

# Mathematik IV für Studierende der Physik

Sommersemester 2014

Christoph Schweigert

Universität Hamburg

Fachbereich Mathematik

Bereich Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 17.03.2015)

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Tensorprodukte und Differentialformen</b>	<b>1</b>
1.1	Tensorprodukte . . . . .	1
1.2	Differentialformen und der Stokessche Integralsatz . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Funktionentheorie</b>	<b>23</b>
2.1	Komplexe Differenzierbarkeit . . . . .	23
2.2	Potenzreihen . . . . .	30
2.3	Komplexe Kurvenintegrale . . . . .	39
2.4	Die Cauchysche Integralformel . . . . .	49
2.5	Laurentzerlegung . . . . .	56
2.6	Das Residuum und Berechnung von Integralen . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Funktionalanalysis</b>	<b>78</b>
3.1	Hilberträume und Banachräume . . . . .	78
3.2	Kompakte Operatoren . . . . .	93
3.3	Die Spektralsätze für beschränkte selbstadjungierte Operatoren . . . . .	107
3.4	Unbeschränkte Operatoren . . . . .	118
<b>A</b>	<b>Selbstadjungiertheit des freien Hamilton-Operators</b>	<b>133</b>

## Literatur:

Es gibt hinreichend viele gute Lehrbücher in deutscher und englischer Sprache. Hervorheben möchte ich:

- Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, Funktionentheorie. Vieweg Verlag
- Harro Heuser, Funktionalanalysis. Vieweg+Teubner Verlag.
- Otto Forster, Analysis 3. Vieweg Verlag.
- Konrad Königsberger, Analysis 2. Springer Verlag.
- Michael Reed and Barry Simon, Functional Analysis. Academic Press.

- Hans Triebel, Höhere Analysis. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Dirk Werner, Funktionalanalysis. Springer Verlag.

Dies sind Notizen zu einer Vorlesung im Sommersemester 2014. Sie beruhen auf erheblichen Vorarbeiten von Dr. Ernst Bönecke und Dr. Ralf Holtkamp. Ich danke den Herren Frederik Bartelmann, Alexander Okupnik, Dr. Marc Palm und Hauke Vogt für zahlreiche nützliche Hinweise zum Skript.

Eine ausführlichere Darstellung der Funktionentheorie findet man z.B. in meinem Skript, das auf meiner Homepage erhältlich ist. Die Notizen folgen zum Teil eng der angegebenen Lehrbuchliteratur und erheben keinen Anspruch auf Originalität.

Die aktuelle Version dieser Notizen ist unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/skripten/mfp4.pdf>

als pdf-Datei erhältlich.

Bitte senden Sie Kommentare und Korrekturen an [christoph.schweigert@uni-hamburg.de](mailto:christoph.schweigert@uni-hamburg.de)!

# 1 Tensorprodukte und Differentialformen

## 1.1 Tensorprodukte

Bevor wir Differentialformen studieren, wollen wir eine allgemein nützliche Begriffsbildung aus der linearen Algebra einführen.

### Definition 1.1.1

Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und seien  $V, W$  und  $X$  gegebene  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Dann ist eine  $\mathbb{K}$ -bilineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha : V \times W \rightarrow X ,$$

die in beiden Argumenten  $\mathbb{K}$ -linear ist, für die also  $\alpha(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda \alpha(v, w) + \lambda' \alpha(v', w)$  und  $\alpha(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda \alpha(v, w) + \lambda' \alpha(v, w')$  für alle  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$  und  $v, v' \in V, w, w' \in W$  gilt.

Offenbar ist dann für jede lineare Abbildung  $\phi : X \rightarrow X'$  auch die Abbildung  $\phi \circ \alpha : V \times W \rightarrow X'$  bilinear. Wir stellen uns die Frage, ob es für je zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V, W$  einen "universellen"  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V \otimes W$  mit einer "universellen" bilinearen Abbildung  $V \times W \rightarrow V \otimes W$  gibt, so dass *alle* anderen bilinearen Abbildungen  $V \times W \rightarrow Z$  durch lineare Abbildungen  $V \otimes W \rightarrow Z$  beschrieben werden können.

### Definition 1.1.2

Das Tensorprodukt zweier  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V, W$  ist ein Paar, bestehend aus einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V \otimes W$  und einer bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa : V \times W &\rightarrow V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned}$$

mit der folgenden universellen Eigenschaft: zu jeder bilinearen Abbildung

$$\alpha : V \times W \rightarrow X$$

gibt es genau eine lineare Abbildung  $\phi_\alpha : V \otimes W \rightarrow X$  mit

$$\alpha = \phi_\alpha \circ \kappa .$$

Wir drücken dies durch das folgende Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\kappa} & V \otimes W \\ & \searrow \alpha & \downarrow \exists! \phi_\alpha \\ & & X \end{array}$$

### Betrachtung 1.1.3.

1. Damit ist die Theorie bilinearer Abbildungen auf die Theorie linearer Abbildungen zurückgeführt.
2. Wir zeigen zunächst, dass das Tensorprodukt, wenn es denn existiert, bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig ist. Angenommen, es gäbe zwei Vektorräume  $V \otimes W$  und  $V \tilde{\otimes} W$  und zwei universelle bilineare Abbildungen

$$\kappa : V \times W \rightarrow V \otimes W \quad \tilde{\kappa} : V \times W \rightarrow V \tilde{\otimes} W .$$

Man benutzt die universelle Eigenschaft von  $\kappa$  und findet für die spezielle bilineare Abbildung  $\tilde{\kappa}$  eine eindeutige lineare Abbildung  $\phi_{\tilde{\kappa}} : V \otimes W \rightarrow V \tilde{\otimes} W$  mit  $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa = \tilde{\kappa}$ .

Durch Vertauschen der Rollen von  $\kappa$  und  $\tilde{\kappa}$  erhält man ebenso eine lineare Abbildung  $\phi_{\kappa} : V \tilde{\otimes} W \rightarrow V \otimes W$  mit  $\phi_{\kappa} \circ \tilde{\kappa} = \kappa$ . Wir finden

$$\begin{array}{ccc}
 & & V \otimes W \\
 & \nearrow \kappa & \downarrow \phi_{\tilde{\kappa}} \\
 V \times W & \xrightarrow{\tilde{\kappa}} & V \tilde{\otimes} W \\
 & \searrow \kappa & \downarrow \phi_{\kappa} \\
 & & V \otimes W
 \end{array}$$

Die Abbildungen  $\kappa = \text{id}_{V \otimes W} \circ \kappa$  und  $\phi_{\kappa} \circ \phi_{\tilde{\kappa}} \circ \kappa$  beschreiben die gleiche bilineare Abbildung  $V \times W \rightarrow V \otimes W$ . Wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft folgt  $\phi_{\kappa} \circ \phi_{\tilde{\kappa}} = \text{id}_{V \otimes W}$ . Durch Vertauschen der Rollen von  $\kappa$  und  $\tilde{\kappa}$  folgt analog  $\phi_{\tilde{\kappa}} \circ \phi_{\kappa} = \text{id}_{V \tilde{\otimes} W}$ .

3. Um die Existenz des Tensorprodukts zu zeigen, stellen wir erst die folgende Vorüberlegung an: sei  $M$  eine Menge und  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Wir suchen einen zu der Menge  $M$  gehörigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V(M)$ , so dass für einen beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  die Abbildungen von Mengen  $M \rightarrow X$  in Bijektion zu  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $V(M) \rightarrow X$  stehen:

$$\text{Lin}(V(M), X) \cong \text{Abb}(M, X) .$$

Sei dazu  $V(M)$  der Vektorraum derjenigen  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf der Menge  $M$ , die nur für endlich viele Element von  $M$  einen Wert ungleich Null annehmen. Offenbar bilden dann die Funktionen  $(\delta_m)_{m \in M}$  mit  $\delta_m(m') = \delta_{m,m'}$  eine Basis von  $V(M)$ . (Man beachte, dass nur endliche Linearkombinationen sinnvoll sind - deswegen auch die Endlichkeitsbedingung an die Funktionen in  $V(M)$ .)

Einer Abbildung  $\varphi : M \rightarrow X$  von Mengen ordnen wir nun die lineare Abbildung  $f : V(M) \rightarrow X$  zu mit  $f(\sum_{m \in M} \lambda_m \delta_m) := \sum_{m \in M} \lambda_m \delta_{\varphi(m)}$  mit  $\lambda_m \in \mathbb{K}$ . Umgekehrt ordnen wir einer linearen Abbildung  $f : V(M) \rightarrow X$  die Abbildung  $\varphi : M \rightarrow X$  von Mengen zu mit  $\varphi(m) := f(\delta_m)$ . Man zeigt leicht, dass diese Zuordnungen zueinander invers sind. Man nennt  $V(M)$  den von der Menge  $M$  frei erzeugten Vektorraum.

4. Um die Existenz des Tensorprodukts zu zeigen, wählen wir eine Basis  $\mathcal{B} := \{b_i\}_{i \in I}$  von  $V$  und  $\mathcal{B}' := \{b'_j\}_{j \in I'}$  von  $W$ . Da eine bilineare Abbildung  $\alpha : V \times W \rightarrow X$  durch ihre Werte auf allen Paaren  $(b_i, b'_j)$  von Basiselementen eindeutig festgelegt ist, betrachten wir die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha} : \mathcal{B} \times \mathcal{B}' &\rightarrow X \\
 (b_i, b'_j) &\mapsto \alpha(b_i, b'_j)
 \end{aligned}$$

Nach Punkt 3. entspricht dieser Abbildung eindeutig eine lineare Abbildung  $\phi_{\alpha} : V(\mathcal{B} \times \mathcal{B}') \rightarrow X$ .

Wir können also das Tensorprodukt  $V \otimes W$  beschreiben durch den Vektorraum  $V(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')$  derjenigen  $\mathbb{K}$ -wertigen Funktionen auf der Menge  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}'$ , die nur für endlich viele Elemente einen Wert ungleich Null annehmen.

Wir bezeichnen mit  $b_i \otimes b'_j$  die Funktion  $\delta_{(b_i, b'_j)}$ , die auf dem Paar  $(b_i, b'_j)$  den Wert Eins und sonst den Wert Null hat. Zusammen mit der bilinearen Abbildung

$$\begin{aligned}
 V \times W &\rightarrow V(\mathcal{B} \times \mathcal{B}') \\
 (b_i, b'_j) &\mapsto \delta_{(b_i, b'_j)} = b_i \otimes b'_j
 \end{aligned}$$

erfüllt der Vektorraum  $V(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')$  die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, denn der bilinearen Abbildung  $\alpha : V \times W \rightarrow X$  wird die eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\phi_\alpha : V \otimes W \rightarrow X$  mit  $\phi_\alpha(b_i \otimes b'_j) = \alpha(b_i, b'_j)$  zugeordnet.

- Insbesondere ist für endlich-dimensionale Vektorräume  $V, W$  die Dimension des Tensorprodukts gleich  $\dim_{\mathbb{K}} V \otimes W = \dim_{\mathbb{K}} V \cdot \dim_{\mathbb{K}} W$ .
- Die Elemente des Vektorraums  $V \otimes W$  heißen Tensoren, die Elemente der Form  $v \otimes w : \kappa(v, w)$  mit  $v \in V$  und  $w \in W$  Tensorprodukte oder reine Tensoren. Die Tensorprodukte erzeugen  $V \otimes W$ , aber nicht jedes Element von  $V \otimes W$  ist das Tensorprodukt eines Vektors  $v \in V$  und  $w \in W$ .

**Bemerkung 1.1.4.**

- Sind  $V, W$  reelle oder komplexe Vektorräume und tragen überdies die Struktur eines Hilbertraums, so ist das Tensorprodukt  $V \otimes W$  ein Skalarproduktraum mit einem Skalarprodukt, für das

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \cdot \langle w, w' \rangle \quad \text{für alle } v, v' \in V \quad \text{und } w, w' \in W$$

gilt, aber kein Hilbertraum. Man kann aber  $V \otimes W$  als metrischen Raum vervollständigen, indem man alle Cauchy-Folgen hinzunimmt und Cauchy-Folgen identifiziert, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Man zeigt dann, dass dieser Raum  $V \hat{\otimes} W$  eine natürliche Struktur eines Hilbertraum trägt. Warnung: er hat aber nicht mehr die universelle Eigenschaft eines Tensorprodukts. Die Tensorprodukttheorie von topologischen Vektorräumen ist deutlich komplizierter.

- Es gilt dann für Räume quadratintegrabler Funktionen  $L^2(\mathbb{R}^p) \hat{\otimes} L^2(\mathbb{R}^q) \cong L^2(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ .
- Wenn die Elemente der Hilberträume  $V$  und  $W$  Wellenfunktionen quantenmechanischer System beschreiben, so beschreiben Elemente des Hilbertraums  $V \hat{\otimes} W$  Wellenfunktion des gekoppelten Systems. Zum Beispiel beschreibt der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$  die Kopplung von Orts- und Spinfreiheitsgraden eines Teilchens mit Spin oder  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  die Kopplung zweier Spins. Tensorprodukte von Hilberträumen treten daher natürlich bei der Beschreibung von Systemen mehrerer Teilchen auf. (Bei identischen Teilchen muss man sich auf Unterräume einschränken, um die Bose- oder Fermi-Statistik des Teilchens zu berücksichtigen.)

Wir definieren nun das Tensorprodukt von zwei linearen Abbildungen.

**Betrachtung 1.1.5.**

Je zwei  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen

$$\phi : V \rightarrow V' \quad \psi : W \rightarrow W'$$

induzieren eine  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung der Tensorprodukte

$$\phi \otimes \psi : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$$

Dazu betrachten wir das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes} & V \otimes W \\ \phi \times \psi \downarrow & & \downarrow \exists! \phi \otimes \psi \\ V' \times W' & \xrightarrow{\otimes} & V' \otimes W' \end{array} \tag{1}$$

Da die Abbildung  $\otimes \circ (\phi \times \psi)$  offenbar bilinear ist, existiert nach der universellen Eigenschaft der Tensorprodukte die eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\phi \otimes \psi$ . Diese erfüllt also

$$(\phi \otimes \psi)(v \otimes w) = \phi(v) \otimes \psi(w) \quad \text{für } v \in V \text{ und } w \in W .$$

**Betrachtung 1.1.6.**

Wir wollen diese Strukturen nun auch in Koordinaten bezüglich Vektorraumbasen betrachten. Sei  $\mathbb{K}$  ein fester Körper.

1. Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$  eine geordnete Basis. Wir schreiben einen Vektor  $x \in V$  in dieser Basis als

$$x = \sum_{i=1}^n x^i e_i \quad \text{mit } x^i \in \mathbb{K} .$$

Man nennt manchmal einen Vektor  $x \in V$  einen kontravarianten Vektor in  $V$ .

2. Sei  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$  der Dualraum von  $V$ , also der Vektorraum der Linearformen auf  $V$ . Die zur Basis  $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$  duale Basis  $\mathcal{B}^{(V^*)} = (e^1, \dots, e^n)$  besteht aus den Linearformen  $e^i$  mit  $e^i(e_j) = \delta_j^i$ . Wir schreiben Linearformen, also Vektoren  $\beta \in V^*$  im Dualraum, als Linearkombination

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i e^i \quad \text{mit } \beta_i \in \mathbb{K} .$$

Man nennt manchmal dann auch  $\beta \in V^*$  einen kovarianten Vektor zu  $V$ .

3. Seien  $V, W$  endlich-dimensionale Vektorräume mit geordneten Basen  $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n)$  und  $\mathcal{B}^{(W)} = (e'_1, \dots, e'_m)$ . Eine lineare Abbildung  $A : V \rightarrow W$  beschreiben wir durch die Bilder der Basisvektoren

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a^i_j e'_i ;$$

$(a^i_j)$  ist die darstellende Matrix von  $A$ . Oft vereinbart man, dass über gleiche oben und unten stehende Indizes summiert werden muss, und lässt das Summenzeichen weg:  $Ae_j = a^i_j e'_i$ . Dies ist die Einsteinsche Summationskonvention, die in Differentialgeometrie und allgemeiner Relativitätstheorie häufig verwendet wird.

4. Seien  $V, V'$  und  $W, W'$  endlich-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $\phi : V \rightarrow V'$  und  $\psi : W \rightarrow W'$  lineare Abbildungen. Seien  $\mathcal{B}^{(V)} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B}^{(V')} = (e'_1, \dots, e'_m)$  sowie  $\mathcal{B}^{(W)} = (f_1, \dots, f_p), \mathcal{B}^{(W')} = (f'_1, \dots, f'_q)$  geordnete Basen. Dann sind die darstellenden Matrizen gegeben durch

$$\phi(e_i) = a^k_i e'_k \quad \text{und} \quad \psi(f_i) = b^k_i f'_k .$$

Dann folgt aus dem kommutierenden Diagramm (1) in Betrachtung 1.1.5

$$\phi \otimes \psi(e_i \otimes f_j) = a^k_i b^l_j e'_k \otimes f'_l$$

und folglich für einen allgemeinen Tensor  $x^{ij} e_i \otimes f_j \in V \otimes V'$

$$\phi \otimes \psi(x^{ij} e_i \otimes f_j) = x^{ij} a^k_i b^l_j e'_k \otimes f'_l .$$

Die Beschreibung von  $\phi \otimes \psi$  in Koordinaten ist also

$$\phi \otimes \psi : (x^{ij}) \mapsto (a^k_i b^l_j x^{ij}) .$$

Man sagt, “obere Indizes werden kovariant transformiert”.

**Bemerkungen 1.1.7.**

1. Aus der Bilinearität von  $\kappa$  folgt, dass auch das Tensorprodukt von Abbildungen bilinear ist:

$$\begin{aligned} (\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2) \otimes \psi &= \lambda_1\phi_1 \otimes \psi + \lambda_2\phi_2 \otimes \psi \\ \phi \otimes (\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2) &= \phi \otimes \lambda_1\psi_1 + \phi \otimes \lambda_2\psi_2 \end{aligned}$$

2. Ebenso folgt für Vektorräume die Verträglichkeit mit direkten Summen:

$$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \cong (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W),$$

und analog im anderen Argument.

3. Man hat kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} a_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) &\rightarrow (U \otimes V) \otimes W \\ u \otimes (v \otimes w) &\mapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man die  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $U \otimes (V \otimes W)$  und  $(U \otimes V) \otimes W$  identifizieren kann. Das Tensorprodukt ist dann assoziativ.

4. Die Skalarmultiplikation in  $V$  liefert kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \otimes V &\xrightarrow{\sim} V & V \otimes \mathbb{K} &\rightarrow V \\ \lambda \otimes v &\mapsto \lambda \cdot v & v \otimes \lambda &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

mit Umkehrabbildung  $v \mapsto 1 \otimes v$  bzw.  $v \mapsto v \otimes 1$ , mit deren Hilfe man den Grundkörper  $\mathbb{K}$  als Eins unter dem Tensorprodukt auffassen kann.

5. Man hat kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} c_{U,V} : U \otimes V &\rightarrow V \otimes U \\ u \otimes v &\mapsto v \otimes u, \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man die Faktoren vertauschen kann. Es gilt  $c_{V,U} \circ c_{U,V} = \text{id}_{U \otimes V}$ .

6. Benutzen wir das assoziative Tensorprodukt, so können wir jedem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  die Tensoralgebra

$$T(V) := V^{(0)} \oplus V^{(1)} \oplus V^{(2)} \oplus \dots,$$

mit  $V^{(0)} := \mathbb{K}$  und  $V^{(j)} := V \otimes \dots \otimes V$  mit  $j$  Faktoren, bilden. Durch das offenbare Produkt

$$\begin{aligned} V^{(j)} \times V^{(l)} &\rightarrow V^{(j+l)} \\ (v_1 \otimes \dots \otimes v_j, w_1 \otimes \dots \otimes w_l) &\mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_j \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_l \end{aligned}$$

wird dies zu einer (unendlich-dimensionalen,  $\mathbb{Z}_+$ -graduierten) assoziativen  $\mathbb{K}$ -Algebra. Die Tensoralgebra von Hilberträumen (und Unterräumen davon) tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von Systemen der Quantenstatistik auf, bei denen die Teilchenzahl nicht fest ist.

**Bemerkungen 1.1.8.**

1. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \otimes W^* &\rightarrow (V \otimes W)^* \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto (v \otimes w \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

2. Insbesondere können wir Bilinearformen auf  $V \times W$  mit Linearformen auf  $V \otimes W$ , also Elementen in  $(V \otimes W)^*$  identifizieren und somit durch Tensoren in  $V^* \otimes W^*$  beschreiben. In der Beschreibung durch Komponenten treten zwei untere "kovariante" Indizes auf.

Wir hatten den Maßtensor einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  kennengelernt. Sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  und  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Parametrisierung. Sei für  $u \in U$  das Bild  $p := \varphi(u) \in M$  und  $(\partial_1 \varphi, \dots, \partial_k \varphi)$  eine Basis des Tangentialraums  $T_p M$ . Dann liefert die Restriktion des euklidischen Skalarprodukts des umgebenden Raums  $\mathbb{R}^n$  auf  $T_p M$  eine (positiv definite) Bilinearform  $T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  und somit einen Tensor in  $(T_p M)^* \otimes (T_p M)^*$ .

3. Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \\ \alpha \otimes w &\mapsto (v \mapsto \alpha(v)w) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Insgesamt ermöglicht dies ein Kalkül für *endlich-dimensionale* Vektorräume, bei dem alle Homomorphismen – insbesondere multilineare Abbildungen und Multilinearformen – durch geeignete Tensoren beschrieben werden.

### Bemerkungen 1.1.9.

1. Hat man in allen Vektorräumen eine Basis gewählt, so kann man Tensoren durch ihre Koordinaten beschreiben:  $(x^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l})$  beschreibt einen Tensor in  $V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes W_1^* \otimes \dots \otimes W_l^*$ . Eine Basiswechselabbildung im  $\nu$ -ten Faktor  $V_\nu$

$$e'_i = t^j_i e_j$$

führt dann für den Tensor zu neuen Koordinaten  $(t^i_j x^{j \dots j \dots})$ . Für untere ("kovariante") Indizes ist entsprechend die zu  $t$  transponierte Matrix zu nehmen.

