partiell differenzierbar (auf D), so ist $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$.

Beweis. (i): Für $v = \mathbf{0}$ ist die Richtungsableitung nach Definition immer 0 und es ist nichts zu zeigen. Sei also $v \neq \mathbf{0}$ und sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq D$. Man betrachte die Abbildung

$$\Psi_v : (-\tfrac{\delta}{\|v\|}, \tfrac{\delta}{\|v\|}) \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(\mathbf{x} + tv),$$

die aufgrund der vorausgesetzten Existenz der Richtungsableitungen differenzierbar ist. Da f an $\mathbf{x}$ ein lokales Extremum hat, hat Ψ_v ein lokales Extremum an $t = 0$. Somit folgt mit Hilfe der Analysis I, dass $\Psi_v'(0) = 0$ ist und damit — nach Definition der Richtungsableitung — die Behauptung. Die Aussage *(ii)* ist nach Definition der partiellen Ableitung eine Spezialfall von *(i)*, und *(iii)* folgt unmittelbar aus *(i)* mit Hilfe von Satz 3.11. $\square$

Wir wollen nun auch eine hinreichende Bedingung für lokale Extrema formulieren und erinnern uns dazu an die aus der Analysis I bekannte <u>hinreichende</u> Bedingung mittels des Vorzeichens der zweiten Ableitung. Wie wir bereits mehrfach gesehen haben, ist im Fall von Funktionen in mehreren Veränderlichen die zweite (totale) Ableitung (an einer Stelle $\mathbf{x}$) keine Zahl, sondern eine Abbildung (siehe Bemerkung 3.23). Speziell sei an die Situation einer Abbildung $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ erinnert, in der sich $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x})$ mittels einer $p \times p$ Matrix darstellen lässt. Dies motiviert den folgenden Begriff.

Definition 3.39. *Sei $D \subseteq X$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar und $\mathbf{x} \in D$. Dann nennen wir das totale Differential $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$*

- **positiv definit**, *,falls ein $\kappa > 0$ existiert, so dass $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k\text{-mal}}) \geq \kappa \|\mathbf{h}\|^k$ für alle $\mathbf{h} \in X$,*
- **negativ definit**, *falls ein $\kappa > 0$ existiert, so dass $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k\text{-mal}}) \leq -\kappa \|\mathbf{h}\|^k$ für alle $\mathbf{h} \in X$,*
- **positiv semidefinit**, *falls $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k\text{-mal}}) \geq 0$ für alle $\mathbf{h} \in X$,*
- **negativ semidefinit**, *falls $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k\text{-mal}}) \leq 0$ für alle $\mathbf{h} \in X$.*

Man beachte, dass für $X = \mathbb{R}$ das Differential $\mathrm{d}^k f(x)$ $\substack{\text{positiv}\\\text{negativ}}$ definit genau dann ist, wenn $f^{(k)}(x) \gtrless 0$ ist.

Satz 3.40 (Hinreichende Bedinungen für lokale Extremstellen). *Sei $D \subseteq X$ offen und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in D$ und*

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathrm{d}^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \ldots, \mathrm{d}^{(k-1)} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \textit{und} \quad \mathrm{d}^k f(x) \neq \mathbf{0}.$$

Dann gilt

(1) Falls k gerade und $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ $\substack{\textit{positiv} \\ \textit{negativ}}$ *definit ist, dann ist $f(\mathbf{x})$ ein striktes lokales* $\substack{\textit{Minimum} \\ \textit{Maximum}}$ *von f.*

(2) Falls k ungerade oder $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ *indefinit ist, so ist $\mathbf{x}$ keine Extremstelle.*

(3) Falls $\mathbf{x}$ eine $\substack{\textit{Minimumsstelle} \\ \textit{Maximumsstelle}}$ *ist, dann ist k gerade und* $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ $\substack{\textit{positiv} \\ \textit{negativ}}$ *semidefinit.*

Beweis. Wir beweisen nur (1) und verweisen für (2) und (3) auf die Literatur [3, Satz 10.3.6]. Angenommen $k = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ ist positiv definit. Sei $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq D$. Damit ist für jedes $\mathbf{h} \in B_\delta(\mathbf{0})$ der Wert $f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ definiert und es ergibt sich mit der Notation des Restglieds 3.34, dass

fehlerhaftes Vor-
in Vorlesung

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \mathrm{d}^k f(\mathbf{x})(\underbrace{\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h}}_{k\text{-mal}}) + R_{k,\mathbf{x},f}(\mathbf{h}),$$

wobei die Voraussetzung erfüllt ist, dass $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$,...,$\mathrm{d}^{k-1} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist. Aus Satz 3.34 folgt unmittelbar, dass

achte hier den Un-
d zwischen κ und k

$$|R_{k,\mathbf{x},f}(\mathbf{h})| \leq \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{h}\|_X^k$$

für alle $\mathbf{h} \in B_{\delta'}(\mathbf{0})$ ist, falls wir $\delta' \in (0, \delta)$ hinreichend klein wählen. Somit folgt aus der Annahme, dass $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ positiv definit ist, dass

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) \geq \kappa \|\mathbf{h}\|_X^k - \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{h}\|_X^k = \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{h}\|_X^k.$$

Somit ist $\mathbf{x}$ eine lokale Minimalstelle. Da der letzte Term sogar strikt größer 0 für $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ist, ist $\mathbf{x}$ sogar eine strikte Minimalstelle. Der Fall, dass $\mathrm{d}^k f(\mathbf{x})$ negativ definit ist, folgt direkt, indem man $-f$ betrachtet. □

Es stellt sich nun die Frage, inwiefern die Bedingungen in Satz 3.40 in der Praxis nachprüfbar sind. Zumindest im Fall $k = 2$ und $X = \mathbb{R}^p$ lässt sich die Definitheit anhand von der Definitheit der Hesse-Matrix nachrechnen[9].

Proposition 3.41 (Definitheit der Hesse-Matrix)**.** *Sei $X = \mathbb{R}^p$ und $k = 2$ in der Situation von Satz 3.40. Dann gilt:*

$\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x})$ *ist genau dann* $\substack{\textit{positiv} \\ \textit{negativ} \\ \textit{positiv semi-} \\ \textit{negativ semi-}}$ *definit, falls die Matrix* $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ $\substack{\textit{positiv} \\ \textit{negativ} \\ \textit{positiv semi-} \\ \textit{negativ semi-}}$ *definit.*

Damit ist auch $\mathrm{d}^2 f(\mathbf{x})$ indefinite genau dann, wenn $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ indefinit ist.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass aus $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x}) > 0$ (im Sinne der positiven Definitheit für Matrizien; siehe unten) bereits die Existenz einer Konstanten $\kappa > 0$ folgt, so dass

$$\mathbf{h}^T \operatorname{Hess} f(\mathbf{x}) \mathbf{h} \geq \kappa \|\mathbf{h}\|^2 \tag{3.10}$$

für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^p$. Dies ist eine Konsequenz der Kompaktheit der abgeschlossenen Einheitskugel $K_1(\mathbf{0})$, und ähnlich zum Beweis über die Äquivalenz von Normen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen. Dazu definiere man die rechte Seite in (3.10) als $g(\mathbf{h})$ mit $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Die

[9] Hierbei sei aber auch erwähnt, dass für eine große Dimension p die Definitheit einer Matrix auch praktisch schwierig zu bestimmen ist.

Annahme besagt nun, dass $g(\mathbf{h}) > 0$ für alle $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ist. Da g stetig ist, folgt, dass g auf dem Rand von $K_1(\mathbf{0})$ — diese Menge ist kompakt — ein Minimum κ annimmt, welches aufgrund von $g(\mathbf{h}) > 0$ für $\mathbf{h} \neq 0$ auch positiv sein muss. Somit gilt $g(\mathbf{h}) \geq \kappa$ für alle $\mathbf{h}$ mit $\|\mathbf{h}\| = 1$. Nun folgt (3.10) sofort durch Betrachtung von $\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$, falls $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ ist. Der Fall $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ ist trivial. □

Erinnerung an die Lineare Algebra:

Eine symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ ist $\begin{array}{c}\text{positiv}\\ \text{negativ}\\ \text{positiv semi-}\\ \text{negativ semi-}\end{array}$ definit, falls $\mathbf{h}^T \cdot B \cdot \mathbf{h} \begin{array}{c}>\\ <\\ \geq\\ \leq\end{array} 0 \; \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass die Eigenwerte von B alle $\begin{array}{c}\text{positiv}\\ \text{negativ}\\ \text{größer gleich } 0\\ \text{kleiner gleich } 0\end{array}$ sind.

Entsprechend ist B indefinit, falls für es $\mathbf{h}, \tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^p$ existieren so dass $\mathbf{h}^T B\mathbf{h} > 0$ und $\tilde{\mathbf{h}}^T B\tilde{\mathbf{h}} < 0$. Ob eine Matrix positiv bzw. negativ definit ist, lässt anhand mehrerer Möglichkeiten feststellen:

(A) mit Hilfe von Determinanten, genauer gesagt, den *Hauptminoren* : Dazu bestimmt man die Determinanten
$$b_\ell = \det((B_{i,j})_{i,j=1,..,\ell}) \quad \text{für alle } \ell \in \{1, .., p\}.$$
Dann ist B positiv definit genau dann, wenn alle b_ℓ positiv sind. Andrerseits ist B negativ definit genau dann, wenn $b_1 < 0$ und die alle b_ℓ abwechselndes Vorzeichen haben. Beispielsweise hat die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
die Hauptminoren $b_1 = 1$ und $b_2 = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1$, und ist somit positiv definit.

(B) direkt mit Hilfe der *Bilinearform* $\mathbf{h}^T B\mathbf{h}$, die ein symmetrisches Polynom in den Variablen $h_1, h_2, \ldots, h_p$ ist. Zum Beispiel,
$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2 + 4h_1h_2 + 5h_2^2 = (h_1 + 2h_2)^2 + h_2^2 > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(C) mit Hilfe der Eigenwerte (siehe oben). Im Falle der in (A) und (B) betrachteten Matrix B sind dies die Lösungen der Gleichung $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$, also die Zahlen 1 und 5.

Korollar 3.42. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^p$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\mathbf{x} \in D$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) Falls f an $\mathbf{x}$ ein lokales Extremum hat, so ist $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

(2) Falls die Hesse-Matrix $\operatorname{Hess} f(\mathbf{x})$ $\begin{array}{c}\textit{positiv}\\ \textit{negativ}\end{array}$ *definit ist, dann hat f an $\mathbf{x}$ ein striktes lokales* $\begin{array}{c}\textit{Minimum}\\ \textit{Maximum}\end{array}$.

Beispiel 3.43. *Es sollen die Extremwerte der Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch*
$$f(x, y) = c - x^2 - y^2$$
auf verschiedenen Mengen D bestimmt werden. Die Funktion ist als Polynom auf $\mathbb{R}^2$ beliebig oft total differenzierbar und der Graph stellt offensichtlich ein nach unten geöffnetes Paraboloid dar, das in z-Richtung um c nach oben ($c > 0$) verschoben ist. Dass diese Funktion ein globales Maximum an der Stelle $(0, 0)$ mit $f(0, 0) = c$ hat, lässt sich mit Hilfe der gerade dargestellten Kriterien leicht

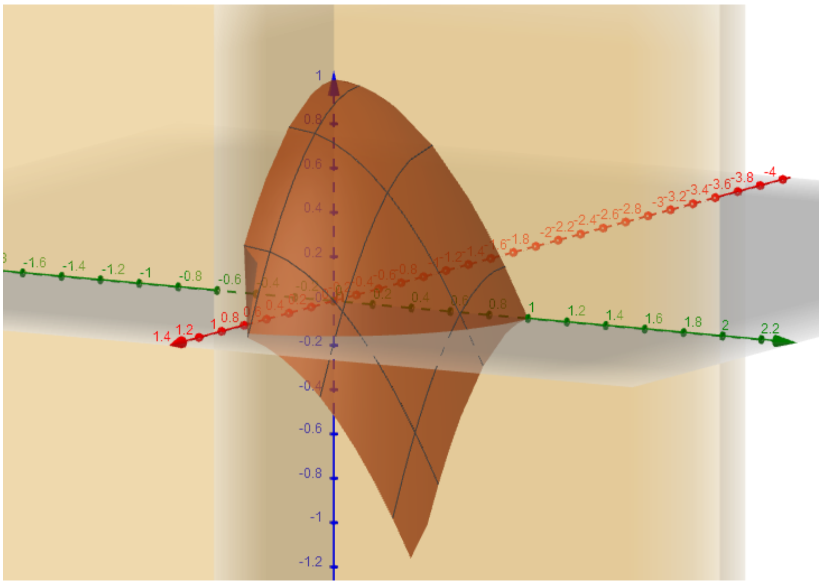

Abbildung 3.7: Das Viertelparabolid aus Beispiel 3.43.

nachweisen. Es ist $\operatorname{grad}(f) = (-2x, -2y)^T = (0,0)^T$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *und* $y = 0$ *ist. Für die Hesse-Matrix erhält man*

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

die negativ definit ist. Damit ist die aus der Anschauung gewonnene Vermutung belegt, dass f *in* $\mathbb{R}^2$ *einzig in* $(0,0)$ *ein globales Maximum besitzt. Für dieses gilt* $f(0,0) = c$ *besitzt.*

Wählt man hingegen $D = [0,1] \times [0,1]$*, so ist* D *kompakt und* f *nimmt als stetige Funktion auf* D *ein globales Maximum und ein globales Minimum an. Beide können jedoch nicht im Inneren von* D *liegen, wie die Überlegung grad*$(f) = (-2x, -2y)^T \neq (0,0)^T$ *für alle* $(x,y) \in D^\circ$ *zeigt. Somit müssen Maximum und Minimum auf dem Rand liegen. Dieser lässt sich in der Form*

$$\partial D = \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \in \{0,1\} \wedge y \in [0,1])\right\}}_{=:D_1} \cup \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \in \{0,1\} \wedge x \in [0,1])\right\}}_{=:D_2}$$

schreiben.

Es gilt

$$(x,y) \in D_1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} f(x,y) & = c - y^2 & x = 0 \\ f(x,y) & = c - 1 - y^2 & x = 1 \end{array} \right\}, \; (x,y) \in D_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} f(x,y) & = c - x^2 & y = 0 \\ f(x,y) & = c - 1 - x^2 & y = 1 \end{array} \right\}.$$

Für diese "eindimensionalen" Situationen sieht man sofort, dass f *maximal wird, wenn* $y = 0$ *wird (das Maximum ist* $\max\{c, c-1\} = c$*.) und minimal, wenn* $y = 1$ *wird (das Minimum ist* $\min\{c-1, c-2\} = c-2$*). Entsprechend ergibt sich für* $(x,y) \in D_2$ *das globale Maximum* c *und das globale Minimum* $c - 2$*. Also ist* $(0,0)$ *die Maximal- und* $(1,1)$ *die Minimalstelle von* f*.*

In Abbildung 3.7 ist f *für* $D = [0,1] \times [0,1]$ *dargestellt. Als Graph ergibt sich ein "Paraboloidviertel" über dem Quadrat* $[0,1] \times [0,1]$ *im ersten Quadranten (Darstellung für* $c = 1$*): Sein Aussehen zeigt sofort die Lage der Maximal- und Minimalstelle in den "Ecken"* $(0,0)$ *und* $(1,1)$ *von* D*.*

Bemerkung 3.44 (zur Bestimmung von Extremwerten)**.**

(i) Bevor man die Funktion mit Hilfe der diskutierten Hilfsmittel der Differentialrechnung untersucht, ist es ratsam, bereits im Vorhinein die Funktion an sich zu betrachten. Hierbei kann man meist bereits erste Schlüsse ziehen, die mitunter die spätere Berechnung vereinfachen können. Hierbei sei insbesondere erwähnt, dass man eventuell bereits die Existenz globaler Extrema sicher stellen kann (z.B. falls f *stetig auf einem Kompaktum ist).*

g: Man beachte angepasste Forg bzgl. des Zuhangs von globalokalen Extrema

(ii) Man beachte auch, dass obige hinreichende und notwendige Bedingungen im Allgemeinen nur für das Innere (also den offenen Teil des Definitionsbereiches der Funktion) anwendbar sind. Der Rand, sofern die Funktion nicht auf ganz $\mathbb{R}^p$ definiert ist, muss gesondert betrachtet werden, um globale Extrema zu bestimmen. Es sei betont, dass ein lokales Extremum kein globales Extremum sein muss und umgekehrt ein globales Extremum kein lokales Extremum sein muss, das im Inneren des Definitionsbereich liegt, siehe Beispiel 3.43.

(iii) Die hinreichenden Bedingungen in Satz 3.40, insbesondere wenn $k > 2$ ist, sind in der Praxis kaum anwendbar, weil die Bestimmung der Definitheit rechnerisch sehr aufwändig wird (Man denke an die Bestimmung der Eigenwerte bzw. ihrer Vorzeichen.). Daneben beachte man auch, dass selbst für Funktionen in einer Veränderlichen die hinreichende Bedingung des Satzes nicht notwendigerweise erfüllt sein müssen, wie das Beispiel der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

zeigt. Diese Funktion ist in $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und hat offensichtlich ein globales Minimum an $x = 0$. Andererseits lässt sich zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, womit der Satz nicht anwendbar ist.

3.4 Implizite Funktionen

Im folgenden ist das Ziel die Umformung von Gleichungen in mehreren Variablen,

$$f(x, y) = 0$$

nach x oder y. In den seltensten Fällen ist dies mit Hilfe einer geschlossenen Formel möglich. Andererseits genügt es in der Anwendung oftmals, dass man weiß, ob eine solche Gleichung einen *eindeutigen* Zusammenhang zwischen x und y beschreibt. Das nächste einfache Beispiel zeigt bereits, dass diese Eindeutigkeit nur lokal erwartet werden kann.