2. Auf dem Raum der Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist die Spur eine wichtige Linearform:

$$\begin{aligned} \text{tr} : \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \cong V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{K} \\ x^i_j e^j \otimes e_i &\mapsto x^i_j e^j(e_i) = \sum_i x^i_i = x^i_i \end{aligned}$$

Im Tensorkalkül setzt man also einen oberen und einen unteren Index gleich und summiert darüber. Diese Operation nennt man auch das Verjüngen eines Tensors. Auch ein Tensor mit mehr als einem oberen und unterem Index zum gleichen Vektorraum kann verjüngt werden; dies entspricht einer partiellen Spur.

## 1.2 Differentialformen und der Stokesche Integralsatz

Wir folgen [F3, §19-§21]. Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Bei der Einführung der Determinante haben wir *alternierende*  $k$ -(Multi-)Linearformen  $V^k \rightarrow \mathbb{K}$  kennengelernt.

### Definition 1.2.1

1. Eine alternierende  $k$ -Form auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\omega : V^k \rightarrow \mathbb{K},$$

die in jedem Argument linear ist also eine multilineare Abbildung ist, und die verschwindet, sobald wenigstens zwei Argumente gleich sind:

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0,$$

sobald es  $i, j$  mit  $i \neq j$  gibt, so dass  $v_i = v_j$ .



2. Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichnet man mit  $\Lambda^k V^*$  den Vektorraum aller alternierenden  $k$ -Formen  $V^k \rightarrow \mathbb{K}$ . Speziell setzt man  $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$ . Es ist  $\Lambda^1 V^* = V^*$ .

**Bemerkungen 1.2.2.**

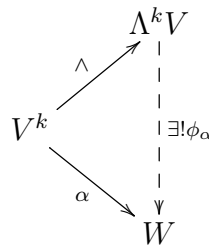
1. Eine alternierende Linearform kann durch eine lineare Abbildung  $V^{(k)} \rightarrow \mathbb{K}$  beschrieben werden.
2. Allgemeiner ist eine alternierende  $k$ -lineare Abbildung eine Abbildung

$$\alpha : V \times V \times \dots \times V \rightarrow W$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\alpha(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) .$$

3. Das  $k$ -fache äußere Produkt eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  ist ein Vektorraum  $\Lambda^k(V)$ , zusammen mit einer  $k$ -multilinearen alternierenden Abbildung  $\wedge : V \times \dots \times V \rightarrow \Lambda^k V$ , so dass es für jede  $k$ -lineare alternierende Abbildung  $\alpha : V^k \rightarrow W$  genau eine lineare Abbildung  $\phi_\alpha : \Lambda^k V \rightarrow W$  gibt, so dass das Diagramm



kommutiert. Durch diese universelle Eigenschaft ist  $\Lambda^k V$  bis auf eindeutige Isomorphie charakterisiert. Die Existenz des äußeren Produkts zeigt man, indem man den Vektorraum  $\Lambda^k V = T^{\otimes k} V / L$  mit  $L$  dem linearen Erzeugnis

$$L := \text{span} (v_1 \otimes \dots \otimes v_k - \text{sign}(\sigma)v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} \mid \sigma \in S_k, v_j \in V)$$

betrachtet.

4. Wir schreiben

$$\wedge(v_1, \dots, v_k) =: v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k \in \Lambda^k V .$$

Wir werden gleich diesen Ausdruck noch einmal anders für den Fall von Linearformen einführen, also für  $\Lambda^k V^*$ .

Da die Abbildung  $\wedge : V^k \rightarrow \Lambda^k V$  alternierend ist, gilt offenbar

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_k = \text{sign}(\sigma)v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(k)} .$$

5. Eine alternierende  $k$ -Form auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  kann als ein Element (eines Unterraums) des  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $(V^*)^{\otimes k}$  angesehen werden. Diese kann man natürlich als Elemente in der Komponente  $V^* \otimes \dots \otimes V^* \cong (V \otimes \dots \otimes V)^*$  der Tensoralgebra  $TV^*$  des Dualraums auffassen.

Allerdings ist das Produkt zweier alternierender  $k$ -Formen in der Tensoralgebra nicht mehr alternierend. Wir müssen daher für alternierende Formen ein anderes Produkt einführen.

**Definition 1.2.3**

Seien  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V^*$  Linearformen. Wir definieren das äußere Produkt oder Dachprodukt  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \Lambda^k V^*$  durch

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) := \det((\varphi_l(v_j))_{1 \leq l, j \leq k})$$

**Bemerkung 1.2.4.**

Man zeigt leicht: Ist  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  eine Basis von  $V^*$ , so bilden die Elemente  $\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}$  mit  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  eine Basis von  $\Lambda^k V^*$ .

Dazu betrachte eine zu  $(\varphi_i)$  duale Basis  $(e_i)_i$  von  $V$ . Man zeigt dann, dass eine beliebige alternierende Form  $\omega \in \Lambda^k V$  sich eindeutig schreiben lässt als

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} .$$

Es folgt  $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$  für  $0 \leq k \leq n$  und  $\dim_{\mathbb{K}} \Lambda^k V^* = 0$  für  $k > n$ .

**Satz 1.2.5.**

Es gibt genau eine bilineare Abbildung (genannt äußeres Produkt oder Dachprodukt)

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* &\rightarrow \Lambda^{k+l} V^* \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \omega \wedge \sigma, \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l) = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_l)$$

für alle 1-Formen  $\varphi_j, \psi_j \in V^*$ .

**Definition 1.2.6**

1. Wir definieren das äußere Produkt oder Dachprodukt von alternierenden Formen durch die Abbildung aus Satz 1.2.5. Speziell setzt man für  $a \in \mathbb{K} \cong \Lambda^0 V$ :  $a \wedge \omega = \omega \wedge a = a \cdot \omega$ .
2. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  nennt man die direkte Summe

$$\Lambda V = \bigoplus_{k=0}^{\dim V} \Lambda^k V$$

die äußere Algebra von  $V$ .

**Bemerkungen 1.2.7.**

1. Die Dimension der äußeren Algebra eines Vektorraums  $V$  der Dimension  $\dim_{\mathbb{K}} V = n$  ist

$$\dim_{\mathbb{K}} \Lambda V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n .$$

Insbesondere ist die äußere Algebra eines endlich-dimensionalen Vektorraums endlich-dimensional.

2. Unmittelbar aus der Definition folgt, dass das Dachprodukt assoziativ ist,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$$

für alle  $\omega_i \in \Lambda^{k_i}$  und alle Werte von  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ . Ferner ist das Dachprodukt alternierend: für  $\omega \in \Lambda^k V$  und  $\sigma \in \Lambda^l V$  gilt

$$\omega \wedge \sigma = (-1)^{kl} \sigma \wedge \omega . \quad (2)$$

3. Die äußere Algebra von Hilberträumen tritt in natürlicher Weise bei der Beschreibung von fermionischen Vielteilchensystemen auf.

**Betrachtung 1.2.8.**

- Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Bei der Einführung des Differentials hatten wir  $df$  als Abbildung

$$U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, p \mapsto df(p) = df_p$$

aufgefasst. Für jedes  $p \in U$  ist  $\mathbb{R}^n$  der Tangentialraum  $T_p U$  der  $n$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit  $U$ .

- Wir wollen im Folgenden die Tangentialräume  $T_p U$  für verschiedene  $p$  auseinanderhalten. Wenn wir die Vereinigung  $\sqcup_{p \in U} T_p U$  bilden, so sei diese stets disjunkt:

$$\bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigcup_{p \in U} \{p\} \times T_p U .$$

Man nennt den Dualraum  $T_p^* U := (T_p U)^*$  auch den Kotangentialraum von  $U$  in  $p$ . Ebenso betrachtet man wieder die disjunkte Vereinigung  $\sqcup_{p \in U} T_p^* U$ .

- Wir fassen jetzt das Differential  $df$  auf als Abbildung

$$U \rightarrow \sqcup_{p \in U} T_p^* U \quad \text{mit} \quad p \mapsto df(p) \in T_p^* U ,$$

wobei die Linearform  $df(p) \in T_p^* U$  auf einem Tangentialvektor  $v \in T_p U$  den Wert

$$df(p)(v) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot v_j$$

hat.

- Speziell betrachten wir für die Koordinatenfunktionen  $x_j$  jetzt die Differentiale  $dx_j : U \rightarrow \sqcup_{p \in U} T_p^* U$ . Sei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis von  $\mathbb{R}^n \cong T_p U$ ; es gilt

$$dx_j(e_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \delta_{k,i} = \delta_{i,j} .$$

Also ist für jedes  $p$  die Menge  $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$  die zur kanonischen Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $\mathbb{R}^n \cong T_p U$  duale Basis von  $T_p^* U \cong \mathbb{R}^n$ , und es gilt

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \cdot dx_j(p).$$

Im Sinne der folgenden Definition ist das totale Differential  $df$  von  $f$  eine Differentialform erster Ordnung.

**Definition 1.2.9**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Unter einer Differentialform der Ordnung  $k$  oder kurz einer  $k$ -Form auf  $U$  versteht man eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} \Lambda^k T_p^* U \text{ mit } \omega(p) \in \Lambda^k T_p^* U.$$

**Bemerkung 1.2.10.**

Nach Bemerkung 1.2.4 ist für jedes  $p \in U$  durch  $dx_{j_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{j_k}(p)$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$  eine Basis von  $\Lambda^k T_p^* U$  gegeben, und jede  $k$ -Form  $\omega$  auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  lässt sich also darstellen als

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k}(p) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizientenfunktionen  $f_{j_1 \dots j_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 1.2.11**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eine  $k$ -Form auf  $U$ .

1. Die Differentialform  $\omega$  heißt stetig differenzierbar (bzw. stetig, bzw.  $r$ -mal stetig differenzierbar), wenn alle  $\binom{n}{k}$  Koeffizientenfunktionen  $f_{j_1 \dots j_k}$  diese Eigenschaft haben.
2. Für eine stetig differenzierbare Differentialform  $\omega$  der Ordnung  $k$  definieren wir eine  $(k+1)$ -Form  $d\omega$ , die äußere Ableitung der Differentialform  $\omega$ , durch

$$d\omega := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} df_{j_1 \dots j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Natürlich lässt sich  $d\omega$  dann schreiben als Linearkombination der Basiselemente  $dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k+1}}$ : man schreibt

$$d\omega := \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \frac{\partial f_{j_1 \dots j_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

und ordnet die Indizes so um, dass sie strikt monoton wachsend angeordnet sind.

**Satz 1.2.12.**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge.

1. Seien  $\omega_1, \omega_2$  stetig differenzierbare  $k$ -Formen auf  $U$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2 .$$

2. Sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form und  $\eta$  eine stetig differenzierbare  $l$ -Form. Dann gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta .$$

3. Für jede zweimal stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  gilt  $d(d\omega) = 0$ .

**Beweis.**

1. Die erste Behauptung ist eine offensichtliche Folge der Differentiationsregeln für den Gradienten.
2. Die zweite Behauptung folgt aus der Produktregel für die Koeffizientenfunktionen und der gradierten Symmetrie (2) aus Bemerkung 1.2.7.1 : für

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I \quad \text{und} \quad \eta = \sum_{|J|=l} g_J dx_J$$

gilt

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} (g_J df_I + f_I dg_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (\sum_I df_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J g_J dx_J) + (-1)^k (\sum_I f_I \wedge dx_I) \wedge (\sum_J dg_J \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta . \end{aligned}$$

3. Die dritte Behauptung folgt aus der Symmetrie der Hesseschen Matrix:

$$d^2\omega = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} = 0 .$$

□

Wir führen weitere Notation ein:

**Definition 1.2.13**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge, wobei  $\mathbb{R}^n$  mit der Standard-Orientierung versehen ist.

1. Das vektorielle Linienelement ist das  $n$ -Tupel von 1-Formen  $d\vec{s} := (dx_1, \dots, dx_n)^T$  auf  $U$ .
2. Das vektorielle (Hyper-)Flächenelement ist das  $n$ -Tupel von  $(n - 1)$ -Formen,  $d\vec{S} := (dS_1, \dots, dS_n)^T$  auf  $U$  mit

$$dS_i := (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \overset{\text{auslassen}}{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n .$$

**Beispiele 1.2.14.**

Wir betrachten Differentialformen auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit der Standard-Orientierung. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Wir betrachten Differentialformen verschiedener Ordnung und ihre äußeren Ableitungen.

1. Eine stetig differenzierbare 0-Form auf  $U$  ist eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Ihr Differential  $df = \partial_1 f dx^1 + \dots \partial_n f dx^n = \langle \text{grad } f, d\vec{s} \rangle$  ist eine 1-Form.
2. Betrachte das Volumenelement  $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Jede stetig differenzierbare  $n$ -Form auf  $U$  ist von der Form  $c dV$  mit einer stetig differenzierbaren Koeffizientenfunktion  $c : U \rightarrow \mathbb{R}$ , und hat äußere Ableitung 0.

3. Sei  $\psi$  eine stetig differenzierbare  $(n-1)$ -Form. Schreiben wir mit einem Vektorfeld  $b$  und dem vektoriellen Hyperflächenelement  $d\vec{S}$ ,

$$\psi = \langle b, d\vec{S} \rangle = b_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - b_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} b_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} ,$$

so ist die äußere Ableitung die  $n$ -Form

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \dots + \partial_n b_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = (\operatorname{div} b) \cdot dV .$$

Konkret für  $n = 3$  sieht dies so aus: die 2-Form

$$\psi = \langle b, d\vec{S} \rangle = b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2$$

hat die äußere Ableitung

$$d\psi = (\partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 + \partial_3 b_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (\operatorname{div} b) \cdot dV .$$

4. Sei  $\varphi$  eine stetig differenzierbare 1-Form auf dem  $\mathbb{R}^3$ . Wir schreiben dann die 1-Form mit einem Vektorfeld  $a$  in der Form  $\varphi = \langle a, d\vec{S} \rangle$ , und rechnen nach, dass gilt:

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1) dx_1 \wedge dx_2 + (\partial_1 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_1) dx_1 \wedge dx_3 + (\partial_2 \varphi_3 - \partial_3 \varphi_2) dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \langle \operatorname{rota}, d\vec{S} \rangle \end{aligned}$$

mit dem vektoriellen Flächenelement  $d\vec{S} = (dx_2 \wedge dx_3, -dx_1 \wedge dx_3, dx_1 \wedge dx_2)^T$ .

Wir haben so die Differentialoperatoren Rotation, Divergenz und Gradient durch Differentialformen verstanden.

### **Definition 1.2.15**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

1. Eine stetig differenzierbare  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  heißt geschlossen, falls  $d\omega = 0$  gilt.
2. Für  $k \geq 1$  heißt eine stetige  $k$ -Form  $\omega$  auf  $U$  exakt, falls es eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form  $\eta$  auf  $U$  gibt, so dass  $\omega = d\eta$  gilt.

### **Lemma 1.2.16.**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Jede auf  $U$  stetig differenzierbare exakte  $k$ -Form ist geschlossen.

### **Beweis.**

Zu einer exakten  $k$ -Form  $\omega$  finden wir nach Definition 1.2.15 eine  $(k-1)$ -Form  $\eta$  mit  $\omega = d\eta$ . Dann gilt wegen Satz 1.2.12.3

$$d\omega = d^2\eta = 0 .$$

□

Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt sternförmig, wenn es einen Punkt  $x_0 \in U$  gibt, so dass für jeden Punkt  $x \in U$  die Verbindungsstrecke  $\overline{x_0 x}$  ganz in  $U$  liegt.

**Theorem 1.2.17.** [Lemma von Poincaré.]

Ist eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  sternförmig, so ist jede geschlossene  $k$ -Form auf  $U$  mit  $k \geq 1$  auch exakt.

**Beweis.**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x_0 = 0$ . Es reicht aus,  $k$ -Formen der Form

$$\omega = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

auf  $U$  zu betrachten. Hierzu definieren wir die  $(k-1)$ -Form

$$I(\omega) := \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 dt \cdot t^{k-1} f(tx) \right] x_{i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei die 1-Form  $dx_{i_\alpha}$  ausgelassen wird. Das Integral ist definiert, weil  $tx \in U$  liegt, da  $U$  sternförmig ist. Dann gilt

$$(*) \quad \omega = Id\omega + dI\omega.$$

Für eine geschlossene Form  $\omega$  folgt hieraus sofort  $\omega = dI\omega$ , so dass  $\omega$  exakt ist.

Die Gleichung  $(*)$  folgt durch direkte Rechnung: es gilt

$$\begin{aligned} dI\omega &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d \left[ \int_0^1 dt \cdot t^{k-1} f(tx) \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 dt \cdot t^{k-1} f(tx) \right] dx_{i_\alpha} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} x_{i_\alpha} d \left[ \int_0^1 dt \cdot t^{k-1} f(tx) \right] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + k \left[ \int_0^1 dt t^{k-1} f(tx) \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Wir schreiben das Integral im zweiten Summanden um:

$$\begin{aligned} k \int_0^1 dt t^{k-1} f(tx) &= t^k f(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 dt t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \\ &= f(x) - \int_0^1 dt t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \end{aligned}$$

und rechnen die Ableitung des Integrals im ersten Summanden aus:

$$d \left[ \int_0^1 dt \cdot t^{k-1} f(tx) \right] = \sum_{\beta=1}^n \left[ \int_0^1 dt t^k \partial_\beta f(tx) \right] dx_\beta$$

Damit finden wir insgesamt für den ersten Summanden in  $(*)$ :

$$\begin{aligned} dI\omega &= \sum_{\alpha=1}^k \sum_{\beta=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left[ \int_0^1 dt t^k \partial_\beta f(tx) \right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - \left[ \int_0^1 dt t^k \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(tx) x_\beta \right] dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Wir berechnen auch explizit den zweiten Summanden in  $(*)$ : wir finden

$$d\omega = \sum_{\beta=1}^n \partial_\beta f(x) dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und somit

$$\begin{aligned} Id\omega &= \sum_{\beta=1}^n \left[ \int_0^1 dt \cdot t^k \partial_\beta f(tx) \right] x_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^\alpha \left[ \int_0^1 dt \cdot t^k \partial_\beta f(tx) \right] x_{i_\alpha} dx_\beta \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Der Vergleich liefert nun  $(*)$ . □

**Bemerkung 1.2.18.**

Aus dem Poincaréschen Lemma, zusammen mit den Beispielen 1.2.14, folgt für jede sternförmige offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^3$ :

1. Ist  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit  $\operatorname{rota} = 0$ , so existiert eine stetig differenzierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a = \operatorname{grad} f$ .

Denn führe wie in Beispiel 1.2.14.4 eine 1-Form  $\varphi := \langle a, d\vec{s} \rangle$  ein; dann ist

$$d\varphi \stackrel{1.2.14.3}{=} \langle \operatorname{rota}, d\vec{S} \rangle = 0 .$$

Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.17 gibt es eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi = df \stackrel{1.2.14.1}{=} \langle \operatorname{grad} f, d\vec{s} \rangle$$

also  $a = \operatorname{grad} f$ .

Anwendung: in der Elektrostatik gilt für das elektrische Feld  $\operatorname{rot} E = 0$ . Daher gibt es eine skalare Funktion  $V$ , das elektrische Potential, mit  $-\operatorname{grad} V = E$ . Ein erster Ansatz ist daher, das elektrische Feld als 1-Form auf  $\mathbb{R}^3$  einzuführen.

2. Ist  $b : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit  $\operatorname{div} b = 0$ , so existiert ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $a : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $b = \operatorname{rota}$ .

Denn führe wie in Beispiel 1.2.14.3 eine 2-Form  $\psi := \langle b, d\vec{S} \rangle$  ein; dann ist nach 1.2.14.3 die äußere Ableitung  $d\psi = \operatorname{div} b dV = 0$ . Nach dem Poincaréschen Lemma 1.2.17 gibt es eine 1-Form  $\varphi$  mit  $\psi = d\varphi$ . Schreiben wir  $\varphi = \langle a, d\vec{s} \rangle$  mit einem Vektorfeld  $a$ , so folgt

$$\langle \operatorname{rota}, d\vec{S} \rangle \stackrel{1.2.14.4}{=} d\varphi = \psi = \langle b, d\vec{S} \rangle$$

und somit  $b = \operatorname{rota}$ .

Anwendung: für das magnetische Feld gilt  $\operatorname{div} B = 0$ ; also existiert ein Vektorfeld  $A$ , das Vektorpotential, so dass  $B = \operatorname{rot} A$ . Ein erster Ansatz ist daher, das magnetische Feld als 2-Form auf  $\mathbb{R}^3$  einzuführen.

**Definition 1.2.19**

Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen, sei

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} f_{j_1 \dots j_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

eine  $k$ -Form auf  $U$  und  $\varphi : V \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann ist

$$\varphi^* \omega := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (f_{j_1 \dots j_k} \circ \varphi) d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_k} .$$

eine  $k$ -Form auf  $V$ , der Rücktransport oder Pullback  $\varphi^* \omega$ .

Wir halten ohne Beweis die wichtigsten Eigenschaften des Rücktransports fest:

**Satz 1.2.20.**

1. Der Rücktransport  $\varphi^*$  ist linear: für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $\omega_1, \omega_2$   $k$ -Formen gilt

$$\varphi^*(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \varphi^*(\omega_1) + \lambda_2 \varphi^*(\omega_2) .$$



2. Der Rücktransport ist verträglich mit dem Dachprodukt,

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\eta) .$$

3. Der Rücktransport ist verträglich mit der äußeren Ableitung: ist  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $k$ -Form, so gilt

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) .$$

4. Ist weiterhin  $W \subseteq \mathbb{R}^p$  offen,  $\psi : W \rightarrow V$  stetig differenzierbar, so ist

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega) .$$

Wir brauchen explizitere Formeln für den Rücktransport.

### Beispiele 1.2.21.

Seien  $V \subset \mathbb{R}^m$  und  $U \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen,  $\varphi : V \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Abbildung. Die Differentiale der Koeffizientenfunktionen  $\varphi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  liefern 1-Formen

$$d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} dt_j .$$

1. Für den Rücktransport einer 1-Form  $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$  auf  $U$  finden wir deshalb

$$\varphi^*\omega = \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) d\varphi_i = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n (f_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j} \right) dt_j$$

2. Sei  $k = m$ , so dass die zurückgezogene Form höchst möglichen Grad hat. Da Differentialformen alternierend sind, folgt

$$d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k .$$

Es folgt für den Rücktransport einer  $m$ -Form auf  $\mathbb{R}^n$  zu einer  $m$ -Form auf  $\mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ \varphi^*\omega &= \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k . \end{aligned}$$

3. Insbesondere gilt im Fall  $m = k = n$  für  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\varphi^*\omega = f \circ \varphi (\det d\varphi) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n . \quad (3)$$

Formen von höchst möglichem Grad transformieren sich also mit der Determinante.

### Definition 1.2.22

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Eine  $n$ -Form

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

auf  $U$  heißt über  $A \subseteq U$  integrierbar, wenn die Koeffizientenfunktion  $f$  über  $A$  im üblichen Lebesgueschen Sinne integrierbar ist. Dann setzt man

$$\int_A \omega := \int_A f(x) d^n x .$$

Insbesondere existiert für jede stetige  $n$ -Form das Integral über jedes Kompaktum  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.2.23**

Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Gilt für alle  $x \in U$ , dass  $\det((d\varphi)_x) > 0$ , so heißt der Diffeomorphismus  $\varphi$  orientierungserhaltend; andernfalls heißt er orientierungsumkehrend.

**Satz 1.2.24.**

Seien  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  ein Diffeomorphismus. Sei  $U$  zusammenhängend; dann ist  $\varphi$  entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend. Sei

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

eine stetige  $n$ -Form auf  $V$ . Ist  $\varphi$  orientierungserhaltend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \varphi^* \omega ;$$

ist  $\varphi$  orientierungsumkehrend, so gilt

$$\int_{\varphi(A)} \omega = - \int_A \varphi^* \omega .$$

**Beweis.**

Das folgt sofort aus dem Transformationsverhalten (3) von Differentialformen in Beispiel 1.2.21 und dem Transformationssatz für Integrale. □

**Definition 1.2.25**

Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

1. Unter einem Atlas  $\mathfrak{A}$  für  $M$  versteht man eine Menge  $\{\varphi_j : T_j \rightarrow V_j : j \in J\}$  von Karten von  $M$ , deren Bilder  $M$  überdecken, also  $\bigcup_j V_j = M$ .
2. Lässt sich für  $M$  ein Atlas  $\mathfrak{A}$  finden, so dass für je zwei sich schneidende Karten aus  $\mathfrak{A}$  der zugehörige Kartenwechsel-Diffeomorphismus  $\tau$  orientierungserhaltend ist, so nennt man die Untermannigfaltigkeit  $M$  orientierbar. (Orientierbarkeit ist eine Eigenschaft.)
3. Ist  $M$  versehen mit einem solchen Atlas, so nennen wir  $(M, \mathfrak{A})$  eine durch den Atlas  $\mathfrak{A}$  orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. (Die Wahl einer Orientierung ist eine Struktur.)
4. Alle weiteren Karten von  $M$ , die wir einem Atlas  $\mathfrak{A}$ , der eine Orientierung definiert, hinzufügen können, so dass der Atlas immer noch eine Orientierung definiert, nennen wir positiv orientiert; alle anderen Karten negativ orientiert.

Man kann eine Orientierung einer Untermannigfaltigkeit  $M$  als Äquivalenzklasse von Atlanten verstehen. Wenn  $M$  zusammenhängend ist, so gilt: entweder ist  $M$  nicht orientierbar, oder es existieren genau zwei Orientierungen: zu jeder Orientierung  $\mathfrak{A}$  gibt es auch noch die entgegengesetzte Orientierung  $-\mathfrak{A}$ .

**Definition 1.2.26**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega$  eine stetige  $k$ -Form auf  $U$ . Sei  $(M, \mathfrak{A})$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit  $M \subseteq U$ . Sei  $A$  eine kompakte Teilmenge der Untermannigfaltigkeit  $M$ .

Es soll das Integral von der  $k$ -Form  $\omega$  über  $(M, \mathfrak{A})$  erklärt werden. Man beachte, dass der Grad der Form gleich der Dimension der Untermannigfaltigkeit ist.

- In dem Fall, in dem es eine einzige Karte  $\varphi : T \xrightarrow{\sim} V \subseteq M$  gibt mit  $A \subseteq V$ , setzt man

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega .$$

Aus Satz 1.2.24 folgt, dass dies unabhängig von der gewählten Karte  $\varphi$  ist.

- Es gebe nun endlich viele bezüglich  $\mathfrak{A}$  positiv orientierte Karten

$$\varphi_j : T_j \xrightarrow{\sim} V_j \subset M, \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{mit}$$

$$A \subset \bigcup_j V_j,$$

mit einer der Überdeckung  $(V_j)_j$  untergeordneten lokal-integrierbaren stetigen Teilung der Eins

$$\alpha_j : \bigcup_l V_l \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, m,$$

Wir setzen

$$A_j := A \cap \text{supp}(\alpha_j) \subset V_j .$$

und nennen die  $k$ -Form  $\omega$  integrierbar über  $A$ , falls  $\omega$  über alle  $A_j$  im Sinne der vorgehenden Betrachtung integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{(A, \mathfrak{A})} \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j^{-1}(A_j)} (\alpha_j \circ \varphi_j) \cdot (\varphi_j^* \omega) .$$

Man zeigt wie beim Beweis des klassischen Satzes von Stokes, dass diese Definition der Integrierbarkeit und des Integrals unabhängig von der Wahl der Karten und der Teilung der Eins ist.

**Definition 1.2.27**

1. Sei  $(M, \mathfrak{A})$  eine durch den Atlas  $\mathfrak{A}$  orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi$  eine bezüglich  $\mathfrak{A}$  positiv orientierte Karte. Man nennt für einen Punkt  $p \in M$  die Basis  $(\partial_1 \varphi)(p), \dots, (\partial_k \varphi)(p)$  des Tangentialraums  $T_p M$  und alle gleich-orientierten Basen des Vektorraums  $T_p M$  (bezüglich  $\mathfrak{A}$ ) positiv orientiert.

2. Ist  $n \geq 2$  und  $M$  spezieller eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  mit der Standard-Orientierung, so ist ein bezüglich  $\mathfrak{A}$  positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld auf  $M$  ein stetiges Vektorfeld  $\nu$  auf  $M$ , so dass für jedes  $p \in M$  der Vektor  $\nu(p)$  ein Einheits-Normalenvektor auf  $M$  ist, und so dass gilt: Ist  $(v_1, \dots, v_{n-1})$  eine bezüglich  $\mathfrak{A}$  positiv orientierte Basis von  $T_p M$ , so ist  $(\nu(p), v_1, \dots, v_{n-1})$  eine bezüglich der Standardorientierung des  $\mathbb{R}^n$  positiv orientierte Basis von  $\mathbb{R}^n$ .

Für den Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir auf [F3, §20].

**Bemerkungen 1.2.28.**

1. Wenn eine Hyperfläche  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Orientierung  $\mathfrak{A}$  besitzt, so existiert ein positiv orientiertes Einheits-Normalenfeld.
2. Eine Orientierung einer Hyperfläche lässt sich umgekehrt durch ein Einheits-Normalenfeld  $\nu$  charakterisieren.
3. Für ein Kompaktum  $A \subset \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand  $\partial A$  sprechen wir von der kanonischen Orientierung des Randes  $\partial A$ , wenn sie durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Wir erinnern an das vektorielle (Hyper-)Flächenelement aus Definition 1.2.13: dies ist ein  $n$ -Tupel von  $(n - 1)$ -Formen,  $d\vec{S} := (dS_1, \dots, dS_n)^T$ . Somit ist für ein stetiges Vektorfeld  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Ausdruck  $\langle f, d\vec{S} \rangle$  eine stetige  $(n - 1)$ -Form auf  $U$ .

Wir wollen die Integration von Differentialformen und von Funktionen in Beziehung setzen.

**Satz 1.2.29.**

Sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$  und  $M \subset U$  eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$ , die durch ein Einheits-Normalenfeld  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  orientiert sei. Sei  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $U$ . Dann gilt für jede kompakte Teilmenge  $K \subset M$

$$\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) .$$

Symbolisch wird die Aussage auch in der Form  $d\vec{S} = \nu dS$  geschrieben. Man beachte, dass auf der linken Seite eine  $(n - 1)$ -Form und auf der rechten Seite eine reellwertige Funktion integriert werden.

**Beweis.**

Wir betrachten nur den Spezialfall einer parametrisierten Fläche im  $\mathbb{R}^3$ : es sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^3$  und  $M \subset U$  eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die mit nur einer Karte  $\varphi : T \xrightarrow{\sim} M$  beschrieben wird, wobei  $T$  offen im  $\mathbb{R}^2$  ist.

Es sei  $f = (f_1, f_2, f_3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld und  $K \subset M$  kompakt. Wir wollen zeigen:

$$\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle = \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) .$$

Für  $t \in T$  ist der Einheitsnormalenvektor im Punkt  $\varphi(t) \in M$  gegeben durch das Vektorprodukt

$$\nu(\varphi(t)) = \frac{\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi}{\|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|}$$

Wir rechnen dann

$$\begin{aligned}
\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle &= \int_K f_1 dx_2 \wedge dx_3 - \int_K f_2 dx_1 \wedge dx_3 + \int_K f_3 dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} (\varphi^* f_1 d\varphi_2 \wedge d\varphi_3 - \varphi^* f_2 d\varphi_1 \wedge d\varphi_3 + \varphi^* f_3 d\varphi_1 \wedge d\varphi_2) \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left( \varphi^* f_1 \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi^* f_2 \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \varphi^* f_3 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} \right) \right) dt_1 \wedge dt_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \left\langle \varphi^* f, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_2} \right\rangle dt_1 \wedge dt_2 .
\end{aligned}$$

Wir haben dabei erst die Definition des vektoriellen Flächenelements  $d\vec{S}$  eingesetzt, dann die Definition 1.2.26 des Integrals und die Definition 1.2.19 des Rücktransports und dann die Kettenregel, gefolgt von der Definition des Kreuzprodukts.

Unser Zwischenergebnis ist das in Definition 1.2.22 definierte Integral einer 2-Form über die Teilmenge  $\varphi^{-1}(K) \subset \mathbb{R}^2$ . Dieses Integral ist:

$$\begin{aligned}
\int_K \langle f, d\vec{S} \rangle &= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle \varphi^* f(t), \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi \rangle dt_1 dt_2 \\
&= \int_{\varphi^{-1}(K)} \langle f(\varphi(t)), \nu(\varphi(t)) \rangle \underbrace{\|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|}_{dS(x)} dt_1 dt_2 \\
&= \int_K \langle f(x), \nu(x) \rangle dS(x) .
\end{aligned}$$

□

### Definition 1.2.30

1. Sei  $H_k \subseteq \mathbb{R}^k$  der Halbraum

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\}.$$

Wir versehen den Rand  $\partial H_k$  mit der durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld  $\nu$  mit  $\nu(x) = e_1$  für  $x \in \partial H_k$  gegebenen Orientierung.

2. Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subseteq M$ . Ein Punkt  $p \in M$  heißt Randpunkt der Teilmenge  $A$  relativ zur Untermannigfaltigkeit  $M$ , falls in jeder Umgebung von  $p$  sowohl Elemente von  $A$  als auch von  $M \setminus A$  liegen. Die Menge aller dieser Randpunkte bezeichnen wir mit  $\partial_M A$ . Dies ist eine Teilmenge der Untermannigfaltigkeit  $M$ .

3. Wir sagen, ein Kompaktum  $A \subset M$  habe glatten Rand  $\partial_M A$ , wenn gilt: Es existiert für jedes  $p \in \partial_M A$  eine Karte  $\varphi : T \xrightarrow{\sim} V$  von  $M$  mit  $p \in V$ , so dass  $\varphi(H_k \cap T) = A \cap V$  und  $\varphi(\partial H_k \cap T) = \partial_M A \cap V$  gilt. Eine solche Karte von  $M$  nennen wir randadaptiert.

Man zeigt:

**Beobachtung 1.2.31.**

1. Ist  $M$  eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $A \subseteq M$  kompakt mit glattem Rand, so ist  $\partial_M A$  eine kompakte  $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .
2. Ist die Untermannigfaltigkeit  $M$  zusätzlich orientiert, so erhält man eine induzierte Orientierung auf dem Rand  $\partial_M A$ : Man wähle nur randadaptierte Karten, die positiv orientiert sind, und schränke diese auf den Rand  $\partial_M A$  ein.
3. Im Fall  $k = n$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $A$  wie in 2, ist die auf  $\partial_M A$  durch die kanonische Orientierung von  $M$  induzierte Orientierung diejenige, die durch das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld gegeben ist.

Der folgende Satz ist schon ein Spezialfall des Satzes von Stokes:

**Lemma 1.2.32.**

Sei  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form im  $\mathbb{R}^k$  mit  $k \geq 2$ , mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega .$$

**Beweis.**

- Wir schreiben die  $(k-1)$ -Form  $\omega$  als

$$\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k$$

mit  $C^1$ -Funktionen  $f_1, \dots, f_k$ . In der von der randadaptierten Karte induzierten Karte  $\beta : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial H_k$  des Randes mit  $(t_1, \dots, t_{k-1}) \mapsto (0, t_1, \dots, t_{k-1})$  gilt

$$\beta^* \omega = f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} ;$$

also folgt für das Randintegral

$$\int_{\partial H_k} \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1, \dots, t_{k-1}) d^{k-1}t .$$

- Wir berechnen das Integral der  $k$ -Form

$$d\omega = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

über den Halbraum  $J_k = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-1}$ . Für jedes feste  $(x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$  folgt, da die Komponentenfunktion  $f_1$  kompakten Träger hat

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 = f_1(0, x_2, \dots, x_k) .$$

Es folgt durch weitere Integration:

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k .$$

Für  $2 \leq j \leq k$  gilt

$$\int_{H_k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j \right) dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_k .$$

Für festes  $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$  hat die Funktion  $x_j \mapsto f_j(x_1, \dots, x_k)$  kompakten Träger. Also verschwindet das Integral in der Klammer. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k = \int_{\partial H_k} \omega .$$

□

Wir können nun den Stokesschen Integralsatz in seiner vollständigen Form formulieren:

**Theorem 1.2.33** (Stokesscher Integralsatz im  $\mathbb{R}^n$ ).

Sei  $U$  offen im  $\mathbb{R}^n$ . Sei  $M \subset U$  eine orientierte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit (mit  $k \geq 2$ ) und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form in  $U$ . Dann gilt für jedes Kompaktum  $A \subset M$  mit glattem Rand  $\partial_M A$ , wobei wir  $\partial_M A$  mit der von  $M$  induzierten Orientierung versehen:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial_M A} \omega .$$

Der Stokessche Integralsatz gilt auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

**Beweis.**

- Wie im Beweis des Gaußschen Integralsatzes führen wir zu einem randadaptierten Atlas ein feine beliebig oft differenzierbare Teilung der Eins  $\alpha_{p,\epsilon}$  ein und zerlegen die  $(k-1)$ -Form  $\omega$ :

$$\omega = \sum_p \alpha_{p,\epsilon} \omega .$$

Es genügt wieder, den Stokesschen Integralsatz für die einzelnen Summanden zu beweisen.

- Wir nehmen daher an, dass  $M \cap \text{supp}(\omega)$  kompakt und ganz in einer Karte  $\varphi : \Omega \rightarrow V \subset M$  aus dem randadaptierten Atlas enthalten ist. Die Differentialform  $\varphi^* \omega$  auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  kann daher durch Null zu einer auf ganz  $\mathbb{R}^k$  stetig differenzierbaren Differentialform  $\tilde{\omega}$  mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Es gilt

$$(*) \quad \int_A d\omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{H_k \cap \Omega} \varphi^*(d\omega) \stackrel{1.2.20.3}{=} \int_{H_k \cap \Omega} d\varphi^* \omega = \int_{H_k} d\tilde{\omega} .$$

- Betrachte die Einbettung

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}^{k-1} &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (u_1, \dots, u_{k-1}) &\mapsto (0, u_1, \dots, u_{k-1}) \end{aligned}$$

und

$$\Omega_0 := \beta^{-1}(\partial H_k \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^{k-1} .$$

Dann ist

$$\psi := \varphi \circ \beta : \Omega_0 \rightarrow V_0 := \partial_M A \cap V$$

eine Karte des Randes  $\partial_M A$ . Dann ist

$$(**) \quad \int_{\partial_M A} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_0} \psi^* \omega = \int_{\Omega_0} \beta^* \varphi^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta^* \tilde{\omega} = \int_{\partial H_k} \tilde{\omega} .$$

Die Gleichheit von  $(*)$  und  $(**)$  und somit die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.2.32.

□

**Korollar 1.2.34.**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\omega$  eine stetig differenzierbare  $(k-1)$ -Form auf  $U$ . Dann gilt für jede orientierte, kompakte  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset U$

$$\int_M d\omega = 0 .$$

**Beweis.**

Da  $M$  kompakt ist, wähle im Stokesschen Satz 1.2.33  $A = M$ . Da die Mannigfaltigkeit  $M$  keinen Rand hat, ist  $\partial M = \emptyset$ . □

Wir wollen nun noch aus dem Stokesschen Satz 1.2.33 zwei klassische Integralsätze ableiten.

**Bemerkungen 1.2.35.**

1. Sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen. Betrachte eine parametrisierte Fläche  $M \subset U$  im  $\mathbb{R}^3$ . Ferner sei ein differenzierbares Vektorfeld  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben, das mit dem vektoriellen Linienelement  $d\vec{s}$  aus Definition 1.2.13 eine 1-Form  $\omega := \langle F, d\vec{s} \rangle$  liefert.

Sei  $A \subseteq M$  ein Kompaktum in der Fläche  $M$  mit glattem Randweg  $\varphi : [a, b] \rightarrow M$ , der positiv umlaufend sein soll. Dann erhalten wir mit  $d\omega = \langle \text{rot} F, d\vec{S} \rangle$  aus Beispiel 1.2.14.4

$$\begin{aligned} \int_A \langle \text{rot} F(x), \nu(x) \rangle dS(x) &\stackrel{1.2.29}{=} \int_A \langle \text{rot} F, d\vec{S} \rangle = \int_A d\omega \\ &\stackrel{1.2.33}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{s} \rangle \\ &= \int_{[a,b]} \langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt . \end{aligned}$$

Dies ist der klassische Satz von Stokes.

2. Der klassische Satz von Gauß ist der Spezialfall  $k = n$  des Satzes von Stokes 1.2.33. Mit der  $(n-1)$ -Form  $\omega = \langle F, d\vec{S} \rangle$  ist hierbei wie in Beispiel 1.2.14.3

$$d\omega = (\text{div } F) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

Wir finden

$$\begin{aligned} \int_A \text{div } F d^n x &= \int_A d\omega \stackrel{1.2.33}{=} \int_{\partial_M A} \omega = \int_{\partial_M A} \langle F, d\vec{S} \rangle \\ &\stackrel{1.2.29}{=} \int_{\partial A} \langle F, \nu \rangle dS(x) \end{aligned}$$



## 2 Funktionentheorie

### 2.1 Komplexe Differenzierbarkeit

In der Funktionentheorie beschäftigt man sich mit Funktionen, im einfachsten Fall auf nicht-leeren offenen Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , die komplex differenzierbar sind.

Bisher haben wir nur Ableitungen komplexwertiger Funktionen reeller Variablen

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad U \subset \mathbb{R}^n \quad \text{offen}$$

definiert. Der Körper der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  kann als zwei-dimensionaler reeller Vektorraum aufgefasst werden. Daher ist der Begriff der *reellen* Differenzierbarkeit und reellen Ableitung von Funktionen

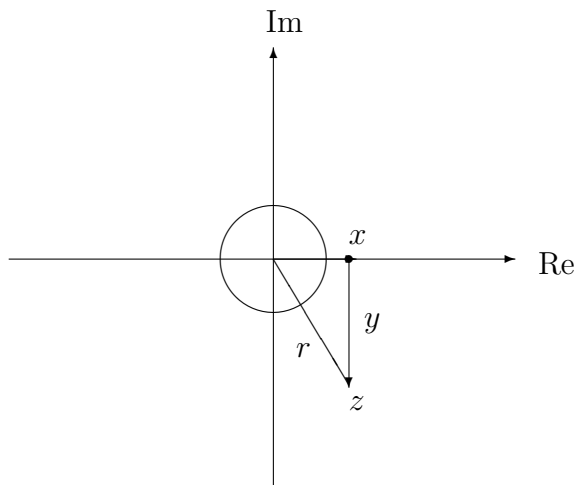
$$f : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad U \subset \mathbb{C} \quad \text{offen}$$

definiert; die Multiplikation im Körper  $\mathbb{C}$  im Urbildbereich geht dabei nicht ein.

#### Bemerkung 2.1.1.

Wir erinnern an grundlegende Definitionen zu komplexen Zahlen.

1. Sie wurden eingeführt als Paare reeller Zahlen,  $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ , die wir als Punkte in der Gaußschen Ebene darstellen.



$x = \operatorname{Re} z$  ist der Realteil,  $y = \operatorname{Im} z$  der Imaginärteil von  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \bar{z} := x - iy \end{aligned}$$

gegebene Abbildung heißt komplexe Konjugation. Für den Betrag  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  gilt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

2. Zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  gibt es  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$ , so dass  $z = r e^{i\varphi}$  gilt. Es ist  $r = |z|$  eindeutig bestimmt; für  $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Winkel  $\varphi$  bis auf ein additives Vielfaches von  $2\pi$  eindeutig bestimmt. Fordert man  $\varphi \in (-\pi, \pi]$ , so heißt  $\varphi =: \arg z$ , das (Haupt-)Argument von  $z$ ; es ist eindeutig bestimmt.