Beispiel 3.45. *Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Offenbar beschreibt die Gleichung*

$$f(x, y) = 0$$

die Menge aller Punkte M, die auf dem Einheitskreis liegen. Wir stellen nun die Frage, ob diese Gleichung nach der Variablen y auflösbar ist, d.h., ob es möglich ist, die Punkte M durch eine explizite Gleichung der Form

$$y = g(x)$$

zu schreiben, wobei $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine eindeutige Funktion ist. Anders ausgedrückt lautet die Frage also: "Können wir die Punkte, die $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen, als Graph einer Funktion darstellen?". Dazu können wir versuchen, die Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

geeignet äquivalent umzuformen. Dies führt offenbar zu

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Dies führt zur folgender Feststellung: Wir können unser Ziel, die Gleichung auf eindeutige Art und Weise nach y umzuformen, nicht erreichen, da für jeden Wert $x \in (-1, 1)$ jeweils zwei mögliche Werte für y in Frage kommen. Aber angenommen, wir wollen unser Ziel nur "lokal" erreichen, d.h. die Punkte aus M, die "nahe" eines festen Punktes $(x_0, y_0) \in M$ liegen, durch den Graphen einer Funktion g_{x_0,y_0} darzustellen, so gelingt dies für alle Punkte $(x_0, y_0) \in M \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$. Anders gesagt: Für Punkte $(x, y) \in M$, die "nahe" einem festen Punkt in $(x_0, y_0) \in M \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ liegen, gibt es eine Funktion $g = g_{x_0,y_0}$ so dass $y = g(x)$ ist. Diese Funktion ist, abhängig von (x_0, y_0) durch

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \textit{oder} \qquad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

auf einem Interval $(-\delta + x_0, x_0 + \delta)$ gegeben.
An den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ tritt folgendes Problem auf: Für jeden Punkte auf $(x, y) \in M$, der nahe einem dieser Punkte liegt, gilt, dass auch $(x, -y) \in M$ ist und somit ist y nicht eindeutig durch die x-Koordinate bestimmt. Dies ist genau der Grund, warum wir den Kreis in $\mathbb{R}^2$ auch nicht als Graphen einer Funktion in der x-y-Ebene auffassen können.

Das obige Beispiel ist sinnbildlich dafür, dass Gleichungen der Form $f(x, y) = 0$ im Allgemeinen nicht eindeutig und global durch eine Funktion zu $y = g(x)$ umgeformt werden können. Allerdings ist die lokale Auflösbarkeit (Für eine präzise Definition sei auf nachfolgenden Satz verwiesen.) in der Anwendung oft bereits eine wichtige Eigenschaft. Der folgende Satz ist *das* zentrale Ergebnis in diesem Zusammenhang. Er gibt Aufschluss darüber, unter welchen relativ allgemeinen Bedingungen an die Funktion f die lokale Auflösbarkeit möglich ist. Wichtig hierbei ist, dass der Satz eine Existenzaussage wiedergibt und im Allgemeinen keine Funktion g liefert, so dass $y = g(x)$ ist. Jedoch ist es möglich, Ableitungen der Funktion g ohne diese explizite Kenntnis zu bestimmen; man spricht dann auch vom *implizitem Differenzieren.*

Satz 3.46 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Seien $U_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ und $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und*

$$f : D_f = U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_f$ mit $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ und sei die Matrix

$$B := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial (y_1, \dots, y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

invertierbar. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) Die Funktion f **ist um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ "lokal eindeutig nach y aufösbar"***, d.h. es existiert $\varepsilon > 0$, so dass folgende Implikation für alle $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ gilt*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}.$$[10]

Dies ist gleichbedeutend damit, dass ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion

$$g : U = \{\mathbf{x} \in U_1 : \exists \mathbf{y} \in U_2 \text{ mit } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)\} \to \mathbb{R}^m$$

existieren, so dass für alle $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ gilt, dass $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{y} = g(\mathbf{x})$.

(2) Falls $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ invertierbar ist, so ist g an $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right]^{-1} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Damit kann die Kugel $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ in (1) so gewählt werden, dass g stetig differenzierbar ist.

Beweis. Seien im Folgenden alle betrachteten Kugeln in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^p$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm gewählt.

(I) Das Ziel des 1. Beweisschrittes ist es, mit Hilfe der Funktion f und der Matrix B eine Funktion Φ so zu konstruieren, dass sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes 1.84) erfüllt und damit die Existenz einer Funktion g sicherstellt, die die o.a. Bedingungen erfüllt. Hierzu bilden wir die Funktion Φ durch

$$(\Phi(h))(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - B^{-1} f(\mathbf{x}, h(\mathbf{x})),$$

die stetige Funktionen $h : D \subseteq U_1 \to U_2$ auf stetige Funktionen $\Phi(h) : D \subseteq U_1 \to \mathbb{R}^m$ abbildet. Das Ziel ist nun, die Abbildung Φ auf einen vollständigen metrischen Raum von Funktionen

[10]Man beachte, dass die Implikation " $\Longleftarrow$ " trivial ist.

$D_\Phi \subseteq U_2^D$ so einzuschränken, dass $\Phi|_{D_\Phi}$ eine kontraktive Selbstabbildung ist. Hierzu wählen wir $\rho > 0$ so, dass

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - B\right\| \leq \frac{1}{2\|B^{-1}\|} \quad \forall(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in B_\rho(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0), \tag{3.11}$$

was aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von f möglich ist. Damit wählen wir auch $\delta > 0$ so, dass

$$\|f(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\| \leq \frac{\rho}{4\|B^{-1}\|} \qquad \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

Wir setzen nun $D = B_\delta(\mathbf{x}_0)$ und definieren, wobei $h_{\mathbf{y}_0}$ gleich der konstanten Funktion $\mathbf{x}_0$ ist,

$$M = K_{\rho/2}^{C(D,\mathbb{R}^m)}(h_{\mathbf{y}_0}) = \{h \in C(D,\mathbb{R}^m) \colon |||h - h_{\mathbf{y}_0}||| = \sup_{\mathbf{x}\in D} \|h(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \leq \rho/2\}.$$

Es handelt sich hierbei um die abgeschlossene ρ-Kugel um die konstante Funktion $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_0$ im Banachraum $C(D,\mathbb{R}^m)$ der stetigen, beschränkten Abbildungen [11] von D nach $\mathbb{R}^m$ versehen mit der Norm

$$|||h||| := \sup_{\mathbf{x}\in D} \|h(\mathbf{x})\|_{\infty,\mathbb{R}^m}.$$

Wir zeigen nun, dass für alle $g, h \in M$ gilt:

(a) $|||\Phi(g) - \Phi(h)|||_\infty \leq L|||g - h|||_\infty$ mit $L < 1$ und, dass

(b) $\Phi(h) \in M$.

Aus der Definition von Φ ergibt sich mit Hilfe der Mittelwert-Ungleichung, Lemma 3.47, (angewandt auf die Funktion $F_\mathbf{x}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - B^{-1}f(\mathbf{x},\mathbf{z})$) und (3.11)

$$\begin{aligned}
||||\Phi(g) - \Phi(h)||| &= \sup_{\mathbf{x}\in D} \|\Phi(g)(\mathbf{x}) - \Phi(h)(\mathbf{x})\| \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in D} \left\|g(\mathbf{x}) - B^{-1}f(\mathbf{x},g(\mathbf{x})) - h(\mathbf{x}) + B^{-1}f(\mathbf{x},h(\mathbf{x}))\right\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \\
&\overset{MWU}{\leq} \sup_{\mathbf{x}\in D} \sup_{t\in[0,1]} \left\|I - B^{-1}\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}) + t(h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})))\right\| \|h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \\
&\leq \sup_{x\in D} \sup_{t\in[0,1]} \|B^{-1}\|\|B - \tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\underbrace{(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}) + t(h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})))}_{\in B_\rho(x_0,y_0)}\|\|h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \\
&\overset{(3.11)}{\leq} \|B^{-1}\|\frac{1}{2\|B^{-1}\|} \sup_{x\in D} \|h(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \\
&= \frac{1}{2}|||g - h|||.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Daraus folgt, dass Φ eine Kontraktion ist.
Um (b) zu zeigen, betrachte man $h \in M$ und erinnere sich an die Definition von Φ,

$$\begin{aligned}
|||\Phi(h) - h_{\mathbf{y}_0}||| &\leq |||\Phi(h) - \Phi(h_{\mathbf{y}_0})||| + |||\Phi(h_{\mathbf{y}_0}) - h_{\mathbf{y}_0}||| \\
&\overset{(3.13)}{\leq} \frac{1}{2}|||h - h_{\mathbf{y}_0}||| + |||B^{-1}f(\cdot,\mathbf{y}_0))||| \\
&\overset{(3.13)}{\leq} \frac{\rho}{4} + \sup_{\mathbf{x}\in D} \|B^{-1}f(\mathbf{x},\mathbf{y}_0))\|_{\infty,\mathbb{R}^m} \\
&\overset{(3.12)}{\leq} \frac{\rho}{4} + \|B^{-1}\|\frac{\rho}{4\|B^{-1}\|} = \frac{\rho}{2},
\end{aligned}$$

[11] Dieser Raum wurde mit der Notation $\mathcal{F}(D,\mathbb{R}^m)$ in der Aufgabe 2 (c) auf Blatt 2 betrachtet — dort wurde gezeigt, dass dieser vollständig ist, falls der Zielraum, hier $\mathbb{R}^m$, vollständig ist. Siehe auch Kapitel 4.

und damit $\Phi(h) \in D_\Phi$.
Da M als abgeschlossener Teilraum des vollständigen Raumes $C(D, \mathbb{R}^m)$ vollständig ist, erhalten wir mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes , Lemma 1.84, einen eindeutigen Fixpunkt $g \in D_\Phi$. Es gilt also, dass g stetig auf D ist und die folgende Gleichung löst:

$$g(\mathbf{x}) - B^{-1} f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \Phi(g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in D = B_\delta(\mathbf{x}_0).$$

Dies ist aber offensichtlich äquivalent zu $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in D = B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Wir setzen $B_\varepsilon(x_0, y_0) = D \times B_{\rho/2}(\mathbf{y}_0)$. Um die Eindeutigkeit einzusehen, sei $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B_\varepsilon(x_0, y_0)$ so, dass $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ ist. Das ist äquivalent dazu, dass $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung des Fixpunktproblems

$$\mathbf{y} - B^{-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

ist. Aber auch $g(\mathbf{x})$ ist eine Lösung. Für die zugehörige Fixpunktabbildung $\tilde{\Phi}_x = \mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} - B^{-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sieht man mit den selben Argumenten wie oben, dass auch $\tilde{\Phi}_x$ eine Kontraktion ist und damit die Eindeutigkeit des Fixpunktes nach dem Banachschen Fixpunktsatzes gewährleistet ist. Somit gilt $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

(II) Zeige die stetige Differenzierbarkeit von g (Mittelwertungleichung), siehe [2, 4].