Es gilt dann

$$z = |z| e^{i\varphi} = \exp(\ln |z| + i \arg z) .$$

Für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  ist dies eine Darstellung von  $z$  in Polarkoordinaten.

Es gilt für das Hauptargument

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

3.  $\mathbb{C}$  ist ein Körper; in Polarkoordinaten schreibt sich die Multiplikation  $(z, z') \mapsto zz'$  und die Inversenbildung  $z \mapsto z^{-1}$  besonders einfach. Zum Beispiel ist für  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  das multiplikative Inverse  $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\varphi}$ .

4. Außerdem ist  $\mathbb{C}$  mit der durch

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \text{ für } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

definierten Metrik ein vollständiger metrischer Raum (und als solcher homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  mit der metrischen Struktur, die aus der Norm auf  $\mathbb{R}^2$  folgt). Es ist also definiert, was eine offene Menge  $U \subset \mathbb{C}$  ist:  $U$  heißt offen, wenn es zu jedem  $a \in U$  ein  $r > 0$  gibt, so dass die offene Kreisscheibe

$$B_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r \}$$

in  $U$  enthalten ist.

5. Wie bei jedem metrischen Raum haben wir Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit. Da  $\mathbb{C}$  vollständig ist, konvergieren komplexe Cauchy-Folgen in  $\mathbb{C}$  gegen einen (eindeutig bestimmten) Grenzwert.

Wir treffen zwei Verabredungen:

- Sei  $B \subset \mathbb{C}$  eine Teilmenge. Wenn  $z_0$  Häufungswert von  $B \setminus \{z_0\}$  ist und  $g : B \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, so ist mit  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$  immer  $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in B \setminus \{z_0\}}} g(z)$  gemeint.
- Ein Gebiet ist eine nicht-leere, offene und zusammenhängende Teilmenge der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$ .

### Definition 2.1.2

1. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und nicht leer. Eine Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{C} .$$

heißt im Punkt  $z_0 \in U$  komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} =: f'(z_0)$$

existiert.

2. Eine Funktion heißt im Punkt  $z_0 \in U$  holomorph, wenn sie in einer Umgebung von  $z_0$  komplex differenzierbar ist.

3. Eine holomorphe Funktion auf  $U$  ist eine auf  $U$  komplex differenzierbare Funktion  $f$ .

### Beispiele 2.1.3.

1. Ist  $f$  konstant gleich  $c \in \mathbb{C}$ , so ist  $f$  komplex differenzierbar mit Ableitung  $f' = 0$ . Für die Funktion  $f(z) = z$  gilt  $f'(z_0) = 1$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
2. Wir betrachten die komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Dann gilt für  $z_0, z \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$ :

$$\frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} = \frac{\overline{z_0 + z} - \bar{z}_0}{z} = \frac{\bar{z}}{z}.$$

Der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$  existiert nicht: für die Folge  $u_k := \frac{1}{k}$  reeller Zahlen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{u}_k}{u_k} = 1$ . Aber für die Folge  $v_k := \frac{i}{k}$  rein imaginärer Zahlen, für die ebenfalls  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 0$  gilt, finden wir  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{v}_k}{v_k} = -1$ .

Die Funktion  $f$  ist also in keinem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, obwohl  $f$  in jedem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  reell stetig differenzierbar ist.

### Bemerkungen 2.1.4.

1. Da komplexe Differenzierbarkeit formal genau so definiert ist wie Differentiation im  $\mathbb{R}^n$ , lassen sich Regeln wie Summen-, Produkt-, Kettenregel und l'Hospital analog wie im Reellen beweisen. Man muss nur statt Intervallen offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$  als Definitionsbereiche betrachten. Insbesondere sind polynomiale Funktionen als Folge von Beispiel 2.1.3.1 und Produkt- und Summenregel holomorph.
2. Man zeigt auch wie bei reeller Differenzierbarkeit: Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann in einem Punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  komplex differenzierbar, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$ , eine Kreisscheibe  $B_\varepsilon(0)$  mit  $\varepsilon > 0$  und eine Funktion

$$\varphi : B_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varphi(z)}{z} = 0$$

gibt, so dass

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + c \cdot z + \varphi(z) \quad \text{für} \quad z \in B_\varepsilon(0)$$

gilt. In diesem Fall ist  $c = f'(z_0)$ .

### Satz 2.1.5.

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $z_0 \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Man schreibe  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $z = x + iy$ , wobei  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und  $u(x, y), v(x, y)$  reellwertige Funktionen sind.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist in  $z_0$  komplex differenzierbar.

2.  $f$  ist in  $(x_0, y_0)$  reell-differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Dies ist ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung an die reellwertigen Funktionen  $u$  und  $v$  in zwei Variablen.

**Beweis.**

Sei  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar und  $A := f'(z_0) \in \mathbb{C}$ . Das ist genau dann der Fall, wenn

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - At}{|t|} \quad (4)$$

gilt. Wir spalten in Real- und Imaginärteil auf:

$$A = \alpha + i\beta \text{ und } t = h + ik \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, h, k \in \mathbb{R}$$

und somit

$$At = \alpha h - \beta k + i(\alpha k + \beta h) .$$

Da eine komplexwertige Funktion genau dann konvergiert, wenn ihr Real- und Imaginärteil konvergieren, ist (4) äquivalent zu

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h - \beta k)}{|(h, k)|} &= 0 \\ \lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (\alpha k + \beta h)}{|(h, k)|} &= 0\end{aligned} \quad (5)$$

Mit den linearen Abbildungen

$$L_{1,2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ,$$

die durch

$$L_1(h, k) := \alpha h - \beta k \quad \text{und} \quad L_2(h, k) := \alpha k + \beta h$$

gegeben sind, folgt aus den Gleichungen (5), dass die reellwertigen Funktionen  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(x_0, y_0)$  differenzierbar sind. Der Vergleich der Koeffizienten von  $h$  und  $k$  in  $L_1$  und  $L_2$  zeigt, dass komplexe Differenzierbarkeit äquivalent zu den Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \alpha = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\beta = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

ist. □

Man beachte, dass wir auch die folgende Identität mitbeweisen haben:

$$f'(z_0) = A = \alpha + i\beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) .$$

Als einfache Folgerung haben wir das

**Korollar 2.1.6.**

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, und sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  auf  $U$  holomorph und  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in U$ . Dann ist  $f$  auf  $U$  konstant.

**Beweis.**

Nach dem vorangegangenen Satz 2.1.5 ist dann  $f$  auf  $U$  differenzierbar und es gelten für  $f = u + iv$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

sowie  $f' = u_x + iv_x$ . Aus  $f' = 0$  folgt somit  $u_x = v_x = 0$  und aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen das Verschwinden aller partiellen Ableitungen. Nach einem Satz aus der Analysis folgt auf dem Gebiet  $U$  daher, dass die reellen Funktionen  $u$  und  $v$  und somit auch  $f$  auf  $U$  konstant sind.  $\square$

**Korollar 2.1.7.**

Ist  $f = u + iv$  holomorph auf einem Gebiet  $U$  und existieren auch noch stetige zweite partielle Ableitungen von  $u$  und  $v$ , so sind  $u$  und  $v$  harmonische Funktionen, d. h. es gilt in  $U$ :

$$\Delta u = \Delta v = 0 .$$

**Beweis.**

Dies folgt mit direkter Rechnung aus den Cauchy-Riemannschen Gleichungen:

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = -(u_y)_y = -u_{yy} .$$

$\square$

**Bemerkung 2.1.8.**

1. Für die Funktion  $f(z) = z^2$  kann man die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen leicht explizit überprüfen.
2. Mit Hilfe des Differentialoperators

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

kann man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen umschreiben zu  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 0$ :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x) = 0 .$$

Zum Beispiel erhält man für die Funktion  $f(z) = \bar{z}$ , dass  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 1$  für alle  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Es folgt die aus Beispiel 2.1.3.2 bekannte Tatsache, dass  $f$  nicht holomorph ist.

3. Dies rechtfertigt, eine Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$  umzuschreiben zu

$$f(x, y) = f \left( \frac{1}{2}(z + \bar{z}), -\frac{i}{2}(z - \bar{z}) \right)$$

und im Wirtingerkalkül formal nach unabhängigen Variablen  $z, \bar{z}$  zu differenzieren.

Es gibt auch einen Kalkül von komplexen Differentialformen  $f dz + g d\bar{z}$  auf  $\mathbb{R}^2$  mit den Einsformen  $dz = dx + idy$  und  $d\bar{z} = dx - idy$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

4. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt, dass die Jacobische Determinante einer in einer Umgebung von  $z_0 \in \mathbb{C}$  holomorphen Funktion  $f$  dort gerade gleich

$$u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

ist. Ist speziell  $f'(z_0) \neq 0$ , so ist  $f$  ein (lokaler) Diffeomorphismus.

**Definition 2.1.9**

1. Eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt konform, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Die Abbildung  $L$  ist injektiv und für je zwei von Null verschiedene Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^k$  gilt

$$\frac{\langle Lv, Lw \rangle}{\|Lv\| \cdot \|Lw\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} .$$

- Es gibt eine Zahl  $\rho \neq 0$ , so dass für die darstellende Matrix  $A$  von  $L$  gilt  $A^t A = \rho^2 E$ .

(Es ist leicht zu sehen, dass aus der zweiten Bedingung  $\langle Lv, Lw \rangle = \rho^2 \langle v, w \rangle$  und somit die erste Bedingung folgt. Für die andere Richtung verweisen wir auf [Koe, p. 176].)

2. Eine differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^k$  heißt konform im Punkt  $x \in U$ , wenn ihr Differential  $df(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  in  $x$  eine konforme lineare Abbildung ist.

**Bemerkungen 2.1.10.**

1. Aus der ersten Charakterisierung konformer Abbildungen folgt, dass konforme Abbildungen Winkel erhalten.
2. Ist  $A$  die darstellende Matrix einer konformen Abbildung und  $k = n$ , so ist  $\rho^{-1}A$  eine orthogonale Matrix. Man nennt dann  $A$  eine Ähnlichkeitsmatrix.
3. Nach der Kettenregel werden die Tangentialvektoren differenzierbarer Kurven durch den Punkt  $x$  unter  $f$  durch das Differential  $df(x)$  abgebildet. Daher ist eine differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  konform in  $z \in U$ , wenn für alle differenzierbaren Kurven  $\gamma_1, \gamma_2$  mit  $\gamma_1(0) = z = \gamma_2(0)$  sich die Kurven  $f \circ \gamma_1$  und  $f \circ \gamma_2$  in  $f(z)$  im gleichen Winkel schneiden wie die Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  im Punkt  $z$ .

**Satz 2.1.11.**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $f = u + iv : U \rightarrow \mathbb{C}$  reell differenzierbar. Dann ist  $f$  in  $z \in U$  genau dann konform, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten:

- Das Paar  $(u, v)$  oder das Paar  $(v, u)$  erfüllt in  $z$  die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.
- Es gilt  $u_x^2(z) + v_x^2(z) \neq 0$ .

**Beweis.**

Eine reelle  $2 \times 2$ -Matrix ist genau dann orthogonal wenn sie entweder von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$$

ist, also eine Drehung oder eine Spiegelung ist, und  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  gilt. Also ist die Jacobische Matrix  $\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$  genau dann eine Ähnlichkeitsmatrix, wenn die beiden Bedingungen gelten.  $\square$

### Korollar 2.1.12.

Eine holomorphe Funktion ist genau dann konform im Punkt  $z \in U$ , wenn  $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) \neq 0$ . Holomorphe Funktionen erhalten die Orientierung.

Man überlegt sich leicht, dass die komplexe Exponentialfunktion die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt und somit holomorph ist. Es liegt also nahe, für sie eine Umkehrfunktion zu suchen und zu untersuchen, ob diese holomorph ist.

### Beispiel 2.1.13.

- Wir definieren den Hauptzweig des komplexen Logarithmus durch

$$\log : \mathbb{C}^* \rightarrow S := \{ x + iy \mid y \in (-\pi, \pi] \},$$

$$\log z := \ln |z| + i \arg z .$$

Hierbei *wählen* wir das Hauptargument aus Bemerkung 2.1.1.2. Dann ist  $\log$  die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\exp : S \rightarrow \mathbb{C}^* .$$

- Die Funktion  $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow S$  ist allerdings auf der negativen reellen Achse nicht stetig: Sei  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , dann ist  $-x \in \mathbb{R}_-^*$  auf der negativen Halbachse, und sowohl

$$x_n := x e^{i(\pi - \frac{1}{n})} \quad \text{als auch} \quad x'_n := x e^{i(-\pi + \frac{1}{n})}$$

sind Folgen, die gegen  $-x$  konvergieren, denn  $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$ . Da die Folgenglieder beider Folgen,  $\pi - \frac{1}{n}$  und  $-\pi + \frac{1}{n}$  im halboffenen Intervall  $(-\pi, \pi]$  liegen, folgt

$$\log x_n = \ln x + i\left(\pi - \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \log x'_n = \ln x + i\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log x_n = \ln x + i\pi = \log(-x),$$

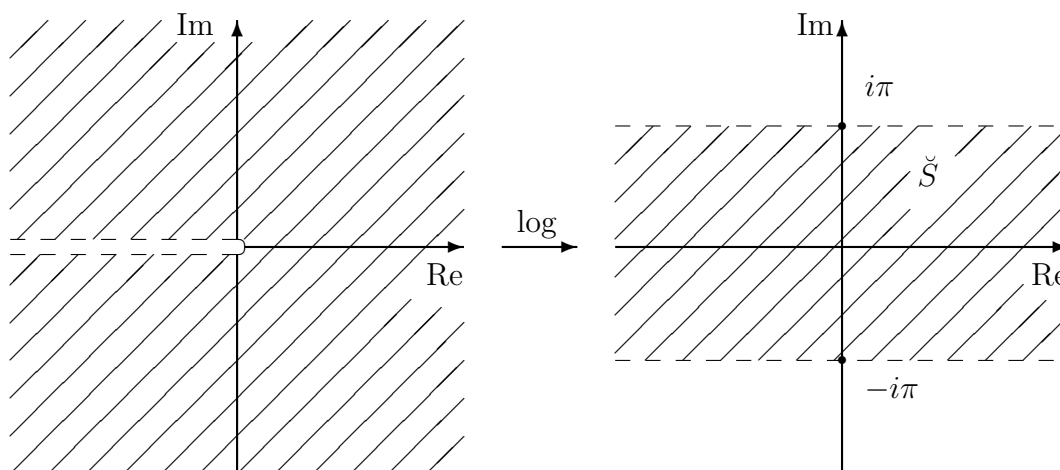
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log x'_n = \ln x - i\pi \neq \log(-x) .$$

Es ist also auch nicht möglich, dass  $\log$  auf der ganzen punktierten Ebene  $\mathbb{C}^*$  holomorph ist. Aber die Restriktion auf die geschlitzte Ebene

$$(*) \quad \log : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_- \rightarrow \check{S} \\ \log z := \ln |z| + i \arg z$$

ist bijektiv, mit der Umkehrfunktion

$$\exp : \check{S} \rightarrow \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-, \quad \check{S} = \{ x + iy \in \mathbb{C} \mid y \in (-\pi; \pi) \} .$$



Die in (\*) definierte Funktion  $\log$  ist holomorph, denn es ist

$$\log(x + iy) = \underbrace{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{\operatorname{sgny} \cdot \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{v(x,y)}$$

$$\operatorname{sgny} := \begin{cases} 1 & \text{für } y \geq 0 \quad (y \neq 0) \\ -1 & \text{für } y < 0 \end{cases} \stackrel{y \neq 0}{=} \frac{y}{\sqrt{y^2}}$$

woraus durch Differenzieren folgt für  $y \neq 0$ :

$$v_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Das gilt auch für  $x > 0, y = 0$ , und außerdem

$$u_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad u_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen sind also erfüllt, die Funktion  $\log$  ist auf  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$  holomorph, und es folgt

$$f'(z) = (u_x + iv_x)(x, y) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

## 2.2 Potenzreihen

Wir benutzen nun Reihen mit Werten in einem komplexen Banachraum  $E$ , um mehr Funktionen auf  $\mathbb{C}$  zu erhalten. Zur Vereinfachung mag man sich den Fall  $E = \mathbb{C}$  vorstellen.

### Definition 2.2.1

Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$$

mit  $a_{\nu} \in E$  heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten  $a_{\nu}$ , um den Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Die Menge der  $z \in \mathbb{C}$ , für die die Reihe konvergiert, heißt der Konvergenzbereich der Reihe.

Wir wollen untersuchen, wo Potenzreihen konvergieren, ob sie gegen eine holomorphe Funktion konvergieren und was in diesem Fall die Ableitung ist.



**Lemma 2.2.2** (Abelsches Lemma).

Es sei  $E$  ein Banachraum und  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ . Die Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$  sei an der Stelle  $z = z_1$  konvergent. Wir setzen  $r_1 := |z_1 - z_0|$ . Dann gilt

1. Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle  $z \in B_{r_1}(z_0)$ .
2. Die Reihe konvergiert gleichmäßig absolut auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe  $|z - z_0| \leq \rho < r_1$ .

**Beweis.**

Da die Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$  für  $z = z_1$  konvergiert, bilden ihre Glieder eine Nullfolge, sind also insbesondere beschränkt. Es gibt also eine reelle Zahl  $c > 0$ , so dass

$$|a_{\nu}|r_1^{\nu} = |a_{\nu}(z_1 - z_0)^{\nu}| \leq c$$

für alle  $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Ohne Einschränkung sei  $r_1 > 0$ ; wir haben also die Abschätzung

$$|a_{\nu}| \leq \frac{c}{r_1^{\nu}} \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} .$$

Für  $|z - z_0| \leq \rho < r_1$  erhalten wir daraus die Abschätzung

$$|a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}| = |a_{\nu}||z - z_0|^{\nu} \leq \frac{c}{r_1^{\nu}}\rho^{\nu} = cq^{\nu}$$

mit  $q := \frac{\rho}{r_1}$ . Wegen  $0 < \rho < r_1$  ist  $0 < q < 1$ . Also ist die geometrische Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu}$  eine konvergente Majorante für die Potenzreihe für solche  $z$ .  $\square$

**Satz 2.2.3.**

Zu jeder Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$  auf  $\mathbb{C}$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  existiert genau ein  $r \in [0, \infty]$ , der Konvergenzradius der Potenzreihe, mit den folgenden Eigenschaften:

1. Auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe  $|z - z_0| \leq \rho < r$  ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent.
2. Für  $|z - z_0| > r$  ist die Reihe divergent.

Es gilt die Formel von Cauchy-Hadamard

$$r = \left( \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_{\nu}|} \right)^{-1}$$

**Bemerkungen 2.2.4.**

1. Wir erinnern an die Definition des limes superior einer Folge reeller Zahlen als größter Grenzwert aller konvergenten Teilfolgen. Hier haben wir es mit Folgen nicht-negativer reeller Zahlen zu tun, so dass der limes superior genau dann existiert, wenn die Folge nach oben beschränkt ist. Ist sie dies nicht, so setzen wir den limes superior gleich  $\infty$ . Für konvergente Folgen fallen limes superior und Grenzwert zusammen.
2. Ist  $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_{\nu}|} = 0$  oder  $= \infty$ , so ist der Konvergenzradius  $r = \infty$  bzw.  $r = 0$  zu setzen.

3. Die Formel von Cauchy-Hadamard liefert nicht immer einen rechnerisch zweckmäßigen Weg zur Bestimmung des Konvergenzradius.

**Beweis.**

Die erste Aussage folgt schon aus dem Abelschen Lemma 2.2.2. Sei

$$\tilde{r} := \left( \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \right)^{-1}$$

1. Wir betrachten zunächst den Fall  $0 < \tilde{r} \leq \infty$  und wählen ein  $r_0$  mit  $0 < r_0 < \tilde{r}$ . Es gilt also

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < \frac{1}{r_0} .$$

Daher existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r_0} \Leftrightarrow |a_n| < \frac{1}{r_0^n} .$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|a_n(z - z_0)^n| < \left( \frac{|z - z_0|}{r_0} \right)^n ,$$

woraus für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r_0$  nach dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die gleichmäßige absolute Konvergenz der Reihe folgt. Da  $r_0$  mit  $0 < r_0 < \tilde{r}$  beliebig gewählt war, folgt die Konvergenz der Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < \tilde{r}$ . Wir haben somit die untere Abschätzung  $\tilde{r} \leq r$  an den Konvergenzradius  $r$ .

2. Sei nun  $\tilde{r}$  endlich,  $0 \leq \tilde{r} < \infty$ , und wähle  $r_0$  mit  $\tilde{r} < r_0$ . Das heißt aber

$$\frac{1}{r_0} < \frac{1}{\tilde{r}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Daher existiert eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen  $n_1, n_2, \dots$ , so dass

$$\frac{1}{r_0} < |a_{n_p}|^{\frac{1}{n_p}}$$

für alle  $p \in \mathbb{N}$ , also

$$\frac{1}{(r_0)^{n_p}} < |a_{n_p}| .$$

Für  $|z - z_0| > r_0$  folgt daher für alle  $p \in \mathbb{N}$

$$|a_{n_p}(z - z_0)^{n_p}| > 1 ,$$

so dass die Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$  schon deswegen nicht konvergent sein kann, weil ihre Glieder keine Nullfolge sind. Da  $r_0$  beliebig mit  $r < r_0$  war, folgt die Divergenz der Potenzreihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z - z_0)^\nu$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| > \tilde{r}$ . Wir haben somit die obere Abschätzung  $\tilde{r} \geq r$  an den Konvergenzradius  $r$ .

□

**Beispiele 2.2.5.**

1. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$  hat wegen  $\limsup \sqrt[n]{n^n} = \limsup n = \infty$  den Konvergenzradius  $r = 0$ .
2. Die Exponentialreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  hat wegen des Quotientenkriteriums Konvergenzradius  $r = \infty$ . Alternativ sieht man aus der Stirling-Formel  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , dass  $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$  und somit  $r = \infty$  gilt.