□

Lemma 3.47 (Mittelwert-Ungleichung). *Sei $f : D \subseteq X \to Y$ stetig differenzierbar und $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{h} \in X$, so dass $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in D$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt*

$$\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})\| \leq \max_{t \in [0,1]} \|\mathrm{d}f(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\|_{L(X,Y)} \|\mathbf{h}\|_X$$

Beweis. Wir betrachten die folgende Funktion in einer Veränderlichen,

$$F : [0, 1] \to Y, t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{h}),$$

die nach der Voraussetzung auch stetig differenzierbar auf $[0, 1]$ ist. Mit Hilfe der Version des Hauptsatzes für Y-wertige Funktionen (siehe die abschließenden Bemerkungen in Kapitel 2 und der Dreiecksungleichung des Y-wertigen Integrals) gilt

$$\|f(x + h) - f(x)\| = \|F(1) - F(0)\|_Y = \left\| \int_0^1 F'(s) \mathrm{d}s \right\|_Y \leq \int_0^1 \|F'(s)\|_Y \, \mathrm{d}s \leq \max_{s \in [0,1]} \|F'(s)\|_Y .$$

Aus der Kettenregel folgt bekanntlich, dass $F'(s) = \mathrm{d}f(\mathbf{x} + s\mathbf{h})(\mathbf{h})$ für alle $s \in (0, 1)$ ist und somit folgt die Behauptung aus der Definition der Abbildungsnorm

$$\|F'(s)\|_Y = \|\mathrm{d}f(\mathbf{x} + s\mathbf{h})(\mathbf{h})\|_Y \leq \|\mathrm{d}f(\mathbf{x} + s\mathbf{h})\|_{L(X,Y)} \|\mathbf{h}\|_X.$$

□

Beispiel 3.48. *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z.$$

Wir zeigen, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ für genügend kleine x, y, z nach z aufgelöst werden kann und berechnen für die Lösungsfunktion $z = z(x, y)$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$.
Wir machen uns erst einmal klar, dass zu zeigen ist, dass eine Funktion $g(x, y)$ existiert (diese schreiben wir nun auch als $z(x, y)$), so dass wir $f(x, y, z) = 0$ äquivalent umformen können zu $z = g(x, y)$; dies soll wenigstens lokal für kleine x, y, z, also für x, y, z in einer genügend kleinen ε-Kugel gelten. Dazu denken wir an die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen — mit der Notation von Satz 3.46 galt folgende Rollenverteilung: "$\mathbf{y} = z$" und $\mathbf{x} = (x, y)$ — und fassen f als Funktion

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\textit{Variablen } x,y} \times \underbrace{\mathbb{R}^1}_{\textit{Variable } z} \to \mathbb{R}^1$$

auf. Wir überprüfen nun die Voraussetzungen des Satzes:

- $f(0,0,0)=0$, *(Ist es also erst einmal überhaupt sinnvoll, "kleine" x,y,z zu betrachten?);*
- *Die Funktion ist als Verknüpfung von stetig partiell differenzierbaren Funktionen, stetig partiell differenzierbar (und somit stetig differenzierbar);*
- $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=\cos(z)|_{z=0}=1\neq 0$. *Also ist* $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\in\mathbb{R}^{1\times 1}$ *"invertierbar"*[12]. *(Da f stetig differenzierbar ist, folgt auch, dass $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ um $(0,0,0)$ ungleich 0 ist).*

Der Satz besagt nun, dass ein $\varepsilon>0$ und eine eindeutige Funktion

$$g:\underbrace{U}_{=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\exists y,z\in\mathbb{R}\text{ mit }(x,y,z)\in B_\varepsilon(\mathbf{0})\}}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

existieren, so dass

$$\forall(x,y,z)\in B_\varepsilon(\mathbf{0})\subseteq\mathbb{R}^3:\qquad f(x,y,z)=0\iff z=z(x,y)=g(x,y).$$

Äquivalent kann dies auch so formuliert werden: Es existieren offene Mengen $U\subseteq\mathbb{R}^2$ und $V\subseteq\mathbb{R}$ mit $(0,0)\in U$ und $0\in V$ sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g:U\to V$, so dass

$$\forall(x,y,z)\in U\times V:\qquad f(x,y,z)=0\iff g(x,y)=z.$$

Die partiellen Ableitungen von g für jene $(x,y)\in U$ mit invertierbaren $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ werden "implizit" berechnet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)&=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))\\&=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)&=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))\\&=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}.\end{aligned}$$

Dies lässt sich kompakt so schreiben:

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(x,y)=-\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}}_{\in\mathbb{R}^{1\times 1}}\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))}_{\in\mathbb{R}^{1\times 2}}\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

(Im Allgemeinen ist dieses Produkt als Matrix-Matrix-Multiplikation von $\mathbb{R}^{m\times m}$- und $\mathbb{R}^{m\times p}$-Matrizen zu verstehen.). Da die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)&=3x^3+2\cos y\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)&=-2x\sin y\end{aligned}$$

sind, folgt, dass

$$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(x,y)=-\frac{1}{\cos g(x,y)}\left(3x^3+2\cos y,\quad -2x\sin y.\right)$$

Satz 3.49 (Umkehrsatz)**.** *Sei $f:D\subseteq\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und $\mathbf{a}\in D$. Wenn die Jacobi-Matrix an $\mathbf{a}$ invertierbar ist (d.h. eine Determinante ungleich 0 hat), so ist die Gleichung*

$$f(\mathbf{x})=\mathbf{y}$$

lokal um $\mathbf{y}=f(\mathbf{a})$ nach $\mathbf{x}$ auflösbar, d.h. es existieren offene Mengen $O\subseteq D$ und $V\subseteq\mathbb{R}^p$, so dass

[12] Vorsicht: Die Inverse ist also die "Inverse Matrix", was hier einfach der Kehrwert der Zahl ist.

(1) $\mathbf{a} \in O$, $f(\mathbf{a}) \in V$

(2) $f : O \to V$ *bijektiv ist mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung* $g : V \to O$.

Beweis. Idee: definiere $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$. Siehe Vorlesung. □

3.5 Extrema unter Nebenbedingungen

Im folgenden widmen wir uns wieder der Extremwertberechnung, diesmal aber auf speziellen Mengen, die durch eine Nebenbedingung der Form

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

wobei $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, beschrieben werden.

Beispiel 3.50.

(a) Sei $f(x, y) = x + y$ *definiert von* $\mathbb{R}^2$ *nach* $\mathbb{R}^2$ *und*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wir wollen die Funktion f *auf lokale bzw. globale Extrema auf dem Kreis* M *untersuchen. Dazu schreiben nutzen wir, dass* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *genau dann in* M *liegt, falls*

$$x \in [-1, 1] \ \wedge \ y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Somit sind die Extrema unter der Nebenbedingung gleich den Extrema der Funktionen

$$\tilde{f}_\pm : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Letztere Extremstellen lassen sich leicht mit Hilfe der bereits gesehenen Methoden errechnen. Dies zeigt, dass f *das Maximum* $\sqrt{2}$ *an* $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *annimmt und das Minimum* $-\sqrt{2}$ *an* $(x, y) = -(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *annimmt.*

(b) Wir wollen das Maximum und Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$$

auf dem Ellipsoid

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 = 1\}.$$

bestimmen. Auflösen der Gleichung, die S *definiert, nach* x^2 *und Einsetzen in die Funktion ergibt die Funktion*

$$\tilde{f}(y, z) = 1 + \frac{3}{4}y^2 + (z - 1)^2 - (\tfrac{z}{3})^2,$$

die wir nun auf

$$\tilde{S} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : \exists x \in \mathbb{R} \text{ mit } (x, y, z) \in S\} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 \leq 1\}$$

betrachten. Wegen des Einsetzens gilt, dass

$$\max_{(x,y,z) \in S} f(x, y, z) = \max_{(y,z) \in \tilde{S}} \tilde{f}(y, z),$$

wobei die Maxima existieren, weil beide Mengen S, $\tilde{S}$ *kompakt sind und* f *sowie* $\tilde{f}$ *stetig. Entsprechendes gilt für die Minima. Um die Extrema von* $\tilde{f}$ *zu bestimmen, betrachten wir das Innere von* $\tilde{S}$ *und den Rand* $\partial\tilde{S}$ *getrennt. Für das Innere* $\tilde{S}^\circ$ *können wir die kennengelernten*

Methoden der Differentialrechnung für die Bestimmung von möglichen lokalen Extremwerten verwenden. Da

$$\operatorname{grad}\tilde{f}(y,z) = \mathbf{0} \iff (\tfrac{3}{2}y, 2(z-1) - \tfrac{2}{9}z) = (0,0)$$

folgt, dass $(y,z) = (0, \frac{9}{8})$ *eine mögliche Extremstelle ist. Da* $(0, \frac{9}{8}) \in \tilde{D}$ *und wegen*

$$\operatorname{Hess}\tilde{f}(0, \tfrac{9}{8}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 2 - \frac{2}{9} \end{pmatrix} > 0 \quad (\textit{d.h. positiv definit}),$$

handelt es sich um eine lokale Minimalstelle mit Minimum $\tilde{f}(0, \frac{9}{8}) = \frac{7}{8}$*. Um die Extremwerte von* $\tilde{f}$ *auf dem Rand* $\partial\tilde{S}$ *zu bestimmen, überlegen wir uns zuerst wie dieser aussieht: Es ergibt sich, dass*

$$\partial\tilde{S} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 = 1\} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4(1 - (\tfrac{z}{3})^2)\}$$

ist. Damit können wir das Vorgehen wiederholen indem wir y^2 *in* $\tilde{f}(y,z)$ *ersetzen. Somit erhalten wir also eine weitere Funktion*

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = 1 + 3(1 - (\tfrac{z}{3})^2) + (z-1)^2 - (\tfrac{z}{3})^2 = \tfrac{7}{9}z^2 - 2z + 5,$$

die wir auf

$$\tilde{\tilde{S}} = \{z \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \text{ mit } y^2 = 4(1 - (\tfrac{z}{3})^2)\} = [-3,3]$$

betrachten. Für $\tilde{\tilde{f}}$ *könnten wir nun mit Analysis I die Extremwerte (von einer Funktion in einer Variablen) bestimmen. Alternativ kann man wie folgt argumentieren. Weil*

$$\tilde{\tilde{f}}(z) = (\tfrac{\sqrt{7}}{3}z - \tfrac{3}{\sqrt{7}})^2 + (5 - \tfrac{9}{7}) \geq 5 - \tfrac{9}{7},$$

mit Gleicheit genau dann wenn $z = \frac{3}{\sqrt{7}} \in [-3,3]$*, folgt dass,* $\tilde{\tilde{f}}$ *das globale Minimum* $5 - \frac{9}{7}$ *an der Stelle* $z = \frac{3}{\sqrt{7}}$ *annimmt. Es folgt aus der Monotonie der Quadratfunktion des Weiteren, dass*

$$\max_{z\in[-3,3]} \tilde{\tilde{f}}(z) = \max_{z\in\{-3,3\}} \tilde{\tilde{f}}(z) = \tilde{\tilde{f}}(-3) = 16.$$

Insgesamt ergeben sich also das Maximum und Minimum durch Vergleich der Ergebnisse für $\tilde{f}$ *(im Inneren von* $\tilde{S}$*) und* $\tilde{\tilde{f}}$*. Wir erhalten insgesamt also ein globales Maximum mit dem Wert* 16 *und ein globales Minimum mit dem Wert* $\frac{7}{8}$*. Die zugehörigen Stellen ergeben sich durch Einsetzen:*

$$(x,y,z) = (0,0,-3) \quad \textit{bzw.} \quad (x,y,z) = (\pm\sqrt{1 - (\frac{3}{8})^2}, 0, \frac{9}{8}).$$

Beispiel 3.50 zeigt, dass man in bestimmten Fällen die Nebenbedingung bezüglich derer das Extremum bestimmt werden kann “in die zu untersuchende Funktion eingesetzt” werden kann. Die resultierende Funktion ist klarerweise nunmehr von einer Variablen abhängig. Im Allgemeinen wird es sich aber schwierig erweisen, die Nebenbedingung explizit nach einer der auftretenden Veränderlichen aufzulösen (vgl. Satz über implizite Funktionen). Im Folgenden lernen wir einen Ausweg aus dieser Problematik kennen, der sich als sehr praktikabel erweist.

Satz 3.51 (Lagrange-Multiplikatoren)**.** *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}^p$ *offen und* $p > m$*. Sei* $x_0 \in D$ *und weiterhin*

- $f : D \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und*
- $g : D \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar, sowie*
- $g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ *und Rang* $\operatorname{rg}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ *gleich* m*.*

Falls nun f *eine lokale Extremstelle an* $\mathbf{x}_0$ *unter der Nebenbedingung* $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *besitzt, dann existiert ein* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *so, dass* $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ *eine kritischer Punkt der* **Lagrangefunktion** $\Lambda : D \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$*,*

$$\Lambda(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in D, \lambda \in \mathbb{R}^m,$$

ist, d.h. $\frac{\partial \Lambda}{\partial(\mathbf{x},\lambda)}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = 0$*.*

Beweis. Für den Beweis nehmen wir ohne Einschränkung an, dass die letzten m Spalten der Matrix $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ linear unabhängig sind. Wir können die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ demnach als Funktion

$$g : \mathbb{R}^{p-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \to g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

auffassen. Nach Voraussetzung ist $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0)$ invertierbar und somit der Satz über implizite Funktionen anwendbar, um $g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ lokal um $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}_2$ aufzulösen. Wir erhalten also ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : D_h \subseteq \mathbb{R}^{p-m} \to \mathbb{R}^m$ mit D_h offen, so dass

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \quad \iff \quad \mathbf{x}_2 = h(\mathbf{x}_1)$$

für alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Wir können nun auch $f(\mathbf{x})$ als $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ mit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ auffassen und betrachten $f(\mathbf{x}_1, h(\mathbf{x}_1))$. Da f und h stetig differenzierbar sind, ist auch

$$\tilde{f} : D_h \to \mathbb{R}, \mathbf{x}_1 \mapsto f(\mathbf{x}_1, h(\mathbf{x}_1))$$

stetig differenzierbar. Wegen der Voraussetzung ist $\mathbf{x}_0$ eine lokale Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Angenommen, $\mathbf{x}_0$ wäre eine lokale Minimalstelle, d.h.

$$\exists \delta > 0 : \ \forall \mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \{\mathbf{z} \colon g(\mathbf{z}) = \mathbf{0}\} \quad f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{y}).$$

Mit $\delta < \varepsilon$ folgt mit der Notation $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{0,2}) \in \mathbb{R}^{p-m} \times \mathbb{R}^m$, dass

$$\forall \mathbf{y}_1 \in B_\delta(\mathbf{x}_{0,1}) : \quad f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_{0,1}, h(\mathbf{x}_{0,1})) \leq f(\mathbf{y}_1, h(\mathbf{y}_1)),$$

also dass $\mathbf{x}_{0,1} \in \mathbb{R}^{p-m}$ eine lokale Minimalstelle von $\tilde{f}$ ist. Analog verläuft die Argumentation für Maximalstellen. Deshalb folgt aus den notwendigen Bedingungen lokaler Extrema, Proposition 3.38, und der Kettenregel, Proposition 3.19, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1}) \\
&= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{0,1}, h(\mathbf{x}_{0,1})) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{(p-m)} \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{(p-m)} \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1}) \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0), \ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0) \right] \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{(p-m)} \\ \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1}).
\end{aligned}$$

Der Term $\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_{0,1})$ ist nach dem Satz über implizite Funktionen gleich $-(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0))^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)$. Wir definieren den Spaltenvektor

$$\lambda_0 = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0) (\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0))^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times m}.$$

Damit folgt aus obiger Gleichung, dass

$$\mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0).$$

Weiterhin folgt direkt aus der Definition von λ_0 durch Multplizieren mit $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0)$, dass auch

$$\mathbf{0} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_0).$$

Somit gilt die Behauptung.

□

Beispiel 3.52.

(i) *Für die Extremstellensuche in Beispiel 3.50(a) ist die Lagrangefunktion gegeben durch*

$$\Lambda(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Weil $\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x, 2y) \neq (0,0)$ *für* $x^2 + y^2 = 1$ *und* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ *sind die Voraussetzungen für Satz 3.51 erfüllt. Da* f *entlang der Nebenbedingung ein Maximum und ein Minimum annehmen muss, siehe Argumentation in 3.50(a), müssen diese durch die Methode der Lagrange-Multplikatoren errechnet werden können. Somit ergibt sich für die Ableitung der Lagrangefunktion*

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(x,y,\lambda)}(x,y\lambda) = (1 + 2\lambda x, 1 + 2\lambda y, x^2 + y^2 - 1).$$

Man sieht leicht, dass $\frac{\partial\Lambda}{\partial(x,y,\lambda)}(x,y\lambda) = (0,0,0)$ *impliziert, dass* $x = y$ *und* $x^2 + y^2 = 1$*. Also erhalten wir dieselben Extremstellen wie in Beispiel 3.50(a).*

(ii) *Wir betrachten noch einmal Beispiel 3.50(b). Man betrachte hierfür die Lagrangefunktion*

$$\Lambda(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

wobei

$$g(x,y,z) = x^2 + (\tfrac{y}{2})^2 + (\tfrac{z}{3})^2 - 1$$

ist. Die Funktionen f *und* g *sind auf* $\mathbb{R}^3$ *stetig differenzierbar. Die Kandidaten für die Extremwerte ('kritischen Punkte') sind die Nullstellen der Jacobi-Matrix von* Λ*:*

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(x,y,z,\lambda)}(x,y,z,\lambda) = (2x(1+\lambda), 2y(1+\tfrac{1}{4}\lambda), 2(z-1) + \tfrac{2}{9}\lambda z, g(x,y,z)) = \mathbf{0}$$
$$\iff (x = 0 \vee \lambda = -1) \wedge (y = 0 \vee \lambda = -4) \wedge (z = \tfrac{9}{9+\lambda}) \wedge g(x,y,z) = 0$$