**Satz 2.2.6** (Isoliertheit der Nullstellen).

Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$  auf  $\mathbb{C}$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  habe Konvergenzradius  $r > 0$ . Falls nicht alle Koeffizienten  $a_{\nu}$  gleich Null sind, so existiert ein  $r' < r$ , so dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $0 < |z - z_0| < r'$  der Wert  $f(z)$  von Null verschieden ist.

**Beweis.**

Sei  $h$  die kleinste natürliche Zahl mit  $a_h \neq 0$ . Dann schreibe

$$f(z) = (z - z_0)^h (a_h + a_{h+1}(z - z_0) + \dots);$$

die Reihe  $g(z) := a_h + a_{h+1}(z - z_0) + \dots$  konvergiert dann nach dem Kriterium von Cauchy-Hadamard auch dort gleichmäßig, wo  $f$  konvergiert und definiert eine stetige Funktion. Wegen  $g(z_0) \neq 0$  gibt es also ein  $r' > 0$ , so dass  $g(z) \neq 0$  für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r'$  erfüllt ist.  $\square$

**Korollar 2.2.7.**

Sind zwei Potenzreihen  $f, g$  auf der gleichen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt  $z_0$  als Entwicklungspunkt absolut summierbar und stimmen ihre Werte dort überein, so stimmen alle ihre Koeffizienten überein.

**Beweis.**

Betrachte  $f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n$ . Wären nicht alle Koeffizienten dieser Potenzreihe gleich Null, so wäre nach Satz 2.2.6 die Funktion  $f(z) - g(z)$  auf einer punktierten Umgebung von  $z_0$  ungleich Null.  $\square$

Eine wichtige Eigenschaft von Potenzreihen ist die Tatsache, dass man sie ineinander einsetzen kann. Wir halten dies ohne Beweis fest:

**Satz 2.2.8.**

Sei  $g$  eine Potenzreihe mit Werten in  $\mathbb{C}$ , die auf einer Kreisscheibe um  $0 \in \mathbb{C}$  konvergiert. Sei  $f$  eine weitere Potenzreihe mit Werten in einem Banachraum  $E$  mit Konvergenzradius  $r$  um  $z = 0$ .

Gilt dann  $g(0) \in D_r(0)$ , so existiert eine kleine Kreisscheibe  $D$  in  $\mathbb{C}$  um  $0$  derart, dass für  $u \in D$  die Potenzreihe  $g$  in die Potenzreihe  $f$  eingesetzt gleichmäßig absolut konvergiert.

Wir wollen nun den Begriff der Potenzreihe benutzen, um eine wichtige Funktionenklasse einzuführen.

**Definition 2.2.9**

1. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen. Wir nennen eine Abbildung  $f : U \rightarrow E$  in einen Banachraum  $E$  analytisch, wenn zu jedem Punkt  $z_0 \in U$  eine offene Kreisscheibe  $D_\epsilon(z_0) \subset U$  existiert, so dass auf  $D_\epsilon(z_0)$  der Wert von  $f$  gleich einer absolut summierbaren Potenzreihe in der Variablen  $z - z_0$  ist.

Auf Grund von Korollar 2.2.7 ist diese Potenzreihe eindeutig bestimmt.

2. Eine Funktion  $f$  heißt ganz, wenn sie gleich einer Potenzreihe ist, die auf dem ganzen Raum  $\mathbb{C}$  absolut summierbar ist.

Polynomiale Funktionen sind offenbar ganze Funktionen. Nach Beispiel 2.2.5 ist die komplexe Exponentialfunktion eine ganze Funktion. Wir müssen noch klären dass absolut summierbare Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius analytische Funktionen liefern. Dies zeigt der folgende Satz, den wir ohne Beweis bringen:

**Satz 2.2.10.**

Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  sei auf einer Kreisscheibe um den Ursprung  $0 \in \mathbb{C}$  mit Radius  $r$  absolut summierbar. Dann ist  $f(z)$  auf der offenen Kreisscheibe  $D_r(0)$  analytisch.

Genauer gesagt ist  $f(z)$  für jeden Punkt  $b \in D_r(0)$  gleich der Summe einer auf der Kreisscheibe  $D_{r-|b|}(b)$  absolut summierbaren Potenzreihe in  $z - b$ .

Man überlege sich, dass Linearkombinationen analytischer Funktionen wieder analytisch sind. Der Konvergenzradius der Reihe  $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n$  ist größer oder gleich dem Minimum der Konvergenzradien.

Wir wollen nun Differenzierbarkeitseigenschaften von Potenzreihen untersuchen.

**Lemma 2.2.11.**

Hat die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  Konvergenzradius  $r$ , so hat auch die gliedweise abgeleitete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^{\nu-1}$$

Konvergenzradius  $r$ .

**Beweis.**

Wegen  $\sqrt[\nu]{\nu} = \exp\left(\frac{\log \nu}{\nu}\right) \rightarrow 1$  für  $\nu \rightarrow \infty$  hat die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^\nu$  nach der Formel von Cauchy-Hadamard 2.2.3 auch Konvergenzradius  $r$ . Wegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^\nu = (z - z_0) \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^{\nu-1} \right)$$

konvergiert die gliedweise abgeleitete Reihe für ein  $z \neq z_0$  genau dann, wenn die Reihe  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu (z - z_0)^\nu$  für dieses  $z$  konvergiert. □

Wir wollen nun zeigen, dass analytische Funktionen differenzierbar sind.

**Satz 2.2.12.**

Sei  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$  eine absolut summierbare Potenzreihe mit Werten in einem Banachraum  $E$  und Konvergenzradius  $r > 0$ . Die Funktion  $f : D_r(z_0) \rightarrow E$  sei definiert durch die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu .$$

Dann ist  $f(z)$  auf  $D_r(z_0)$  differenzierbar und es gilt für  $z \in D_r(z_0)$

$$f'(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \nu (z - z_0)^{\nu-1}$$

**Beweis.**

Nach einer Verschiebung können wir ohne Einschränkung  $z_0 = 0$  annehmen. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  zerlegen wir die Reihe in die Partialsumme der ersten  $n$  Summanden und einen Rest:

$$\begin{aligned} f(z) &= s_n(z) + R_n(z) \\ s_n(z) &:= \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{\nu} z^{\nu} \\ R_n(z) &:= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.11 ist die gliedweise abgeleitete Potenzreihe

$$f_1(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_{\nu} z^{\nu-1}$$

für  $|z| < r$  konvergent. Nach den Rechenregeln für die Ableitung von Polynomen ist

$$f_1(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(z) \quad \text{für } |z| < r .$$

Wir wählen ein beliebiges  $z_1 \in \mathbb{C}$  mit  $|z_1| < r$  und zeigen, dass  $f$  in  $z_1$  differenzierbar ist mit Ableitung  $f_1(z_1)$ . Dazu wählen wir  $\rho \in \mathbb{R}$  mit  $|z_1| < \rho < r$  und betrachten  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \rho$ ,  $z \neq z_1$ . Wir formen um

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - f_1(z_1) &= \frac{s_n(z)+R_n(z)-s_n(z_1)-R_n(z_1)}{z-z_1} - f_1(z_1) \\ &= \frac{s_n(z)-s_n(z_1)}{z-z_1} - s'_n(z_1) + s'_n(z_1) - f_1(z_1) + \frac{R_n(z)-R_n(z_1)}{z-z_1} \end{aligned}$$

Wir schätzen drei Terme getrennt in geeigneter Reihenfolge ab:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{R_n(z)-R_n(z_1)}{z-z_1} &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} \frac{z^{\nu}-z_1^{\nu}}{z-z_1} \\ &= \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} (z^{\nu-1} + z^{\nu-2}z_1 + \dots + z z_1^{\nu-2} + z_1^{\nu-1}) . \end{aligned}$$

Aus den Annahmen über den Betrag von  $z$  und  $z_1$  folgt daher die Abschätzung

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_1)}{z - z_1} \right| \leq \sum_{\nu=n}^{\infty} |a_{\nu}| \nu \rho^{\nu-1} .$$

Da  $\rho < r$  kleiner als der Konvergenzradius  $r$  der abgeleiteten Potenzreihe  $f_1$  ist, gibt es zu jedem vorgegeben  $\epsilon > 0$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N_1$  gilt

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu |a_{\nu}| \rho^{\nu-1} < \frac{\epsilon}{3} .$$

Also gilt für alle  $n \geq N_1$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \rho$  und  $z \neq z_1$  die Abschätzung

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(z_1)}{z - z_1} \right| < \frac{\epsilon}{3} .$$

2. Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(z_1) = f_1(z_1)$  gilt, finden wir zu jedem vorgegebenen  $\epsilon > 0$  ein  $N_2 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N_2$  gilt

$$|s'_n(z_1) - f_1(z_1)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

3. Sei jetzt ein  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$  gewählt. Da das Polynom  $s_n(z)$  in  $z_1$  komplex differenzierbar ist, existiert zu jedem gegebenen  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $0 < |z - z_1| < \delta$  gilt

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(z_1)}{z - z_1} - s'_n(z_1) \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Wählt man nun  $\delta > 0$  so klein, dass aus  $|z - z_1| < \delta$  folgt  $|z| < \rho$ , und wählen wir ein  $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ , so folgt für alle diese  $z$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f_1(z_1) \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

### Bemerkung 2.2.13.

Differenziert man  $f$  sukzessive, so erhält man durch vollständige Induktion für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < r$ :

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + \frac{(k+1)!}{1!}a_{k+1}(z - z_0) + \frac{(k+2)!}{2!}a_{k+1}(z - z_0)^2 + \dots$$

Setzt man speziell  $z = z_0$ , so folgt  $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$ , d.h. für alle  $k$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Daraus folgt eine "Taylorformel" für analytische Funktionen:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Wir erhalten somit:

### Korollar 2.2.14.

Jede auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  analytische Funktion ist auf  $U$  unendlich oft komplex differenzierbar und somit insbesondere holomorph. Ihre sämtlichen Ableitungen sind auf  $U$  analytisch.

Wir werden später in Korollar 2.4.10 zeigen, dass jede auf einer offenen Menge  $U$  holomorphe Funktion auf  $U$  analytisch ist.

### Korollar 2.2.15.

1. Da alle polynomialen Funktionen

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad P(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{C}$$

analytisch sind, folgt nochmals, dass sie komplex differenzierbar sind, mit  $P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ .

2. Die durch Potenzreihen definierten Funktionen  $\exp, \sin$  und  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind komplex differenzierbar. Insbesondere gilt

$$\exp' = \exp, \sin' = \cos, \cos' = -\sin$$

sowie die bekannten Ableitungsregeln  $\sinh' = \cosh$  und  $\cosh' = \sinh$ .

Wir betrachten auch holomorphe Stammfunktionen:

**Definition 2.2.16**

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Eine Funktion  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (holomorphe) Stammfunktion von  $f$  auf  $U$ , falls  $F$  auf  $U$  holomorph ist und für ihre komplexe Ableitung  $F'(z) = f(z)$  auf  $U$  gilt.

**Satz 2.2.17.**

Es sei die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  auf der Kreisscheibe  $D_r(0)$  absolut konvergent und definiere eine analytische Funktion  $f : D_r(0) \rightarrow E$ . Dann ist auch die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$$

auf  $D_r(0)$  absolut konvergent und liefert eine Stammfunktion für  $f$ .

**Beweis.**

Es bleibt nur die Konvergenz der Reihe zu zeigen, die sich aus der Abschätzung

$$\left| \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1} \right| \leq |a_n| |z^{n+1}|$$

ergibt. □

Wir wollen noch einige Folgerungen aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 ziehen. Sei wieder  $E$  ein komplexer Banachraum.

**Lemma 2.2.18.**

Sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  eine auf der offenen Kreisscheibe  $D_r(z_0)$  und  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - w_0)^n$  eine auf der Kreisscheibe  $D_{r'}(w_0)$  absolut konvergente Potenzreihe. Gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge  $U \subset D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$  auf der  $f(z) = g(z)$  gilt, so stimmen die Funktionen  $f$  und  $g$  auf dem gesamten Durchschnitt der Kreisscheiben überein.

**Beweis.**

Entscheidend im Argument ist die konkrete Form des Durchschnitts. Es sei  $u \in U$  und  $v \in D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$  beliebig. Dann liegt das  $u$  und  $v$  verbindende Segment auch im Durchschnitt  $D_r(z_0) \cap D_{r'}(w_0)$  der beiden Kreisscheiben. Für *reelles*  $t$  setze

$$h(t) := f(u + t(v - u)) - g(u + t(v - u)) .$$

Dann ist die Funktion  $h(t)$  auf einer offenen Teilmenge, die das Intervall  $[0, 1]$  enthält, definiert und analytisch. Sei  $A$  die abgeschlossene Teilmenge der  $t \in [0, 1]$ , auf der  $h(s) = 0$  für alle  $0 \leq s \leq t$  gilt. Da  $U$  offen ist, liegt in  $A$  eine offene Umgebung von 0, daher ist die obere Grenze  $\rho$  von  $A$  strikt positiv. Aus Stetigkeitsgründen ist aber auch  $h(\rho) = 0$ .

Da  $h$  analytisch ist, gibt es eine Potenzreihenentwicklung im Punkt  $\rho$ , die für  $|t - \rho|$  hinreichend klein gegen  $h$  konvergiert. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 folgt dann aber, dass  $h(t)$  für  $|t - \rho|$  hinreichend klein gleich Null ist. Wäre nun  $\rho < 1$ , so würde dies der Definition von  $\rho$  widersprechen; also gilt  $\rho = 1$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Wir machen uns als nächstes von der Voraussetzung frei, dass offene Kreisscheiben vorliegen.

**Satz 2.2.19.**

Sei  $A \subset \mathbb{C}$  eine *zusammenhängende* offene Menge und  $f, g$  zwei auf  $A$  analytische Funktionen mit Werten in einem Banachraum  $E$ . Falls eine nicht-leere offene Teilmenge  $U \subset A$  existiert, so dass  $f(x) = g(x)$  auf  $U$  gilt, so stimmen die Funktionen auf ganz  $A$  überein.

**Beweis.**

Das Innere  $B$  der Teilmenge von  $A$ , auf der  $f$  und  $g$  übereinstimmen, ist trivialerweise offen; nach Voraussetzung ist  $U \subset B$ , also ist  $B$  nicht leer. Wir zeigen nur noch, dass  $B$  auch abgeschlossen in  $A$  ist. Aus der Tatsache, dass  $A$  zusammenhängend sein soll, folgt dann  $A = B$ . Sei  $a \in A$  ein Berührungspunkt von  $B$ . Finde eine in  $A$  enthaltene offene Kreisscheibe  $\tilde{U}$  mit Mittelpunkt  $a$ , auf der  $f$  und  $g$  durch absolut konvergente Potenzreihen beschrieben werden. Nach der Definition von  $B$  enthält  $\tilde{U} \cap B$  eine Kreisscheibe, auf der  $f(x) = g(x)$  gilt. Nach Lemma 2.2.18 gilt  $f = g$  auf  $\tilde{U}$ , also  $\tilde{U} \subset B$  und daher insbesondere  $a \in B$ . Also ist  $B$  auch abgeschlossen und somit  $A = B$ .  $\square$

Wir bringen noch eine ähnliche Aussage, bei der die Voraussetzungen leichter handhabbar sind:

**Korollar 2.2.20.**

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine *zusammenhängende* offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  sowie  $f$  und  $g$  zwei auf  $U$  analytische Funktionen mit Werten in einem Banachraum  $E$ . Falls eine kompakte Teilmenge  $H \subset U$  existiert, so dass für unendlich viele  $x \in H$  gilt  $f(x) = g(x)$ , so stimmen die Funktionen  $f$  und  $g$  auf ganz  $U$  überein.

**Beweis.**

Sei  $z_n$  eine Folge paarweise verschiedener Punkte von  $H$ , für die  $f(z_n) = g(z_n)$  gilt. Da  $H$  kompakt ist, hat die Folge einen Häufungspunkt  $b \in H$ . Jede in  $U$  enthaltene Kreisscheibe um  $b$  enthält unendlich viele Punkte, auf denen  $f$  und  $g$  übereinstimmen. Weil  $f$  und  $g$  analytisch sind, stimmen sie auf einer hinreichend kleinen Kreisscheibe  $P$  um  $b$  mit absolut konvergenten Potenzreihen in  $z - b$  überein. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 folgt dann aber, dass  $f(x) = g(x)$  auf der offenen Kreisscheibe  $P$  gilt. Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.2.19.  $\square$

Wir fassen zusammen: ist  $U \subset \mathbb{C}$  offen und *zusammenhängend*, so heißt eine Menge  $M \subset U$  eine Eindeutigkeitsmenge von  $U$ , wenn je zwei auf  $U$  definierte und analytische Funktionen, die auf  $M$  übereinstimmen, auch auf ganz  $U$  übereinstimmen. Wir haben also folgende Beispiele von Eindeutigkeitsmengen:

1. Nichtleere offene Teilmengen der zusammenhängenden Menge  $U$ , vgl. Satz 2.2.19.
2. Kompakte unendliche Teilmengen von  $U$  nach Korollar 2.2.20. Insbesondere sind Folgen paarweise verschiedener Punkte, die einen Häufungspunkt besitzen, eine Eindeutigkeitsmenge.



3. Ferner auch nichtleere Durchschnitte der Form  $\tilde{U} \cap (b + \mathbb{R})$  mit  $\tilde{U} \subset U$  offen. Insbesondere ist jede auf  $U$  analytische Funktion, falls  $U \cap \mathbb{R}$  nicht leer ist, durch ihre Einschränkung auf  $\mathbb{R}$  definiert. Im allgemeinen kann aber nicht jede auf  $U \cap \mathbb{R}$  analytische Funktion zu einer auf ganz  $U$  analytischen Funktion fortgesetzt werden.

## 2.3 Komplexe Kurvenintegrale

Für die weitere Entwicklung der Funktionentheorie müssen wir über Wege in der komplexen Ebene zu integrieren können.

### Definition 2.3.1

1. Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  ein nicht nur aus einem Punkt bestehendes kompaktes Intervall. Eine Kurve oder Weg in  $\mathbb{C}$  ist eine stückweise stetig differenzierbare Abbildung  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ . Gilt  $\gamma(I) \subset U \subset \mathbb{C}$ , so nennen wir  $\gamma$  eine Kurve in  $U$ .
2. Der Punkt  $\gamma(a)$  heißt Anfangspunkt, der Punkt  $\gamma(b)$  Endpunkt der Kurve. Gilt  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , so heißt  $\gamma$  geschlossene Kurve. Ist  $\gamma$  konstant, so sagen wir,  $\gamma$  reduziere sich auf einen Punkt.
3. Mit  $\gamma : I := [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ist auch  $\gamma^0 : I \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma^0(t) = \gamma(a + b - t)$  wieder eine Kurve, die zu  $\gamma$  entgegengesetzte Kurve.
4. Sei  $I_1 = [b, c]$  ein weiteres kompaktes Intervall und  $I_2 := I \cup I_1$ . Ist dann  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{C}$  eine auf  $I_1$  definierte Kurve mit  $\gamma_1(b) = \gamma(b)$ , so definieren wir die Aneinanderreihung als die Kurve

$$(\gamma \vee \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } t \in I \\ \gamma_1(t) & \text{für } t \in I_1 \end{cases},$$

die auf  $I_2$  definiert ist.

Man beachte, dass das Bild  $\gamma(I)$ , die sogenannte Spur des Wegs, durchaus Selbstüberschneidungen haben kann. Manchmal arbeitet man auch in der Funktionentheorie etwas allgemeiner mit Wegen, die Stammfunktionen von Lebesgue-integrierbaren Funktionen sind; will man nicht die Lebesguesche Integrationstheorie voraussetzen, so fordert man manchmal, dass der Weg Stammfunktion eine Regelfunktion ist.

### Definition 2.3.2

Sind  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei auf  $I_1$  bzw.  $I_2$  definierte Kurven, so nennen wir  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  äquivalent, wenn eine monoton wachsende bijektive Abbildung  $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$  existiert, so dass  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}$  stückweise stetig differenzierbar sind und  $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$  gilt.

### Bemerkungen 2.3.3.

1. Man macht sich leicht klar, dass eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege vorliegt.
2. Ist der Weg  $\gamma$  auf dem Intervall  $I = [a, b]$  definiert, so gibt es auf jedem anderen Intervall  $I_1 := [c, d]$  einen zu  $\gamma$  äquivalenten Weg  $\gamma_1$ : dazu finde eine affine bijektive Abbildung  $t \mapsto \varphi(t) = \alpha t + \beta$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $\alpha > 0$  von  $I_1$  auf  $I$  und betrachte  $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$
3. Betrachte nun auf  $\mathbb{C}$  die Standardkoordinate  $z$  als komplexwertige Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , nämlich die Identität. Ihr Differential  $dz$  ist eine komplexwertige Einsform auf  $\mathbb{C}$ . Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann ist  $f(z)dz$  eine stetige komplexwertige Einsform.

Wenn wir sie über die von  $\gamma$  parametrisierte ein-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}$  integrieren, müssen wir die stückweise stetige komplexwertige Einsform

$$\gamma^*(f(z)dz) = f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

über das Intervall  $[a, b]$  integrieren:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt .$$

**Definition 2.3.4**

Sei  $\gamma$  ein auf  $I = [a, b]$  definierter Weg und  $f$  eine stetige Abbildung der kompakten Menge  $\gamma(I)$  in einen komplexen Banachraum  $E$ . Das Integral

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b dt f(\gamma(t))\gamma'(t) \in E$$

wird das Integral von  $f$  längs des Wegs oder Wegintegral entlang  $\gamma$  genannt.