Außerdem ist $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) = (2x, \frac{y}{2}, \frac{2}{9}z)$ *ungleich* 0 *für alle* x,y,z *mit* $g(x,y,z) = 0$*. Das heißt, die Jacobi-Matrix von* g *hat an jeder Stelle entlang der Nebenbedingung den (maximalen) Rang gleich* 1*. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes 3.51 erfüllt. Um die obigen Gleichungen der kritischen Punkten aufzulösen, führe man eine Fallunterscheidung durch:*

(A) $\underline{x = y = 0}$*: Dann folgt aus* $g(x,y,z) = 0$*, dass* $z = \pm 3$ *und damit* $f(0,0,-3) = 16$ *bzw.* $f(0,0,3) = 4$*.*

(B) $\underline{x \neq 0}$*: Dann muss* $\lambda = -1$ *sein und somit auch* $y = 0$ *und* $z = \frac{9}{8}$*. Aus der Nebenbedingung folgt dann* $x^2 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$ *und damit* $f(x,y,z) = \frac{55}{64} + \frac{1}{64} = \frac{7}{8}$*.*

(C) $\underline{y \neq 0}$*: Dann muss* $\lambda = -4$ *sein und somit auch* $x = 0$ *und* $z = \frac{9}{5}$*. Aus der Nebenbedingung folgt dann* $y^2 = 4(1 - \frac{9}{25}) = \frac{64}{25}$ *und damit* $f(x,y,z) = \frac{64}{25} + \frac{16}{25} = \frac{16}{5}$*.*

Da die Funktion f *stetig ist und die Menge* $\{(x,y,z)\colon g(x,y,z) = 0\}$ *kompakt, muss ein globales Maximum und Minimum existieren. Da diese auch lokale Extremwerte sind, müssen diese unter obigen Kandidaten verteten sein. Daraus ergibt sich durch Vergleich der Werte, dass das Maximum der Funktion der Wert* 16 *ist (Dieser wird an* $(0,0,-3)$ *angenommen.). Das Minimum ist* $\frac{7}{8}$*.*
Man beachte, dass sich das Maximum und das Minimum auch ohne Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren finden lassen, siehe Blatt 14, Aufgabe 2.

Anhang A

Übungsaufgaben und ausgewählte Lösungen

Aufgabe 1 (Blatt 4, Aufgabe 2)**.** Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und die Menge

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig und beschränkt}^1\}$$

versehen mit der Abbildung gegeben durch

$$d_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to [0, \infty), (f, g) \mapsto \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

Zeigen Sie, dass

(1) $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ ein metrischer Raum ist, und, dass

(2) $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ genau dann vollständig ist wenn (Y, d_Y) vollständig ist.

Lösung: Zu (1): Dass $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ ein metrischer Raum ist, lässt sich leicht anhand der Definition nachrechnen — im Wesentlichen verwenden wir hier, dass für jedes feste $x \in X$ bereits d_Y eine Metrix auf Y ist und, dass das Supremum die Metrik-Eigenschaft erhält.

Zu (2): Angenommen, $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$ ist vollständig und sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y. Betrachte die Folge von konstanten Funktionen $f_n : X \to Y$ definiert durch $f_n(x) = y_n$ für alle $x \in X$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$d_{\mathcal{F}}(f_n, g_n) = d_Y(y_n, y_m), \quad n, m \in \mathbb{N}$$

auch eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$, die nach Voraussetzung konvergent gegen eine Funktion $f : X \to Y$ ist, also

$$\sup_{x\in X} d_Y(y_n, f(x)) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

woraus auch die punktweise Konvergenz $y_n \to f(x))$ in Y für $n \to \infty$ und jedes feste $x \in X$ folgt (aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts muss f konstant sein). Das bedeutet (y_n) konvergiert gegen einen Grenzwert in Y.
Sei Umgekehrt Y vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{F}$. Aufgrund der Definition der Metrik $d_{\mathcal{F}}$ folgt, dass für jedes $x \in X$ auch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y ist, welche nach Voraussetzung gegen einen Grenzwert $f(x)$ konvergiert. Wir zeigen nun, dass (f_n) sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ und beliebiges $x \in X$ gilt, dass

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

Da $f_m(x) \to f(x)$ für $m \to \infty$, folgt aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto d_Y(z, x)$, 1.10(iii), für festes $z \in Y$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \qquad \forall x \in X, n \geq N$$

Dies impliziert direkt, dass $\sup_{x\in Y} d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da ε beliebig war, folgt, dass f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Aus Satz 1.49 wissen wir, dass damit f auch stetig sein muss. Da jedes f_n beschränkt ist, gibt es ein $y_n \in Y$ und $r_n > 0$ mit $d_Y(f_n(x), y_n) < r_n$ für alle $x \in X$. Wegen

$$d_Y(f(x), y_n) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), y_n) < \varepsilon + r_n$$

für alle $x \in X$ und $n \geq N$ gilt somit auch, dass f beschränkt ist. Damit ist $f \in X$ und $f_n \to f$ in $d_{\mathcal{F}}$ für $n \to \infty$.

Anhang B

Klausur zum Selbsttest

Wichtige Hinweise:

- Die Klausurzeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausur ist auf die “Maximalpunktezahl” 100 ausgelegt: Somit haben Sie eine gewisse Freiheit in der Auswahl der Aufgaben.

Aufgabe	A	B	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	$\sum$	Note	
Max. Punkte	20	20	25	15	15	15	10	120		
Punkte										

Teil A

Aufgabe. (6+8+6=20 Punkte)
Geben Sie eine Definition folgender Begriffe:

(a) gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$
(wobei X, Y allgemeine metrische Räume sind)

(b) Die Richtungsableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) messbare Menge $M \subseteq \mathbb{R}^p$

(a) $f : X \to Y$ heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x, y \in X : \; (d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

(b) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$\frac{\partial f}{\partial v} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(\mathbf{x} + hv) - f(\mathbf{x}) \right)$$

die Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}$ in Richtung v (sofern der Grenzwert exisitiert).

(c) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^p$ heißt messbar, falls ein (abgeschlossener) Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^p$ existiert so dass $Q \supseteq M$ und die Funktion

$$1_M : Q \to \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus M \end{cases}$$

(Riemann) integrierbar ist.

Formulieren Sie (jeweils 4 Punkte)

(d) den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* (es genügt der Fall für stetige Funktionen)

(e) die *grundlegenden Eigenschaften* offener Mengen in metrischen Räumen

---

(d) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$$

eine Stammfunktion von f.

(e) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:

(i) Die Mengen $\emptyset$, X sind offen

(ii) $O_1, \ldots, O_n$ offen $\implies \bigcap_{i=1}^n O_i$ offen

(iii) O_i, $i \in I$ offen $\implies \bigcup_{i \in I} O_i$ offen

---

Geben Sie jeweils ein Beispiel (jeweils 2 Punkte)

(f) einer Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, die nicht uneigentlich Riemann integrierbar ist, aber so dass $f|_{[a,1]}$ Riemann integrierbar für jedes $a \in (0, 1)$.

(g) eines metrischen Raumes, dessen Metrik nicht durch eine Norm definiert ist.

(h) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die partiell differenzierbar, aber nicht total differenzierbar ist.

Sie müssen hierbei keine Beweise angeben.

(f) Sei $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$. Dann ist $\int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = -\ln \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in (0, 1)$, aber $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\mathrm{d}x = \infty$.

(g) Die Paris Metrik auf $\mathbb{R}^2$ oder die diskrete Metrik auf $\mathbb{R}$.

(h) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Teil B

Aufgabe. (10×2 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung notwendig!

1.	Wahr oder nicht wahr: *Alle Normen auf einem Vektorraum X sind äquivalent.*	**nicht wahr**
2.	$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \begin{pmatrix} \|(x,y)\|_1 \\ \hline \mathrm{e}^{\|(x,y)\|_\infty} + \sqrt{\|(x,y)\|_2} \end{pmatrix} =?$	$\begin{pmatrix} 2 \\ \hline \mathrm{e} + 2^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$
3.	$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x^2)}{x^2+y^2} =?$	0
4.	$\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x =?$	$\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}$
5.	Wahr oder nicht wahr: *Jede kompakte Menge abgeschlossen.*	**wahr**
6.	Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y$ für $x = 0$.	1
7.	Bestimmen Sie das Innere von $\cap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$	$\emptyset$
8.	Ist $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 10 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf $[0,1]\times[0,1]$ integrierbar?	**Ja**
9.	Hat die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto \cos(y)x^2\mathrm{e}^z$ ein globales Maximum?	**Nein**
10.	Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Ist die Funktion $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ stetig differenzierbar? Geben Sie das totale Differential an $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ an.	**Ja**, $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = A$

Teil C

Aufgabe 2. (25 Punkte) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf

(1) Stetigkeit (3 Punkte),
An der Stelle $(0,0)$ ist f stetig, da wegen (man beachte, dass $2xy^2 \leq x^2 + y^4$)

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| |xy| \leq \frac{1}{2}|xy|$$

gilt, dass $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. An allen anderen Stellen ist f stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen.

(2) Integrierbarkeit auf der Menge $[0,2] \times [0,2]$ (2 Punkte),
Die Funktion f ist auf dem Quader $[0,2] \times [0,2]$ stetig und deshalb integrierbar.