Die folgenden Aussagen sind klar:

**Lemma 2.3.5.**

1. Sind die Wege  $\gamma$  und  $\gamma_1$  äquivalent im Sinne von Definition 2.3.2, so folgt aus der Kettenregel

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

2. Für den dem Weg  $\gamma$  entgegengesetzten Weg  $\gamma^0$  gilt

$$\int_{\gamma^0} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz$$

3. Ist die Aneinanderreihung zweier Wege  $\gamma$  und  $\gamma_1$  definiert, so gilt

$$\int_{\gamma \vee \gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

4. Sei  $\gamma$  ein *geschlossener* Weg auf  $I = [a, b]$ . Für beliebiges  $c \in I$  betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma_c : [c, c + b - a] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \gamma_c(t) &:= \begin{cases} \gamma(t) & \text{für } c \leq t \leq b \\ \gamma(t - b + a) & \text{für } b \leq t \leq c + b - a \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist auch  $\gamma_c$  ein geschlossener Weg und es gilt

$$\int_{\gamma_c} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$$

für jede stetige Abbildung  $f : \gamma(I) \rightarrow E$ . Das Integral längs eines geschlossenen Weges ist also nicht vom Anfang des geschlossenen Weges abhängig.

**Beispiele 2.3.6.**

1. Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) := z^2$ . Durch  $F(z) := \frac{1}{3}z^3$  ist eine Stammfunktion von  $f$  auf  $\mathbb{C}$  gegeben. Für den Weg

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := t \cdot (1 + i)$$

ist das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f(z) dz &= \int_0^1 f(t(1+i)) \cdot (1+i) dt = \int_0^1 t^2(1+i)^3 dt \\ &= (-2+2i) \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(1-i) . \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass  $\varphi$  kein geschlossener Weg ist.

2. Sei  $f$  wie in 1.; für den geschlossenen Weg  $\varphi$

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \varphi(t) := r e^{it} \quad \text{mit } r > 0 \text{ fest}$$

ist das Kurvenintegral

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_0^{2\pi} (r e^{it})^2 i r e^{it} dt = i r^3 \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{i r^3}{3i} e^{3it} \Big|_0^{2\pi} = 0 .$$

3. Für denselben geschlossenen Weg  $\varphi$  wie in 2. betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad f(z) := \frac{1}{z} .$$

$f$  besitzt auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  keine Stammfunktion, denn der komplexe Logarithmus  $\log : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  ist nach Beispiel 2.1.13 nur auf der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-$  differenzierbar. Es gilt

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

### Bemerkung 2.3.7.

Die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  habe eine Stammfunktion  $F$  auf  $U$ . Sei  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ein Weg in  $U$ . Nach der Kettenregel ist die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} G : [a, b] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto F(\varphi(t)) \end{aligned}$$

gleich

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) .$$

Also gilt

$$\int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \stackrel{\text{(Hauptsatz)}}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) .$$

Ist insbesondere der Weg  $\varphi$  geschlossen, also  $\varphi(a) = \varphi(b)$ , so folgt  $\int_{\varphi} f(z) dz = 0$ .

### Definition 2.3.8

Sei seien  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei auf demselben kompakten Intervall  $I$  definierte Kurven und  $U$  eine offene Menge in  $\mathbb{C}$ , die sowohl  $\gamma_0(I)$  als auch  $\gamma_1(I)$  umfasst.

1. Eine Homotopie<sup>1</sup> von  $\gamma_0$  in  $\gamma_1$  innerhalb von  $U$  ist eine stetige Abbildung

$$\varphi : I \times [\alpha, \beta] \rightarrow U$$

mit  $\alpha < \beta$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so dass  $\varphi(t, \alpha) = \gamma_0(t)$  und  $\varphi(t, \beta) = \gamma_1(t)$  für alle  $t \in I$  gilt.

2. Eine Kurve  $\gamma_0$  heißt homotop zu einer Kurve  $\gamma_1$  in  $U$ , wenn es eine Homotopie von  $\gamma_0$  in  $\gamma_1$  in  $U$  gibt. Ein Weg, der homotop zu einem konstanten Weg ist, heißt auf diesen Punkt zusammenziehbar.
3. Offenbar ist für jedes feste  $\xi \in [\alpha, \beta]$  die Abbildung  $t \mapsto \varphi(t, \xi)$  eine Kurve in  $U$ . Sind  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  geschlossene Kurven, so nennen wir  $\varphi$  eine Konturhomotopie von  $\gamma_0$  in  $\gamma_1$  innerhalb von  $U$ , falls  $t \mapsto \varphi(t, \xi)$  für jedes  $\xi \in [\alpha, \beta]$  eine geschlossene Kurve ist. Sagen wir, zwei geschlossene Kurven seien innerhalb  $U$  homotop, so soll dass immer besagen, dass eine Konturhomotopie (und nicht nur eine Homotopie) existiert.

### Satz 2.3.9.

Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Die Relation “innerhalb von  $U$  homotop sein” ist eine Äquivalenzrelation sowohl von Kurven als auch von geschlossenen Kurven.

### Beweis.

1. Die Reflexivität folgt aus der im zweiten Argument konstanten Homotopie  $\varphi(t, \xi) = \gamma(t)$  für alle  $\xi \in [\alpha, \beta]$ .
2. Die Symmetrie folgt aus der Tatsache, dass, wenn  $\varphi : I \times [\alpha, \beta] \rightarrow U$  eine Homotopie von  $\gamma_0$  auf  $\gamma_1$  ist,

$$(t, \xi) \mapsto \varphi(t, \alpha + \beta - \xi)$$

eine Homotopie von  $\gamma_1$  auf  $\gamma_0$  in  $U$  ist.

3. Die Transitivität sieht man folgendermaßen: Ist andererseits  $\psi : I \times [\alpha', \beta'] \rightarrow U$  eine Homotopie von  $\gamma_1$  auf  $\gamma_2$  in  $U$ , so können wir eine Homotopie von  $\gamma_0$  auf  $\gamma_2$  in  $U$  definieren:

$$\theta : I \times [\alpha, \beta' + \beta - \alpha'] \rightarrow U$$
$$\theta(t, \xi) := \begin{cases} \varphi(t, \xi) & \text{für } \alpha \leq \xi \leq \beta \\ \psi(t, \xi + \alpha' - \beta) & \text{für } \beta \leq \xi \leq \beta' + \beta - \alpha' \end{cases}$$

Beide Vorschriften liefern die gleiche Funktion für  $\xi = \beta$ . Man überlegt sich leicht, dass die Vorschrift stetig ist, Werte in  $U$  annimmt und dass gilt  $\theta(t, \alpha) = \gamma_0(t)$  und  $\theta(t, \beta' + \beta - \alpha') = \gamma_2(t)$  für alle  $t \in I$ .

---

<sup>1</sup>Eine Homotopie in unserem Sinn wird in der Literatur auch freie Homotopie genannt. Bei einer Homotopie im engeren Sinne wird dann vorausgesetzt, dass beide Wege gleiche Anfangs- und Endpunkte haben, und gefordert, dass die Homotopie Anfangs- und Endpunkte festlässt.

□

Wir brauchen noch den folgenden Sachverhalt aus der mengentheoretischen Topologie, die wir auch schon beim Beweis des Gaußschen Integralsatzes verwendet haben:

**Lemma 2.3.10** (Lebesguesche Eigenschaft).

Ist  $E$  ein kompakter metrischer Raum und  $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$  eine offene Überdeckung von  $E$ , so existiert ein  $\rho > 0$ , so dass jede offene Kugel vom Radius  $\rho$  in einer der offenen Mengen  $U_\lambda$  enthalten ist.

**Beweis.**

Jeder Punkt  $x \in E$  liegt in einer offenen Menge  $U_{\lambda(x)}$ . Finde für jeden Punkt  $x \in E$  also eine offene Kugel  $D_{r_x}(x) \subset U_{\lambda(x)}$ . Schon die Kugeln  $D_{r_x/2}(x)$  bilden eine offene Überdeckung von  $E$ . Weil  $E$  kompakt ist, finde endlich viele Punkte  $x_i \in E$ , so dass schon die endlich vielen Kugeln  $D_{r_{x_i}/2}(x_i)$  den Raum  $E$  überdecken. Setze  $\rho$  gleich dem Minimum der  $r_{x_i}/2$ .

Dann leistet dieses  $\rho$  das Gewünschte: sei  $x \in E$  beliebig. Dann liegt  $x$  in einer der Kugeln  $D_{r_{x_i}/2}(x_i)$ . Für jedes  $y \in D_\rho(x)$  gilt wegen  $d(x, y) < \rho$  nach der Dreiecksungleichung

$$d(y, x_i) \leq d(x, y) + d(x, x_i) < \rho + r_{x_i}/2 \leq r_{x_i} ,$$

wobei wir  $\rho \leq r_{x_i}/2$  benutzt haben. Daher ist  $D_\rho(x) \subset D_{r_{x_i}}(x_i)$ . Nach Konstruktion liegt aber  $D_{r_{x_i}}(x_i)$  in einer offenen Menge  $U_\lambda$ . □

Wir bereiten nun einen zentralen Satz der Funktionentheorie vor. Er gilt für Funktionen auf  $\mathbb{C}$ , die lokal eine komplexe Stammfunktion haben. Dies gilt nach Satz 2.2.10 für analytische Funktionen. Wir überlegen uns nun, dass auch holomorphe Funktionen lokal Stammfunktionen haben. Dafür brauchen wir ein wenig Vorbereitung:

**Definition 2.3.11**

1. Es seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Dann bezeichnen wir die von  $z_1, z_2$  und  $z_3$  aufgespannte abgeschlossene Dreiecksfläche mit

$$\Delta_{z_1, z_2, z_3} := \{z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\} .$$

Wir wollen annehmen, dass solche Dreiecke nie ausgeartet sind.

2. Wir bezeichnen mit  $C_{z_1, z_2, z_3}$  den Rand von  $\Delta_{z_1, z_2, z_3}$  genau einmal durchlaufen, angefangen bei  $z_1$ , weiter nach  $z_2$  und über  $z_3$  zurück nach  $z_1$ . Offenbar ist dies ein geschlossener Weg.

**Satz 2.3.12** (Cauchy, Goursat).

Sei  $E$  ein komplexer Banachraum. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow E$  holomorph. Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  derart, dass die abgeschlossene Dreiecksfläche  $\Delta_{z_1, z_2, z_3}$  ganz in  $U$  enthalten ist. Dann ist

$$\int_{C_{z_1, z_2, z_3}} f(z) dz = 0 .$$

**Beweis.**

- Wir setzen  $\Delta := \Delta_{z_1, z_2, z_3}$  und  $C := C_{z_1, z_2, z_3}$ . Wir verbinden die Mittelpunkte der Kanten von  $\Delta$  mit Strecken und zerlegen so das Dreieck in vier Dreiecke  $\Delta_i$  mit Rändern  $C_i$ , wobei  $i \in \{I, II, III, IV\}$ . Offenbar gilt dann

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_I} f(z)dz + \int_{C_{II}} f(z)dz + \int_{C_{III}} f(z)dz + \int_{C_{IV}} f(z)dz ,$$

da die inneren Strecken zweimal mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden und sich daher die entsprechenden Terme wegheben. Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right| ,$$

wobei wir mit  $C_1$  dasjenige der vier Dreiecke bezeichnen, für das das Integral den größten Absolutbetrag hat.

- Indem man das Dreieck  $C_1$  wieder in vier Dreiecke zerlegt, findet man ähnlich ein Unterdreieck  $\Delta_2$  von  $\Delta_1$ . So fährt man induktiv fort und findet geschachtelte Dreiecke  $\Delta_i \supset \Delta_{i+1} \supset \dots$ . Es gilt

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z)dz \right| . \quad (6)$$

- Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert  $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ . Insbesondere gilt  $z_0 \in U$ . Für jedes  $r > 0$  gibt es überdies  $N = N(r)$ , so dass

$$\Delta_n \subset D_r(z_0) \quad \text{für alle } n \geq N .$$

- Wegen  $z_0 \in U$  ist  $f$  in  $z_0$  komplex differenzierbar. Es existiert also eine auf  $U$  stetige Funktion  $\varphi : U \rightarrow E$ , so dass

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z) \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0) = f'(z_0)$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion  $\varphi$  in  $z_0$  existiert zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|\varphi(z) - f'(z_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } z \text{ mit} \quad |z - z_0| < \delta .$$

- Wir wählen nun  $n$  so groß, dass  $\Delta_n \subset U_\delta(z_0)$  gilt, und zerlegen

$$\int_{C_n} f(z)dz = \int_{C_n} f(z_0)dz + \int_{C_n} f'(z_0)(z - z_0)dz + \int_{C_n} (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)dz .$$

Die ersten beiden Terme sind nach Bemerkung 2.3.7 Null, da für die konstante Funktion und für die Funktion  $z \mapsto z - z_0$  holomorphe Stammfunktionen existieren.

Wir schätzen den dritten Term ab, indem wir bemerken, dass aus  $C_n \subset B_\delta(z_0)$  folgt  $|\varphi(z) - f'(z_0)| < \epsilon$ . Für zwei Punkte  $z, z_0 \in C_n$  folgt elementar  $|z - z_0| \leq l(C_n)$ , wobei  $l(C_n)$  die Länge des Dreieckszugs ist. Daher ist

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \leq \epsilon l(C_n)^2 .$$

Ebenso sieht man elementar  $l(C_{n+1}) = \frac{1}{2}l(C_n)$ . Daher folgt

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \leq \epsilon \frac{1}{4^n} l(C)^2 .$$

Zusammen mit Gleichung (6) folgt

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \epsilon l(C)^2 .$$

Dies gilt für jedes  $\epsilon > 0$ , woraus die Behauptung folgt. □

Wir können nun schließen:

**Satz 2.3.13.**

Sei  $K \subset \mathbb{C}$  eine konvexe offene Menge und  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion, so dass für jedes Dreieck  $\Delta \subset K$  die Beziehung

$$(*) \quad \int_{C_{z_1, z_2, z_3}} f(z) dz = 0 .$$

gilt. Dann besitzt  $f$  auf  $K$  eine holomorphe Stammfunktion. Genauer ist für jedes  $a \in K$  die für  $z \in K$  durch Integration über die Strecke  $[a, z] \in K$  gewonnene Funktion

$$F(z) := \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta$$

eine Stammfunktion.

**Beweis.**

Sei  $h \in \mathbb{C}$  so klein gewählt, dass die Punkte  $z, z+h \in K$  in  $k$  liegen; betrachte das Dreieck mit Eckpunkten  $a, z, z+H$  in  $K$ . Es gilt wegen der Voraussetzung (\*)

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta .$$

Daraus folgt

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \frac{1}{|h|} \left| \int_{[z, z+h]} d\zeta (f(\zeta) - f(z)) \right| \leq \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| .$$

Für  $h \rightarrow 0$  folgt wegen der Stetigkeit von  $f$ , dass  $F' = f$ . □

**Korollar 2.3.14.**

Jede holomorphe Funktion hat eine lokale holomorphe Stammfunktion.

**Bemerkung 2.3.15.**

Man mag sich fragen, warum wir für diesen Satz einen so großen Aufwand getrieben haben. Denn sei  $f$  komplex differenzierbar und betrachte die komplexwertige Einsform

$$\omega = f dz = (u + iv)(dx + idy)$$

auf  $U$ , wobei  $u, v$  wieder reellwertige Funktionen sind. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} d\omega &= (u_y + iv_y)(dy \wedge dx) + i(u_x + iv_x)dx \wedge dy \\ &= (-u_y - v_x)dx \wedge dy + i(-v_y + u_x)dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Wenn wir *wüssten*, dass  $f$  stetig differenzierbar ist, so wäre  $\omega$  geschlossen und nach dem Lemma von Poincaré 1.2.17 lokal exakt. Wir hatten aber keine Annahmen über die Stetigkeit der Ableitungen gemacht.

Auf einer kleinen Umgebung  $U$  schreiben wir dann  $\omega = dF$  und schließen für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$  mit Hilfe des Satzes von Stokes 1.2.33 wie in Korollar 1.2.34:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dF = 0 .$$

Indem man dann geschlossene Wege “aneinander baut”, kommt man zu der Behauptung des folgenden Theorems:

**Theorem 2.3.16** (Cauchyscher Integralsatz).

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f$  eine holomorphe Abbildung von  $U$  in einen komplexen Banachraum  $E$ . Sind  $\Gamma_1, \Gamma_2$  zwei geschlossene Wege in  $U$ , die innerhalb  $U$  homotop sind, so gilt

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Damit ist der Wert eines komplexen Wegintegrals als Invariante der Homotopieklasse des Weges identifiziert. Er ist tatsächlich sogar eine Invariante der Homologieklasse, was wir aber in dieser Vorlesung weder herleiten noch benutzen werden.

Eigentlich ist dies ein Satz über die Homotopie-Invarianz des Kurvenintegrals lokal exakter Einsformen, der allgemein für Einsformen im  $\mathbb{R}^n$  gilt, vgl. [K2, §5.5].

**Beweis.**

- Seien die beiden geschlossenen Kurven  $\Gamma_1, \Gamma_2$  auf  $I = [a, b]$  definiert und sei  $\varphi$  eine auf  $I \times [\alpha, \beta]$  definierte Homotopie von  $\Gamma_1$  nach  $\Gamma_2$  in  $U$ . Da  $\varphi$  stetig ist, ist  $L := \varphi(I \times [\alpha, \beta])$  eine in  $U$  enthaltene kompakte Menge. Es existieren nach Korollar 2.3.14 endlich viele Punkte  $a_k$  mit  $1 \leq k \leq m$  in  $L$  und zu jedem  $k$  eine Kreisscheibe  $D_{r_k}(a_k) \subset U$ , so dass gilt:

1. Die endlich vielen Kreisscheiben überdecken die kompakte Menge  $L$ .
2. Auf jeder Kreisscheibe hat  $f(z)$  eine holomorphe Stammfunktion.

- Nun existiert nach der Lebesgueschen Eigenschaft 2.3.10 ein  $\rho > 0$ , so dass für jedes  $x \in L$  die offene Kreisscheibe um  $x$  mit Radius  $\rho$  in mindestens einer dieser Kreisscheiben enthalten ist. Die Funktion  $f(z)$  hat also für jedes  $x \in L$  auf der offenen Kreisscheibe  $D_{\rho}(x)$  eine Stammfunktion.
- Da die stetige Abbildung  $\varphi$  auf dem Kompaktum  $I \times [\alpha, \beta]$  gleichmäßig stetig ist, existiert ein  $\epsilon > 0$  derart, dass aus

$$|t - t'| \leq \epsilon \text{ und } |\xi - \xi'| \leq \epsilon$$

die Ungleichung  $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| \leq \rho/4$  folgt. Wir zerlegen daher die Intervalle durch Zwischenpunkte:

- finde  $t_0 = a < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$  mit  $t_{i+1} - t_i \leq \epsilon$ .
- finde  $\xi_0 = \alpha < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_s = \beta$  mit  $\xi_{j+1} - \xi_j \leq \epsilon$ .

- Definiere für  $1 \leq j \leq s - 1$  Streckenzüge durch

$$\gamma_j(t) = \varphi(t_i, \xi_j) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (\varphi(t_{i+1}, \xi_j) - \varphi(t_i, \xi_j))$$



für  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  und  $0 \leq i \leq r-1$ . Ferner sei  $\gamma_0 = \Gamma_1$  und  $\gamma_s = \Gamma_2$ . Dies sind alles geschlossene Wege in  $U$ . Wir wollen die Behauptung dadurch zeigen, dass wir zeigen

$$\int_{\gamma_j} f(z)dz = \int_{\gamma_{j+1}} f(z)dz$$

für alle  $0 \leq j \leq s-1$ .

- Wir haben die Situation so eingerichtet, dass alle Punkte

$$\gamma_j(t) \text{ und } \gamma_{j+1}(t) \text{ mit } t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

in der offenen Kugel  $Q_{ij} := D_\rho(\varphi(t_i, \xi_j))$  liegen. Wir finden Stammfunktionen  $g_{ij}$  auf  $Q_{ij}$ , für die auf  $Q_{ij}$  gilt  $g'_{ij}(z) = f(z)$ . Da  $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$  nicht leer und zusammenhängend ist, ist die Differenz  $g_{i-1,j} - g_{i,j}$  auf dem Durchschnitt konstant.

- Wir rechnen nun mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen 2.1.5 und der Bemerkung nach Satz 2.1.5 für eine holomorphe Funktion  $g = g_1 + ig_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(\gamma(t)) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_1(t) + \frac{\partial g_1}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_2(t) \\ &\quad + i\frac{\partial g_2}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_1(t) + i\frac{\partial g_2}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma'_2(t) \\ &\stackrel{2.1.5}{=} \left( \frac{\partial g_1}{\partial x} + i\frac{\partial g_2}{\partial x} \right) \cdot (\gamma'_1(t) + i\gamma'_2(t)) \\ &= g'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \end{aligned}$$

Damit wird aber nach Bemerkung 2.3.7 das Integral über den Streckenzug  $\gamma_j$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_j} f(z)dz &= \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma_j(t))\gamma'_j(t)dt = \sum_{i=0}^{r-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g'_{ij}(\gamma_j(t))\gamma'_j(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i))) \end{aligned}$$

Wir müssen also nur die Beziehung

$$\sum_{i=0}^{r-1} g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) = \sum_{i=0}^{r-1} g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

für  $0 \leq j \leq s-1$  oder, was äquivalent ist,

$$\sum_{i=0}^{r-1} (g_{ij}(\gamma_j(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_{i+1})) - g_{ij}(\gamma_j(t_i)) + g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i))) = 0$$

beweisen.