(3) stetige totale Differenzierbarkeit und totale Differenzierbarkeit (5 Punkte),
Wir berechnen die partiellen Ableitungen an den Stellen $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^7}{(x^2+y^4)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$$

und an der Stelle $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}(f(h,0) - f(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}(f(0,h) - f(0,0) = 0$$

Wir zeigen nun, dass $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ und $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ stetig sind: Wieder mit der Ungleichung $2xy^2 \leq x^2 + y^4$ erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{2xy^7}{(x^2+y^4)^2}\right| \leq \left|\frac{y^5}{x^2+y^4}\right| = |y| \left|\frac{y^4}{x^2+y^4}\right| \leq |y|$$

bzw.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{x^2y^2(3x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}\right| \leq |x| \left|\frac{|3x^2-y^4|}{x^2+y^4}\right| \leq |x| \frac{3x^2+3y^4}{x^2+y^4} = 3|x|$$

Und somit folgt die Stetigkeit der partiellen Ableitungen an $(0,0)$. An alle anderen Stellen sind die partiellen Ableitungen Verknüpfungen stetiger Funktionen. Somit ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig total differenzierbar.

(4) lokale und globale Extremwerte (3 Punkte), *Da f auf ganz $\mathbb{R}^2$ (genauer gesagt, f ist auf einer offenen Menge definiert) definiert ist, ist jede globale Extremstelle auch eine lokale Extremstelle. Eine notwendige Bedingung an eine lokale Extremstelle ist, dass die partiellen Ableitungen an dieser Stelle gleich 0 sind. Aus den obigen Berechnungen ergibt sich somit, dass dies nur der Fall sein kann wenn*

$$(x = 0 \vee y = 0) \wedge (x^2y^2(3x^2-y^4) = 0) \iff (x = 0 \vee y = 0).$$

Somit können Extremstellen nur entlang der Koordinatenachsen auftreten. Um zu überprüfen, ob die Funktion an diesen Stellen ein Maximum oder Minimum hat, beachten wir zuerst, dass der Funktionswert an diesen Stellen gleich 0 *ist. Offenbar nimmt die Funktion aber positive und negative Werte an (z.B.* $f(1,1)$ *und* $f(1,-1)$*), womit also keine globalen Extremwerte existieren können. Weiterhin gilt wegen*

$$f(x,y) = y\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

und $\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} > 0$*, für* $(x,y) \neq (0,0)$*, dass*

$$f(x,y) \geq 0 \iff y \geq 0.$$

Daraus folgt direkt, dass alle Punkte in $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$ *lokale Minimalstellen sind, alle Punkte* $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 0\}$ *lokale Maximalstellen sind und alle Punkte auf der* x*-Achse keine Extremstellen sein können. Da jede Kugel um einen Punkt auf einer Achse einen weiteren Punkt auf der Achse schneidet, kann es sich bei den Extrema um keine strikten Maxima- bzw. Minima handeln.*

(5) globale Extremwerte unter der Nebenbedingung $x^2 + y^4 = 1$ (4 Punkte).
Man beachte, dass es genügt, die globalen Extrema von

$$\tilde{f}(x,y) = x^2y^3$$

unter der Nebenbedingung zu betrachten. Sei $g(x,y) = x^2+y^4-1$*. Da* $\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x, 4y^3)$ *für alle* (x,y) *mit* $g(x,y) = 1$ *ungleich dem Nullvektor ist, hat* $\frac{\partial g}{\partial(x,y)}$ *Rang gleich* 1*. Außerdem ist die Menge* $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon g(x,y) = 0\}$ *kompakt, weshalb es in* M *globale Extremstellen geben muss. Diese müssen auch lokale Extremstellen sein* [1]*. Diese Extremstellen müssen Nullstellen des Gradienten von der Lagrangefunktion*

$$\Lambda(x,y,\lambda) = \tilde{f}(x,y) + \lambda g(x,y),$$

sein. Die Rechnung liefert, dass genau an den Punkten

$$(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}})$$

ein lokales Maximum angenommen, wohingegen genau an den Punkten

$$(\pm\frac{2}{\sqrt{7}}, -\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{1}{4}})$$

ein lokales Minimum angenommen wird mit den Funktionswerten

$$\text{Max} = \frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad \textit{bzw.} \qquad \text{Min} = -\frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{3}{4}}$$

Daneben sind die Punkte $(\pm 1, 0)$ *und* $(0, \pm 1)$ *Nullstellen des Gradienten der Lagrangefunktion, die aber keine Extremwerte liefern (die Funktionswerte sind alle gleich* 0*).*

[1] nach der Definition von lokalen Extremstellen für Aufgaben mit Nebenbedingungen, siehe Vorlesung vom 30.1.

Weiterhin behandeln Sie **eine** der beiden folgende Aufgaben (8 Punkte)

(6) Berechnen Sie das Integral $\int_{[0,2]\times[0,2]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$
Schreiben Sie das Integral mit Hilfe des Satzes von Fubini als Doppelintegral. Integrieren Sie zuerst nach y, dies ist leicht, da der Zähler bis auf einen Faktor die Ableitung des Nenners ist,

$$x^2 \int \frac{y^3}{x^2+y^4}\mathrm{d}y = \frac{x^2}{4}\ln(x^2+y^4) + C$$

Intergrieren Sie nun nach x indem Sie einmal partiell integrieren. Verwenden Sie dann die Erweiterung

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - 1$$

und nochmals den Umstand, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist (bis auf einen Faktor).

(7) (i) Untersuchen Sie, ob die Menge $f((-\infty,\infty)\times[-1,1])$ kompakt ist.(3 Punkte)

Man beachte, dass sich die Kompaktheit der Menge $M = f((-\infty,\infty)\times[-1,1])$ nicht aus der Stetigkeit folgern lässt, weil $(-\infty,\infty)\times[-1,1]$ nicht kompakt ist! Wir versuchen, die Menge M explizit zu bestimmen. Aus (4) wissen wir bereits, dass die lokalen Extremwerte von f gleich 0 sind und somit $f(M)$ die maximalen bzw. minimalen Werte nur auf dem Rand von $(-\infty,\infty)\times(1,1)$, d.h. auf $(-\infty,\infty)\times\{-1,1\}$ annehmen kann. Da $f(x,1) = -f(x,-1)$ genügt es also, den Wertebereich der Funktion $x \mapsto f(x,1)$ zu bestimmen. Dazu bestimmen wir das Supremum und das Infimum der Funktion

$$x \mapsto f(x,1) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Offensichtlich ist das Infimum (gleich dem Minimum) gleich 0 und das Supremum (das kein Maximum ist) gleich 1. Aus dem Zwischenwertsatz (Ana I) folgt, dass Bild von $\mapsto f(x,1)$ gleich der Menge $[0,1)$ sein muss. Wegen $f(x,1) = -f(x,-1)$ folgt, dass

$$M = f((-\infty,\infty)\times[-1,1]) = (-1,1).$$

Somit ist f nicht kompakt.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert (5 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x,n)\mathrm{d}x$$

Um den Grenzwert zu berechnen, argumentieren wir warum sich Integral und Limes vertauschen lassen. Dazu zeigen wir, dass die Funktionenfolge $f(\cdot,n)$ auf $[0,1]$ **gleichmäßig** *gegen die Nullfunktion konvergiert: Für alle $x \in [0,1]$ gilt, dass*

$$|f(x,n)| \leq \frac{1^2\cdot n^3}{0^2+n^4} = \frac{1}{n}$$

also $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f(x,n)| = 0$. Somit folgt, dass $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x,n)\mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 3. (15 Punkte) Berechnen Sie das Volumen eines American Footballs, der hier durch folgende Menge beschrieben wird:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \sqrt{x^2+y^2}\le 1-\frac{z^2}{4}\right\}$$

Lösung: Sei M die oben angegebene Menge. Wir formen die Ungleichung nach x um. Sei dazu $c_z = (1-\frac{z^2}{4})$

$$M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon -\underbrace{\sqrt{c_z^2-y^2}}_{=\phi(y,z)} \le x \le \sqrt{c_z^2-y^2}, (y,z)\in\tilde{M}\right\},$$
$$\tilde{M} = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2\colon c_z^2-y^2\ge 0\} = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2\colon -c_z\le y\le c_z, z\in[-2,2]\}.$$

Wir nutzen nun (die Folgerung des Satzes von) Fubini zweimal, um das Volumen zu berechnen:

$$\int_M 1\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\tilde{M}}\int_{-\phi(y,z)}^{\phi(y,z)} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}(y,z) = 2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z}\phi(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z}\sqrt{c_z^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Das innere Integral lässt sich mit Hilfe der Substitution $y = c_z\sin u$ und wegen

$$\int \cos^2(u)\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}(\sin(u)\cos(u)+u)+C$$

berechnen (letzteres folgt aus partieller Integration, siehe Vorlesung),

$$\begin{aligned}
2\int_{-2}^{2}\int_{-c_z}^{c_z}\sqrt{c_z^2-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= 2\int_{-2}^{2}c_z^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}z\\
&= \pi\int_{-2}^{2}c_z^2\mathrm{d}z\\
&= \pi\int_{-2}^{2}(1-\tfrac{z^2}{4})^2\mathrm{d}z\\
&= \pi\int_{-2}^{2}1-\tfrac{z^2}{2}+\tfrac{z^4}{16}\mathrm{d}z\\
&= \pi(4-\tfrac{8}{3}+\tfrac{4}{5}) = \tfrac{32}{15}\pi.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es ist nicht sinnvoll, die Ungleichung, die die Menge M definiert, nach z umzuformen, weil man dann eine Funktion mit "doppelter Wurzel" integrieren müsste.