- Nun gehören aber  $\gamma_j(t_i)$  und  $\gamma_{j+1}(t_i)$  für  $1 \leq i \leq r-1$  beide zum Durchschnitt  $Q_{i-1,j} \cap Q_{ij}$ , so dass nach der obigen Bemerkung die Differenzen

$$g_{ij}(\gamma_j(t_i)) - g_{ij}(\gamma_{j+1}(t_i)) = g_{i-1,j}(\gamma_j(t_i)) - g_{i-1,j}(\gamma_{j+1}(t_i))$$

gleich sind und sich die zu zeigende Gleichheiten auf die Gleichheiten

$$g_{r-1,j}(\gamma_j(t_r)) - g_{r-1,j}(\gamma_{j+1}(t_r)) - g_{0,j}(\gamma_j(t_0)) + g_{0,j}(\gamma_{j+1}(t_0)) = 0$$

reduziert. Da aber die Wege  $\gamma_j$  und  $\gamma_{j+1}$  geschlossen sind, gilt  $\gamma_j(t_0) = \gamma_j(t_r)$  und  $\gamma_{j+1}(t_0) = \gamma_{j+1}(t_r)$ . Beide Punkte gehören zur zusammenhängenden Menge  $Q_{0,j} \cap Q_{r-1,j}$ . Daher ist die Differenz  $g_{r-1,j} - g_{0,j}$  auf dieser Menge konstant, was die Behauptung zeigt.

□

**Korollar 2.3.17.**

Es seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Wege in einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{C}$  mit dem gleichen Anfangspunkt  $u$  und dem gleichen Endpunkt  $v$ . Es gebe ferner eine Homotopie

$$\varphi : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow U$$

von  $\gamma_1$  in  $\gamma_2$  innerhalb von  $U$ , welche Anfangs- und Endpunkte festlässt,  $\varphi(a, \xi) = u$  und  $\varphi(b, \xi) = v$  für alle  $\xi \in [\alpha, \beta]$ . Dann gilt für jede auf  $U$  holomorphe Funktion  $f$  die Beziehung

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz .$$

**Beweis.**

Der Weg  $\gamma_3(t) := \gamma_1^o(t - b + a)$  mit  $t \in [b, 2b - a]$  ist zu  $\gamma_1^o$  äquivalent. Offenbar sind die Aneinanderreichungen  $\gamma_1 \vee \gamma_3$  und  $\gamma_2 \vee \gamma_3$  jeweils geschlossene Wege. Sie sind auch in  $U$  homotop:

$$\psi(t, \xi) := \begin{cases} \varphi(t, \xi) & \text{für } a \leq t \leq b \\ \gamma_3(t) & \text{für } b \leq t \leq 2b - a \end{cases}$$

ist ein Konturhomotopie innerhalb von  $U$ . Der Cauchysche Integralsatz 2.3.16 liefert

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz$$

und damit die Behauptung. □

**Definition 2.3.18**

Ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$  ist eine zusammenhängende offene Menge mit der Eigenschaft, dass jede geschlossene Kurve in  $U$  innerhalb von  $U$  homotop zu einer geschlossenen Kurve ist, die sich auf einen Punkt reduziert.<sup>2</sup>

**Bemerkungen 2.3.19.**

1. Offenbar ist jede zu einer einfach zusammenhängenden Menge homöomorphe offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet.
2. Ein Gebiet  $U \subset \mathbb{C}$  heißt in Bezug auf den Punkt  $a \in U$  sternförmig, wenn für jedes  $z \in U$  das  $a$  und  $z$  verbindende Segment in  $U$  enthalten ist. Eine solche Menge ist offenbar zusammenhängend. Ist  $\gamma$  irgend eine geschlossene Kurve in  $U$ , dann ist

$$\varphi(t, \xi) = a + (1 - \xi)(\gamma(t) - a)$$

für  $0 \leq \xi \leq 1$  eine Konturhomotopie von  $\gamma$  in eine auf den Punkt  $a$  reduzierte geschlossene Kurve. Also ist ein sternförmiges Gebiet insbesondere einfach zusammenhängend.

3. Eine offene Kugel ist in Bezug auf jeden ihrer Punkte sternförmig und daher einfach zusammenhängend.

---

<sup>2</sup>Es ist hierbei unerheblich, ob man nur Homotopien im engeren Sinn oder, wie wir es tun, auch freie Homotopien zulässt.

4. Die punktierte komplexe Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist weder sternförmig noch einfach zusammenhängend: man betrachte etwa den Weg

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ t &\mapsto \exp(int) \end{aligned}$$

mit  $n \neq 0$ . Wir werden im nächsten Unterkapitel sehen, dass dieser Weg nicht zusammenziehbar ist.

Wir können nun ein weiteres zentrales Resultat der Funktionentheorie festhalten:

**Theorem 2.3.20.**

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet. Dann hat jede auf  $U$  holomorphe Funktion  $f$  eine auf dem ganzen Gebiet  $U$  definierte holomorphe Stammfunktion.

Da analytische Funktionen insbesondere holomorph sind, gilt der Satz insbesondere für alle analytischen Funktionen.

**Beweis.**

- Sind  $a, z$  zwei Punkte aus  $U$  und  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Wege in  $U$  mit Anfangspunkt  $a$  und Endpunkt  $z$ , so können wir, nachdem wir gegebenenfalls  $\gamma_2$  durch einen äquivalenten Weg ersetzen, die Wege  $\gamma_1^0$  und  $\gamma_2$  verketteten und erhalten einen geschlossenen Weg  $\gamma := \gamma_1^0 \vee \gamma_2$  in  $U$ . Weil  $U$  als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, ist dieser Weg zu einem Punkt in  $U$  homotop. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt  $\int_{\gamma} f(x)dx = 0$ . Daher gilt

$$\int_{\gamma_1} f(x)dx = \int_{\gamma_2} f(x)dx .$$

- Wir können demnach auf ganz  $U$  eine Funktion  $g(z)$  definieren, indem wir einen Punkt  $a \in U$  wählen und für jeden Punkt  $z \in U$  einen beliebigen Weg  $\gamma_z$  von  $a$  nach  $z$ . Dann setzen wir  $g(z) = \int_{\gamma_z} f(x)dx$ . Man zeigt dann wie im Beweis von Satz 2.3.13, dass diese Funktion eine komplexe Stammfunktion von  $f$  ist.

□

Man kann umgekehrt zeigen: hat auf einem Gebiet jede analytische Funktion eine Stammfunktion, so ist das Gebiet einfach zusammenhängend.

## 2.4 Die Cauchysche Integralformel

Wir beginnen mit einem vorbereitenden Lemma:

**Lemma 2.4.1.**

Für jeden Punkt  $a \in \mathbb{C}$  und jeden in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  enthaltenen geschlossenen Weg  $\gamma$  nimmt das Wegintegral  $\int_{\gamma} dz/(z - a)$  Werte in  $2\pi i\mathbb{Z}$  an.

**Beweis.**

Der Weg  $\gamma$  sei auf dem Intervall  $I = [b, c]$  definiert. Betrachte auf  $I$  die Funktion

$$h(t) := \int_b^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - a} .$$

Diese Funktion hat auf  $I$  die Ableitung

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a},$$

mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Teilmenge. Für die Funktion

$$g(t) := e^{-h(t)} (\gamma(t) - a)$$

folgt somit

$$g'(t) = e^{-h(t)} (-\gamma'(t) + \gamma'(t)) = 0.$$

Daher ist  $g(t)$  konstant und wir finden mit  $h(b) = 0$  die Gleichung  $g(b) = \gamma(b) - a$ , also

$$e^{h(t)} = \frac{\gamma(t) - a}{\gamma(b) - a}.$$

Nun ist aber der Weg  $\gamma$  geschlossen,  $\gamma(b) = \gamma(c)$ , und daher  $\exp(h(c)) = 1$ . Damit ist  $h(c) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ .  $\square$

### Definition 2.4.2

Die ganze Zahl

$$j(a; \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dz/(z - a) \in \mathbb{Z}$$

heißt der Index oder die Windungszahl des Punktes  $a$  in Bezug auf den Weg  $\gamma$  oder auch der Index des Weges  $\gamma$  in Bezug auf den Punkt  $a$ .

Aus dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 folgt sofort, dass zwei geschlossene Wege in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ , die in dieser Menge homotop sind, den gleichen Index in Bezug auf  $a$  haben.

Halten wir umgekehrt den Weg fest, so finden wir:

### Lemma 2.4.3.

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg. Der Index  $j(a; \gamma)$  ist auf jeder Zusammenhangskomponente des Komplements  $A := \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$  der kompakten Menge  $\gamma(I)$  konstant.

### Beweis.

Sei  $B$  eine in der offenen Menge  $A$  enthaltene offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$ . Wähle  $h \in \mathbb{C}$  mit  $|h| < r$ . Dann gehört  $x + h$  nicht zu  $\gamma(I)$ ; daher erhalten wir durch eine Verschiebung um  $-h$

$$j(x + h; \gamma) = j(x; \gamma_1)$$

mit dem geschlossenen Weg  $\gamma_1 : t \rightarrow \gamma(t) - h$ . Dann ist aber die Familie von Verschiebungen

$$\begin{aligned} \varphi : I \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{x\} \\ (t, \xi) &\mapsto \gamma(t) - \xi h \end{aligned}$$

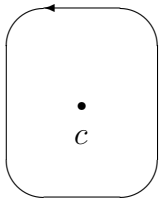
eine Konturhomotopie von  $\gamma$  in  $\gamma_1$  innerhalb  $\mathbb{C} \setminus \{x\}$ . Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 ist daher  $j(x; \gamma) = j(x, \gamma_1) = j(x + h; \gamma)$ ; der Index ist also lokal konstant im ersten Argument.  $\square$

### Beispiel 2.4.4.

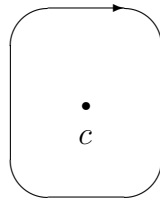
- Wir betrachten den geschlossenen Weg

$$\begin{aligned} \epsilon_n : I = [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{int}, \end{aligned}$$

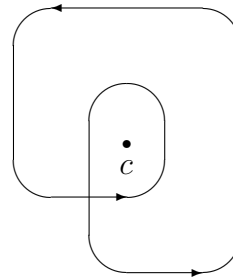
dessen Bild der Einheitskreis  $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  ist. Der Weg  $\epsilon_n$  heißt der  $n$ -fach durchlaufene Einheitskreis.



1 mal



-1 mal



2 mal

- Die Menge  $\mathbb{C} \setminus S^1$  hat offenbar zwei Zusammenhangskomponenten:

$$B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \quad \text{und} \quad E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$$

Denn als sternförmiges Gebiet ist die offene Kreisscheibe  $B$  zusammenhängend.  $E$  ist zusammenhängend als Bild von  $(1, +\infty) \times [0, 2\pi]$  unter der stetigen Abbildung  $(x, t) \mapsto xe^{it}$ . Beide Mengen sind in  $\mathbb{C} \setminus S^1$  sowohl offen als auch abgeschlossen.

- Aus der Definition folgt sofort

$$j(0; \epsilon_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ine^{int}}{e^{int}} dt = n$$

Also ist nach Lemma 2.4.3  $j(z; \epsilon_n) = n$  für jedes  $z \in B$ . Da nach dem Cauchyschen Integralsatz homotope Wege gleichen Index haben, folgt, dass für  $n \neq m$  die Wege  $\epsilon_n$  und  $\epsilon_m$  nicht homotop sein können.

- Die Aussage  $j(z; \epsilon_n) = 0$  für alle  $z \in E$  folgt aus dem folgenden allgemeineren Lemma.

**Lemma 2.4.5.**

Ist ein geschlossener Weg  $\gamma$  in einer abgeschlossenen Kreisscheibe  $\overline{D_r(a)}$  enthalten, so ist  $j(z; \gamma) = 0$  für jedes  $z$  mit  $|z - a| > r$ .

Wir haben eine einfache Folgerung:

**Korollar 2.4.6.**

Für jeden auf  $I$  definierten geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  ist die Menge der Punkte  $x \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ , für welche  $j(x; \gamma) \neq 0$  ist, in  $\mathbb{C}$  relativ kompakt.

**Beweis.**

Diese Menge ist nämlich nach dem vorangegangenen Lemma 2.4.5 in jeder die kompakte Menge  $\gamma(I)$  umfassenden abgeschlossenen Kreisscheibe enthalten.  $\square$

Wir halten schließlich noch fest:

**Satz 2.4.7.**

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet und  $\gamma : I \rightarrow U$  ein geschlossener Weg in  $U$ . Dann gilt für jeden Punkt  $x \in \mathbb{C} \setminus U$  die Beziehung  $j(x; \gamma) = 0$ .

**Beweis.**

Nach Voraussetzung gibt es ein kompaktes Intervall  $J \subset \mathbb{R}$  und eine Konturhomotopie  $\varphi : I \times J \rightarrow U$  von  $\gamma$  auf einen sich auf einen Punkt reduzierenden geschlossenen Weg  $\gamma_0$ . Wegen  $x \notin \varphi(I \times J)$  folgt nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 die Beziehung

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-x} = \int_{\gamma_0} \frac{dz}{z-x} = 0 .$$

□

Der Weg  $\epsilon_n$  in der punktierten komplexen Ebene  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  aus Beispiel 2.4.4 hat Index  $j(0; \epsilon_n) = n$ . Daher kann die punktierte Ebene nicht einfach zusammenhängend sein.

Wir kommen nun zu einem weiteren zentralen Satz der Funktionentheorie:

**Theorem 2.4.8** (Cauchysche Integralformel).

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet und  $E$  ein komplexer Banachraum. Sei ferner  $f : U \rightarrow E$  eine holomorphe Abbildung. (Dies schließt wegen Korollar 2.2.14 den Fall ein, dass  $f$  analytisch ist.) Dann gilt für jeden auf einem kompakten Intervall  $I$  definierten geschlossenen Weg  $\gamma$  in  $U$  und jedes  $x \in U \setminus \gamma(I)$  die Beziehung

$$j(x; \gamma)f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-x} .$$

Eine holomorphe Funktion ist also insbesondere auf einer Kreisscheibe durch ihren Mittelwert auf dem Rand der Kreisscheibe festgelegt.

Ein entsprechender Satz gilt allgemein für harmonische Funktionen, und es sind ja nach Korollar 2.1.7 die reellwertigen beiden Funktionen  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  harmonisch, wenn  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist.

**Beweis.**

- Zum Beweis betrachten wir die auf  $U$  folgendermaßen definierte Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(x)}{z-x} & \text{für } z \neq x \\ f'(x) & \text{für } z = x \end{cases}$$

Man überlegt sich, dass diese Funktion stetig und für  $z \neq x$  holomorph ist.

- Da  $U$  einfach zusammenhängend ist, betrachte eine Homotopie  $\varphi : I \times [0, 1] \rightarrow U$  von  $\gamma$  auf den konstanten Weg in  $x$ . Hierbei gelte  $x \notin \gamma_{\epsilon}(I)$  für  $\epsilon \neq 0$ .

Für  $\epsilon > 0$  betrachte den Weg  $\gamma_{\epsilon}(t) = \varphi(t, \epsilon)$  der zu  $\gamma$  homotop ist. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 gilt für jedes  $\epsilon > 0$

$$\int_{\gamma} g(z)dz = \int_{\gamma_{\epsilon}} g(z)dz .$$

Da  $g$  stetig ist, finden wir hinreichend kleine  $\epsilon$  ein Schranke  $|g(z)| \leq M$  für alle  $z$  auf  $\gamma_\epsilon$ . Daher gilt für das rechte Integral

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz \right| \leq M \ell(\gamma_\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

und auch das linke Integral muss verschwinden. Schreiben wir

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-x} - f(x) \frac{1}{z-x}$$

so folgt die Behauptung aus der Definition des Index. □

Wir brauchen die Abschätzungen im folgenden Satz:

**Satz 2.4.9.**

Sei  $\gamma : I = [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$  ein geschlossener Weg in  $\mathbb{C}$  und  $g$  eine stetige Abbildung von  $\gamma(I)$  in einen komplexen Banachraum  $E$ . Dann ist die Funktion

$$f(z) := \int_{\gamma} \frac{g(x) dx}{x-z}$$

mit Werten in  $E$  auf dem Komplement des Bildes  $\gamma(I)$  definiert und analytisch.

Genauer gesagt setzen wir für einen beliebigen Punkt  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$

$$c_k := \int_{\gamma} \frac{g(x) dx}{(x-a)^{k+1}} \in E .$$

Dann ist die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$  konvergent auf jeder offenen Kreisscheibe  $B_r(a) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$  und ihre Summe ist gleich  $f(z)$ .

**Beweis.**

Sei  $\delta > 0$  der Abstand von  $a$  zur Spur von  $\gamma$ :

$$\delta := d(a, \gamma(I)) = \min_{t \in I} d(a, \gamma(t)) .$$

Gilt für  $z \in \mathbb{C}$  die Ungleichung  $|z-a| \leq q \cdot \delta$  mit einer geeigneten reellen Zahl  $0 < q < 1$ , so gilt für jeden Kurvenpunkt  $x \in \gamma(I)$  die Beziehung

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{(x-a) \left(1 - \frac{z-a}{x-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} ;$$

diese Reihe konvergiert, weil sie wegen der Abschätzung

$$\left| \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{\delta} q^n$$

eine geometrische Reihe als Majorante hat.

Die Funktion  $g$  soll stetig sein und  $\gamma(I)$  ist kompakt. Daher existiert eine Schranke  $M > 0$  mit  $|g(x)| \leq M$  für alle  $x \in \gamma(I)$ . Da  $\gamma$  stetig differenzierbar ist, gibt es  $m > 0$  mit  $|\gamma'(t)| \leq m$  auf  $I$ . Daher gilt für jedes  $t \in I$  die Ungleichung

$$\left| \frac{\gamma'(t) g(\gamma(t)) (z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{Mm}{\delta} q^n .$$

Daher ist die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{\gamma'(t)g(\gamma(t))(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}$$

für diese  $z$  gleichmäßig absolut konvergent. Es folgt dann, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  auf der Kreisscheibe  $|z-a| \leq q\delta$  gleichmäßig absolut konvergiert und Summe  $f$  besitzt. Die Funktion  $f$  ist analytisch, da sie die angegebene Potenzreihenentwicklung besitzt, da wir Summation und Integral vertauschen dürfen.  $\square$

**Korollar 2.4.10** (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel).

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $E$  ein komplexer Banachraum. Sei ferner  $f : U \rightarrow E$  eine holomorphe Funktion.

1. Dann kann  $f$  auf jeder offenen Kreisscheibe  $B_r(z_0) \subset U$  als eine absolut konvergente Potenzreihe entwickelt werden. Insbesondere sind holomorphe Funktionen analytisch und auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte holomorphe Funktionen ganz im Sinne von Definition 2.2.9.2.
2. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg  $\gamma : I \rightarrow U$  und jedes  $z \in U \setminus \gamma(I)$  und jedes  $k \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$j(z; \gamma)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{(x-z)^{k+1}}$$

**Beweis.**

1. Wir rechnen mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel 2.4.8

$$\begin{aligned} 2\pi i j(z, \gamma)f(z) &= \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{x-z} = \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{(x-z_0) - (z-z_0)} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{(x-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{x-z_0}\right)} \\ &= \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} f(x)dx \frac{(z-z_0)^k}{(x-z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{(x-z_0)^{k+1}} \right) (z-z_0)^k \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die absolute Konvergenz aus Satz 2.4.9 angewendet haben, um Summe und Integral zu vertauschen. Hieraus folgt die Analytizität von  $f$ .

2. Sei  $z_0 \in U \setminus \gamma(I)$ . Da  $f$  analytisch ist, gibt es  $\delta > 0$ , so dass für alle  $z$  mit  $|z-z_0| < \delta$  nach Bemerkung 2.2.13 die Reihe

$$j(z; \gamma)f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} j(z; \gamma) \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

konvergiert. Wegen des Eindeutigkeitsatzes Korollar 2.2.7 stimmen die Koeffizienten der Potenzreihen überein, was die behauptete Gleichheit liefert.  $\square$

**Korollar 2.4.11.**



1. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  (einmal) komplex differenzierbar. Dann ist die Funktion  $f$  in  $U$  beliebig oft komplex differenzierbar und somit beliebig oft stetig differenzierbar. Es folgt auch, dass Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion harmonische reellwertige Funktionen sind, vgl. Korollar 2.1.7.
2. Aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen analytischer Funktionen 2.2.6 folgt, dass die Nullstellenmenge einer nicht konstanten holomorphen Funktion diskret ist.

Wir ziehen noch eine Folgerung aus der verallgemeinerten Cauchyschen Integralformel:

**Korollar 2.4.12** (Cauchysche Ungleichungen).

Sei  $E$  ein komplexer Banachraum,  $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$  eine offene Kreisscheibe und  $f : B_r(z_0) \rightarrow E$  eine analytische Funktion. Ferner gebe es eine Schranke  $M > 0$  mit  $|f(z)| \leq M$  für alle  $z \in B_r(z_0)$ . Dann können wir auch für alle Ableitungen von  $f$  eine Schranke angeben:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M \frac{n!}{r^n} .$$

**Beweis.**

Wir wählen  $0 < \rho < r$  und betrachten den geschlossenen Weg

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow B_r(z_0) \\ t &\mapsto z_0 + \rho e^{2\pi i t} . \end{aligned}$$

Wir wenden die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel 2.4.10 auf diesen Weg an und schließen mit  $j(z_0; \gamma) = 1$ , vgl. Beispiel 2.4.4

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \\ &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_0^1 \frac{f(z_0 + \rho e^{2\pi i t}) \rho 2\pi i e^{2\pi i t} dt}{(\rho e^{2\pi i t})^{n+1}} \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{\rho^n} 2\pi = M \frac{n!}{\rho^n} \end{aligned}$$

Da dies für alle  $\rho < r$  gilt, folgt die Behauptung. □

**Korollar 2.4.13** (Satz von Liouville).

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow E$  eine auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte holomorphe Funktion mit Werten in einem komplexen Banachraum  $E$ . Es existiere eine natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}_0$  und eine Konstante  $a \geq 0$ , so dass die Abschätzung

$$|f(z)| \leq a(1 + |z|)^N$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt. Dann ist  $f$  eine polynomiale Funktion höchstens  $N$ -ten Grades.

Im Spezialfall  $N = 0$  folgt, dass jede beschränkte ganze Funktion notwendigerweise konstant ist.