Alternative Lösung: Mit Zylinderkoordinaten und dem Transformationssatz (siehe letzte Vorlesung): Hierfür betrachte man die Abbildung:

$$\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 : (r,\phi,h)^T\mapsto(r\cos\phi, r\sin\phi, h)^T$$

Die Einschränkung $\Phi|_{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}}$ ist ein Diffeomorphismus mit $|\det\frac{\partial\Phi}{\partial(r,\phi,h)}(r,\phi,h)| = r$ (dies folgt einfach aus dem Wissen, dass die Kugelkoordinaten einen Diffeomorphismus auf

$\mathbb{R}^2$ darstellen, siehe Vorlesung und dem Entwicklungssatz für Determinanten). Somit erhalten wir mit Hilfe des Transformationssatzes

$$\int_{\Phi(\Phi^{-1}(M))} 1 \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\Phi^{-1}(M)} 1 |\det \tfrac{\partial \Phi}{\partial(r,\phi,h)}(r,\phi,h)| \mathrm{d}(r,\phi,h) = \int_{\Phi^{-1}(M)} r \, \mathrm{d}(r,\phi,h).$$

Da $\Phi^{-1}(M) = \{(r,\phi,h) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq r \leq 1 - \frac{h^2}{4}, \phi \in [0,2\pi]\}$, erhalten wir also mit dem Satz (der Folgerung) von Fubini, dass

$$\int_{\Phi^{-1}(M)} r \, \mathrm{d}(r,\phi,h) = \int_{[0,2\pi]\times[-2,2]} \int_0^{1-\frac{z^2}{4}} r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}(\phi,h) = \frac{1}{2} \int_{[-2,2]} \int_{[0,2\pi]} (1 - \frac{h^2}{4})^2 \, \mathrm{d}\phi \mathrm{d}h.$$

Die restliche Rechnung ist identisch mit den letzten zwei Gleichungen in der ersten Variante.

Aufgabe 4 (15 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3y + x^2 - 1$$

definiert von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $T_{g,2}(x,y)$ an der Ansschlussstelle $(x,y) = (0,0)$. Was lässt sich über den Fehler

$$R = g - T_{g,2}$$

aussagen?

(2) Zeigen Sie, dass die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal um jeden Punkt $(x,y) = (a,b)$ nach y auflösbar ist. Gilt diese Aussage auch, wenn man g durch das Taylorpolynom aus dem ersten Aufgabenteil ersetzt?

Lösung: (1) Die partiellen Ableitungen von g sind

$$D^{(1,0)}g(x,y) = -\mathrm{e}^{y-x} + 2x,\ D^{(0,1)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3,$$

und die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$D^{(2,0)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 2,\ D^{(1,1)}g(x,y) = -\mathrm{e}^{y-x},\ D^{(0,2)}g(x,y) = \mathrm{e}^{y-x}.$$

Deshalb ist das Taylorpolynom gegeben durch

$$T_{g,2}(x,y) = \sum_{|\alpha|\leq 2} D^\alpha f(0,0)\frac{1}{\alpha!}x^{\alpha_1}y^{\alpha_2} = -x + 4y + \frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2.$$

(Das Taylorpolynom kann man auch direkt mit Hilfe der Potenzreihe der e*-Funktion ablesen.)*
Da g zweimal stetig differenzierbar ist, gilt für den Fehler $\lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{|R(h)|}{\|h\|_2^2} = 0$

(2) Da

$$D^{(0,1)}f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \mathrm{e}^{y-x} + 3 \neq 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und da g stetig differenzierbar ist, ist nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $g(x,y) = 0$ an jeder Stelle (a,b) mit $g(a,b)$ lokal nach y auflösbar, d.h. es existiert eine offene Kugel $B_\varepsilon((a,b))$ so dass für alle $(x,y),(x,\tilde{y}) \in B_\varepsilon((a,b))$ folgt, dass $y = \tilde{y}$.
Es gilt $\frac{\partial T_{g,2}}{\partial y}(x,y) = 4 - x + y = 0$ genau dann wenn $y + 4 = x$. Setzen wir dies in $T_{g,2}$ ein, so erhalten wir

$$3y - 4 + \frac{3}{2}(y^2 + 8y + 16) - (y+4)y + \frac{1}{2}y^2 = y^2 + 11y + 20 = 0$$

Die Nullstellen sind $y = \frac{-11\pm\sqrt{41}}{2}$. An den Stellen

$$(\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}, \frac{-11\pm\sqrt{41}}{2})$$

lässt sich der Satz über implizite Funktionen nicht anwenden (tatsächlich gilt, dass die Gleichung an dieser Stelle nicht nach y aufösbar ist.)

Aufgabe 5. (15 Punkte) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, wobei X kompakt sei. Zeigen Sie, dass eine bijektive und stetige Abbildung

$$f : X \to Y$$

eine stetige Inverse hat.

Lösung: Nach der Charakterisierung der Stetigkeit über abgeschlossene Mengen genügt es zu zeigen, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ folgt, dass das Urbild von A unter f^{-1} eine abgeschlossene Menge in Y ist [2]. Dieses Urbild ist aufgrund der Bijektivität gleich $f(A)$. Nun ist A kompakt, als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge X. Deshalb ist $f(A)$ kompakt, weil f stetig ist. Schließlich ist $f(A)$ abgeschlossen, weil jede kompakte Menge abgeschlossen ist.

Alternative: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y, die gegen $y \in Y$ konvergiert. Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem Folgenglied y_n ein Element $x_n \in X$ mit $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$ und genauso existiert $x \in X$ mit $f(x) = y$. Da X kompakt ist, folgt (aufgrund der Äquivalenz zu Folgenkompaktheit), dass jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat. Wir behaupten, dass die jeweiligen Grenzwerte dieser Teilfolgen von Teilfolgen gleich x sein müssen. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $z \neq x$. Dann würde, wegen der Stetigkeit von f, die Bildfolge $(f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z)$ konvergieren. Aufgrund der Bijektivität von f gilt dann aber $f(z) \neq f(x)$ was im Widerspruch zur Konvergenz der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ steht.
Wir haben also gezeigt, dass jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Teilfolge besitzt. Dies impliziert aber, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst konvergent gegen x sein muss[3]

[2] Beispiel 1.41

[3] (dies wurde in der Ana 1 für Folgen von reellen Zahlen gezeigt und überträgt sich direkt auf Folgen in metrischen Räumen mit Hilfe des Umstands, dass

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Aufgabe 6. (10 Punkte) Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ total differenzierbar an einer Stelle $\mathbf{x} \in D$ und seien die Richtungsableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für die Richtungen $v = (1,1)^T$ und $w = (0,-1)^T$ gegeben.

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{x}$ sowie die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{x})$$

in Richtung $\tilde{v} = (4,3)^T$.

Lösung: Da f total differenzierbar ist, ist

$$v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot v$$

eine lineare Abbildung. Wir stellen nun die benötigten Richtungsvektoren mit Hilfe von v und w dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v + w, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -w, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4(v+w) - 3w = 4v + w,$$

Somit erhalten wir für die Jacobi-Matrix und die gesuchte Richtungsableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial v}(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}), -\frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{x}) \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2+0 & -0 \\ 1+3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial f}{\partial \tilde{v}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \\ 4 \cdot 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Otto Forster, *Analysis 1*, Vieweg-Teubner Verlag, Wiesbaden, 10. Auflage, 2011.

[2] Otto Forster, *Analysis 2*, Vieweg-Teubner Verlag, Wiesbaden, 9. Auflage, 2011.

[3] Michael Kaltenbäck, *Fundament Analysis*, Heldermann-Verlag, Berlin, 2015, `https://www.asc.tuwien.ac.at/analysis/lehrveranstaltungen/michael-kaltenbaeck/`

[4] Michael Kaltenbäck, *Analysis II*, Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2012, `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/ANA_II_alt.pdf` zuletzt aufgerufen am 3.3.2019.

[5] Michael Kaltenbäck, *Analysis III*, Vorlesungsskript, Technische Universität Wien, 2011, `http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/skripten/ANA_III_alt.pdf` zuletzt aufgerufen am 17.3.2019.

[6] Hans von Mangoldt und Konrad Knopp, *Höhere Mathematik: eine Einführung für Studierende und zum Selbststudium. Band 2*, 16. Auflage, Differentialrechnung, unendliche Reihen, Elemente der Differentialgeometrie und der Funktionentheorie., S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1990.

[7] Dietmar A. Salamon, *Analysis II*, Vorlesungsskript, ETH Zürich, 2017. zuletzt aufgerufen am 3.3.2019, `https://people.math.ethz.ch/~salamon/`

[8] Thomas Schmidt, *Analysis*, Vorlesungsskript, Universtität Hamburg, 2016/17. zuletzt aufgerufen am 5.3.2019, `https://www.math.uni-hamburg.de/home/schmidt/lectures/ANA.pdf`

[9] Jürgen Voigt, *Mehrdimensionale Integration*, Vorlesungsskript, Technische Universtität Dresden, 2009. zuletzt aufgerufen am 5.3.2019, `http://www.math.tu-dresden.de/~voigt/mui/mui.html`

Index