**Beweis.**

Schreibe  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  mit Koeffizienten  $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ . Aus der Cauchyschen Ungleichung 2.4.12, angewandt auf die Kreisscheibe  $B_r(0)$ , folgt

$$|c_n| \leq a \frac{(r+1)^N}{r^n} .$$

Da  $r$  bei einer ganzen Funktion beliebig groß gewählt werden kann, folgt  $c_n = 0$  außer für  $n \leq N$ .  $\square$

**Bemerkung 2.4.14.**

Man beachte, dass es nicht konstante *reell-differenzierbare* Funktionen wie zum Beispiel

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und beschränkt sind.

**Korollar 2.4.15** (Fundamentalsatz der Algebra).

Sei  $p(z)$  ein nicht-konstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat  $p(z)$  eine komplexe Nullstelle.

**Beweis.**

Sei

$$p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \in \mathbb{C}[z]$$

mit  $a_n \neq 0$ . Angenommen, es wäre  $p(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $1/p(z)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph und somit eine ganze Funktion. Sei eine reelle Zahl  $r$  so gewählt, dass für alle  $0 \leq k \leq n - 1$  die Ungleichung

$$r^{n-k} \geq (n + 1) \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$$

gilt. Wir schätzen damit ab für  $|z| \geq r$ :

$$\left| \frac{a_k}{a_n z^{n-k}} \right| \leq \frac{r^{n-k}}{r^{n-1}(n + 1)}$$

und somit

$$|p(z)| = |a_n z^n| \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq |a_n z^n| \cdot \left( 1 - \frac{n}{n + 1} \right) \geq |a_n| \frac{r^n}{n + 1}$$

so dass die ganze Funktion  $1/p$  für  $|z| \geq r$  beschränkt ist. Als stetige Funktion ist aber  $p$  auf der kompakten Menge  $|z| \leq r$  ohnehin beschränkt, so dass  $1/p$  auf ganz  $\mathbb{C}$  beschränkt und somit nach dem Satz von Liouville 2.4.13 konstant wäre. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.  $\square$

## 2.5 Laurentzerlegung

Der Satz von Liouville zeigt, dass es “wenige” holomorphe Funktionen gibt; zum Beispiel gibt es wenige auf  $\mathbb{C}$  doppelt-periodische Funktionen. Es ist daher wichtig, eine größere Funktionenklasse zur Verfügung zu haben. Dazu lassen wir einzelne Punkte einem Gebiet der komplexen Ebene zu, an denen eine holomorphe Funktion nicht definiert sein muss. Dies führt uns dazu, ringförmige Gebiete zu betrachten.

**Lemma 2.5.1.**

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $0 < r_0 < r_1$  reelle Zahlen. Der offene Ring oder das Ringgebiet

$$S_{r_0 r_1} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z| < r_1\}$$

sei so gewählt, dass sein Abschluss  $\overline{S_{r_0 r_1}}$  in  $U$  enthalten ist. Dann gilt für jede analytische Abbildung  $f : U \rightarrow E$  in einen komplexen Banachraum  $E$  für jedes  $z \in S_{r_0 r_1}$  die Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(x)dx}{x-z},$$

mit geschlossenen Wegen

$$\gamma_0(t) = r_0 e^{it} \quad \text{und} \quad \gamma_1(t) = r_1 e^{it}$$

wobei  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

### Beweis.

Wie beim Beweis der Cauchyschen Integralformel 2.4.8 bemerken wir, dass die durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(z)}{x-z} & \text{für } x \neq z \\ f'(z) & \text{für } x = z \end{cases}$$

auf  $U$  definierte Funktion  $g$  auf dem Ringgebiet  $S_{r_0 r_1}$  analytisch ist. Nun ist

$$\varphi(t, \xi) := \xi r_1 e^{it} + (1 - \xi) r_0 e^{it}$$

für  $0 \leq t \leq 2\pi$  und  $0 \leq \xi \leq 1$  eine Konturhomotopie von  $\gamma_0$  in  $\gamma_1$  innerhalb  $U$ . Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 ist also

$$\int_{\gamma_0} g(x)dx = \int_{\gamma_1} g(x)dx.$$

Für einen Punkt  $z$  mit  $r_0 < |z| < r_1$  ist aber  $j(z; \gamma_0) = 0$  nach Lemma 2.4.5 und  $j(z; \gamma_1) = 1$  nach Beispiel 2.4.4. Aus

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(x)dx}{x-z} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_0} \frac{dx}{x-z}}_{=0} = \int_{\gamma_1} \frac{f(x)dx}{x-z} - f(z) \underbrace{\int_{\gamma_1} \frac{dx}{x-z}}_{=2\pi i}$$

folgt die Behauptung. □

Damit ergibt sich:

### Satz 2.5.2 (Entwicklung auf Ringgebieten).

1. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Lemma 2.5.1 existieren eine für  $|z| < r_1$  konvergente Potenzreihe  $g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  und eine für  $|z| > r_0$  konvergente Potenzreihe  $g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$  in  $1/z$  ohne konstantes Glied derart, dass auf dem Ringgebiet  $S_{r_0 r_1}$  die Beziehung

$$f(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

gilt.

2. Die Potenzreihen mit diesen Eigenschaften sind eindeutig bestimmt.
3. Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  im Abschluss des Ringgebiets  $\overline{S_{r_0 r_1}}$  gelten die Beziehungen

$$j(0; \gamma)c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x)dx}{x^{n+1}} \quad \text{und} \quad j(0; \gamma)d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} x^{n-1} f(x)dx$$

**Beweis.**

- Nach Satz 2.4.9 gilt für  $|z| < r_1$  mit  $a = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)dx}{x-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit

$$c_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)dx}{x^{n+1}},$$

wobei die Reihe für  $|z| < r_1$  konvergiert.

Andererseits gilt für  $|z| > r_0$  und  $|x| = r_0$  die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z(1-\frac{x}{z})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{z^n},$$

wobei die rechte Seite für alle  $x$  mit  $|x| = r_0$  für festes  $z$  gleichmäßig absolut konvergiert. Wir dürfen daher Integral und Summe vertauschen und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(x)dx}{z-x} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$$

mit

$$d_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} x^{n-1} f(x) dx,$$

wobei die Reihe für  $|z| > r_0$  konvergiert. Zusammen mit Lemma 2.5.1 folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(x)dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(x)dx}{x-z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n} \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil der Aussage, die Existenzaussage, bewiesen.

- Zur Eindeutigkeit: Nun sei auf dem Ringgebiet  $S_{r_0 r_1}$  eine Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$$

gegeben, wobei beide Reihen auf dem Ringgebiet konvergieren. Zunächst sei  $\gamma$  ein auf einem kompakten Intervall  $I$  definierter geschlossener Weg im Innern des Ringgebiets  $S_{r_0 r_1}$ . Es gibt dann Werte  $t, t' \in I$  mit

$$|\gamma(t)| = \inf_{s \in I} |\gamma(s)| =: r \quad \text{und} \quad |\gamma(t')| = \sup_{s \in I} |\gamma(s)| =: r'$$

Daher gilt

$$r_0 < r \leq |\gamma(s)| \leq r' < r_1$$

für jedes  $s \in I$ . Für  $r \leq |z| \leq r'$  sind die beiden Reihen nach dem abelschen Lemma 2.2.2 gleichmäßig absolut summierbar. Daher gilt nach 2.4.9 für jede ganze Zahl  $m$  die Beziehung

$$\int_{\gamma} z^{m-1} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma} z^{n+m-1} dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\gamma} z^{m-n-1} dz.$$

- Da  $\frac{z^{k+1}}{k+1}$  für  $k \neq -1$  eine komplexe Stammfunktion der Funktion  $z^k$  ist, folgt aus Bemerkung 2.3.7, dass  $\int_{\sigma} z^k dz = 0$  für jeden geschlossenen Weg  $\sigma$  gilt. Die weiteren Gleichungen folgen damit aus der Definition des Index.
- Liegt der Weg  $\gamma$  im Abschluss  $\overline{S_{r_0 r_1}}$  des Ringgebiets, so gibt es einen etwas größeren offenen Ring  $S_{(1-\epsilon)r_0, (1+\epsilon)r_1}$ , der in  $U$  enthalten ist und wir können die eben erlangten Ergebnisse auf dieses Ringgebiet anwenden.

□

Dies führt uns zu der folgenden

### Definition 2.5.3

1. Unter einer unendlichen Reihe der Form  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$  versteht man das Paar von Reihen

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \right) .$$

Eine solche Reihe heißt konvergent, wenn die beiden Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$  konvergieren. Dann heißt ihre Summe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$  der Grenzwert von  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ .

2. Analog führt man die Begriffe der absoluten und der gleichmäßigen Konvergenz für solche Reihen ein.
3. Eine Laurentreihe mit Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  und Werten in einem komplexen Banachraum  $E$  ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n \in E$$

Unsere Ergebnisse liefern uns sofort:

### Satz 2.5.4 (Laurentzerlegung an einem isolierten Punkt).

Es sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $a$  ein isolierter Punkt von  $\mathbb{C} \setminus U$ , d.h. es gibt eine Umgebung  $V$  in  $\mathbb{C}$  von  $a$ , so dass  $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$  gilt. Ferner sei  $r > 0$  so gewählt, dass alle Punkte der abgeschlossenen Kreisscheibe mit  $|z - a| \leq r$  mit Ausnahme von  $a$  in  $U$  liegen.

Sei  $E$  ein komplexer Banachraum und  $f : U \rightarrow E$  eine analytische Abbildung. Dann gilt für alle  $z$  mit  $0 < |z - a| < r$  die Laurentzerlegung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (z - a)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit  $c_{-n} = d_n$  für  $n \geq 1$ . Dabei konvergieren beide Reihen für  $0 < |z - a| < r$  und es ist

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(x) dx}{(x - a)^{n+1}} \quad d_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (x - a)^{n-1} f(x) dx ,$$

wobei  $\gamma$  der geschlossene Weg  $t \mapsto a + re^{it}$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$  ist.

### Beweis.

Dies folgt sofort, indem man Satz 2.5.2 auf den Ring  $\rho < |z - a| < r$  mit beliebig kleinem  $\rho > 0$  anwendet.  $\square$

### Bemerkungen 2.5.5.

1. Wir werden in Satz 2.5.14 sehen, dass die Reihe

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$$

eine *ganze* Funktion mit  $u(0) = 0$  definiert.

2. Ist  $u = 0$ , so stimmt  $f$  auf der offenen Menge  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  mit der Funktion

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

überein. Die Funktion  $g$  ist auf der ganzen offenen Kreisscheibe  $D_r(a)$  analytisch.

3. Ist umgekehrt  $f$  die Einschränkung einer auf der ganzen Kreisscheibe  $D_r(a)$  definierten analytischen Funktion  $f_1$  auf  $U$ , so gilt nach Satz 2.5.4  $f_1 = g$  und somit  $u = 0$ .

### Definition 2.5.6

In der eben beschriebenen Situation mit den eben eingeführten Bezeichnungen definieren wir:

1. Die Funktion  $u(1/(z - a))$  heißt Hauptteil der Funktion  $f$  in der Umgebung von  $a$  oder in  $a$ . Die Funktion  $g(z)$  heißt Nebenteil von  $f$ . Die Zerlegung

$$f(z) = g(z) + u(1/(z - a))$$

heißt Laurentzerlegung der Funktion. Sie ist nach Satz 2.5.4 eindeutig.

2. Ist der Hauptteil  $u \neq 0$ , so sagen wir,  $a$  sei ein isolierter singulärer Punkt von  $f$ .
3. Ist der Hauptteil  $u$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ , so nennen wir  $a$  einen Pol von  $f$  der Ordnung  $n$  oder auch der Polstellenordnung  $n$ .
4. Andernfalls, d.h. wenn es unendlich viele Werte von  $m$  mit  $d_m \neq 0$  gibt, nennen wir  $a$  einen wesentlich singulären Punkt oder eine wesentliche Singularität von  $f$ .
5. Allgemein definieren wir die Ordnung  $\omega(a; f)$  von  $f$  im Punkt  $a$  wie folgt:

- $\omega(a; f) = -\infty$ , wenn  $a$  eine wesentliche Singularität von  $f$  ist.
- $\omega(a; f) = -n$ , wenn  $a$  ein Pol der Ordnung  $n \geq 1$  ist. (Man beachte das Vorzeichen: für Pole ist  $\omega(a; f)$  negativ.)
- $\omega(a; f) = m$ , wenn  $f \neq 0$  und  $u = 0$  ist und in der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ , die für  $0 < |z - a| < r$  gleich  $f(z)$  ist,  $m$  die kleinste ganze Zahl mit  $c_m \neq 0$  ist. Ist  $m > 0$ , so nennen wir auch  $a$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  von  $f$ .
- Schließlich setzen wir noch  $\omega(a; 0) = \infty$  für die konstante Funktion 0.

### Beispiele 2.5.7.

1. Die Funktion  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ , die auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert ist, hat in  $z = 0$  einen Pol der Ordnung 2.
2. Wir tragen ein Beispiel zur Entwicklung auf Ringgebieten nach: Die gebrochen rationale Funktion

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3}$$

ist auf  $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$  definiert. Wir können sie schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}.$$

Wir suchen die Laurententwicklung von  $f$  auf dem Ringgebiet  $S_{1,3}$ . Für  $|z| > 1$  gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$$

Für  $|z| < 3$  gilt dagegen

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Somit gilt auf dem Ringgebiet  $S_{1,3}$  die Zerlegung  $f(z) = g(z) + h(1/z)$  mit der für  $|z| < 1$  konvergente Reihe

$$h(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

und der für  $|z| < 3$  konvergenten Reihe

$$g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}.$$

Man beachte, dass die Funktion  $f$  in  $z = 0$  holomorph ist und daher ihr Hauptteil verschwindet.

Es folgt sofort aus den Definitionen:

### Lemma 2.5.8.

1. Sind sowohl  $f$  als auch  $g$  auf der offenen punktierten Kreisscheibe  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  definierte analytische Funktionen mit Werten in demselben Banachraum, so ist

$$\omega(a; f + g) \geq \min(\omega(a; f), \omega(a; g)).$$

2. Ist eine der Funktionen komplexwertig, so ist  $\omega(a; fg) = \omega(a; f) + \omega(a; g)$ , falls beide Zahlen  $\omega(a; f)$  und  $\omega(a; g)$  endlich sind.
3. Jede auf  $U$  analytische Funktion  $f$ , die in  $a$  endliche Ordnung  $n$  hat, kann eindeutig in der Gestalt

$$f(z) = (z - a)^n f_1(z)$$

geschrieben werden, wobei  $n$  positiv oder negativ sein kann und  $f_1$  auf  $U$  analytisch ist und im Punkt  $a$  Ordnung 0 hat,  $f_1(a) \neq 0$ .

4. Ist  $f$  auf  $U$  analytisch, komplexwertig und von der endlichen Ordnung  $m$ , so folgt aus dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 und dem Einsetzungsprinzip, dass ein  $r'$  mit  $0 < r' < r$  existiert, so dass  $1/f$  auf der offenen punktierten Kreisscheibe  $0 < |z - a| < r'$  analytisch ist. Dann gilt

$$\omega(a; 1/f) = -\omega(a; f) .$$

Es gilt:

**Satz 2.5.9.**

Ist eine Funktion  $f$  mit Werten in einem komplexen Banachraum  $E$  auf der offenen punktierten Kreisscheibe  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  analytisch, so gilt genau dann  $\omega(a; f) \geq n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ , wenn eine Umgebung  $V$  von  $a$  in  $\mathbb{C}$  existiert, so dass die Funktion  $(z - a)^{-n}f(z)$  auf  $V \cap U$  beschränkt ist.

**Beweis.**

- Gelte  $\omega(a; f) \geq n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ . Dann hat die Funktion  $(z - a)^{-n}f(z)$  im Punkt  $a$  nicht-negative Ordnung und ist daher die Einschränkung auf  $U$  einer auf der ganzen Kreisscheibe  $B_r(a)$  definierten analytischen Funktion, die insbesondere stetig ist. Sie ist daher lokal beschränkt.
- Sei umgekehrt  $(z - a)^{-n}f(z)$  auf  $V \cap U$  beschränkt. Wir untersuchen nur den Fall  $n = 0$  und wenden dann das Ergebnis auf die Funktion  $\tilde{f}(z) := (z - a)^{-n}f(z)$  an.

Dann folgt aus Satz 2.5.4 und dem Mittelwertsatz, dass für  $|f(z)| \leq M$  auf  $U$  für jedes  $0 < \rho < r$  die Ungleichung  $|d_m| \leq M\rho^m$  für jedes  $m \geq 1$  erfüllt ist. Da  $\rho$  beliebig gewählt ist, muss  $d_m = 0$  für jedes  $m \geq 1$  sein.

□

**Definition 2.5.10**

Sei eine Funktion  $f$  mit Werten in einem komplexen Banachraum  $E$  auf der offenen punktierten Kreisscheibe  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  analytisch und  $a$  eine Singularität von  $f$ . Dann heißt die Singularität in  $a$  hebbbar, falls sich  $f$  holomorph auf die offene Menge  $U \cup \{a\}$  fortsetzen lässt, d.h. wenn es eine analytische Funktion  $\tilde{f} : U \cup \{a\} \rightarrow E$  gibt mit  $\tilde{f}|_U = f$ .

**Beispiel 2.5.11.**

Die Funktion  $\sin(z)/z$  für  $z \neq 0$  hat in  $z = 0$  eine hebbare Singularität, denn wir können sie holomorph mit Wert 1 fortsetzen.

Wir erhalten als Spezialfall aus Satz 2.5.9 für  $n = 0$  das

**Korollar 2.5.12 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).**

Sei eine Funktion  $f$  mit Werten in einem komplexen Banachraum  $E$  auf der offenen punktierten Kreisscheibe  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  analytisch und  $a$  eine Singularität von  $a$ . Dann ist die Singularität  $a$  genau dann hebbbar, wenn die Funktion  $f$  auf einer Umgebung von  $a$  beschränkt ist.

**Beispiel 2.5.13.**

Sei  $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$ . Dann ist  $z = 0$  keine hebbare Singularität von  $f$ , denn



wegen  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}}} e^x = \infty$  gibt es keine Umgebung  $U$  von  $0$ , so dass  $f$  in  $U \setminus \{0\}$  beschränkt ist. Die Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

zeigt, dass bei  $z = 0$  eine wesentliche Singularität vorliegt.

**Satz 2.5.14.**

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet,  $a$  ein isolierter Punkt von  $\mathbb{C} \setminus U$  und  $f : U \rightarrow E$  eine analytische Abbildung in einen komplexen Banachraum  $E$ . Dann ist der Hauptteil von  $f$  in  $a$  eine ganze Funktion.

**Beweis.**

Wir setzen zur Vereinfachung  $a = 0$ . Wir haben dann nach Satz 2.5.2 die Darstellung mit  $r_0$  hinreichend und dann beliebig klein

$$u(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|w|=r_0} \frac{f(w)dw}{w - \frac{1}{z}}$$

für alle  $|z| < \frac{1}{r_0}$  und  $z \neq 0$ . Weil auch die Funktion  $z \mapsto \frac{1}{z}$  für  $z \neq 0$  holomorph ist, ist nach Satz 2.4.9 die Funktion  $u$  auf  $B_{1/r_0}(0) \setminus \{0\}$  holomorph. Wir müssen noch zeigen, dass sich  $u$  durch  $u(0) = 0$  holomorph fortsetzen lässt. Für  $|w| = r_0$  und  $|z| < \frac{1}{r_0}$  gilt die Abschätzung:

$$\left|w - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z} - w\right| \geq \left|\frac{1}{z}\right| - |w| = \left|\frac{1}{z}\right| - r_0 > 0 .$$

Mit  $M := \max_{|w|=r_0} |f(w)|$  folgt daher

$$|u(z)| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{\left|\frac{1}{z}\right| - r_0} \cdot 2\pi r_0 \rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow 0$$

Insbesondere ist der Hauptteil  $u$  in einer Umgebung von  $0$  beschränkt, hat also nach dem Hebbbarkeitssatz 2.5.12 eine hebbare Singularität bei  $z = 0$ . Also ist  $u$  auf der ganzen offenen Kreisscheibe  $B_{1/r_0}(0)$  holomorph. Der innere Ringradius  $r_0$  kann aber beliebig klein gewählt werden, so dass die Aussage für beliebig große Kreisscheiben gilt. Daher ist die Funktion ganz.  $\square$

Wir halten noch einmal explizit fest:

**Satz 2.5.15.**

Sei eine Funktion  $f$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  auf der offenen Menge  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  analytisch und  $a$  eine Singularität von  $f$ . Dann besitzt  $f$  eine Laurententwicklung  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$  und es gilt

1.  $a$  ist genau dann hebbare Singularität, wenn  $c_n = 0$  für alle  $n < 0$ .
2.  $a$  ist Polstelle der Ordnung  $m \geq 1$ , wenn  $c_{-m} \neq 0$  gilt, aber  $c_n = 0$  für alle  $n < -m$ .
3.  $a$  ist eine wesentliche Singularität, wenn unendlich viele  $n < 0$  existieren mit  $c_n \neq 0$ .

Wir wollen noch im Falle komplexwertiger Funktionen die Situation an wesentlichen Singularitäten beschreiben:

**Theorem 2.5.16** (Satz von Picard).

Sei  $a \in \mathbb{C}$  eine wesentliche Singularität der analytischen Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann sind nur zwei Fälle möglich: Für jede punktierte Umgebung  $\dot{U}$  von  $a$  gilt  $f(\dot{U}) = \mathbb{C}$ , oder es gilt  $f(\dot{U}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$  für genau ein  $c \in \mathbb{C}$ .

Mit anderen Worten: eine analytische Funktion nimmt also in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität  $a$  jeden Wert mit höchstens einer Ausnahme an. Eine komplexwertige Funktion  $f$  ist also "extrem nervös" in der Nähe einer wesentlichen Singularität. Als Beispiel betrachte man die Funktion  $f(z) = e^{1/z}$  um den Punkt  $a = 0$ .

Die für den Beweis dieser Aussage nötigen Methoden können wir allerdings in dieser Vorlesung nicht bereit stellen. Wir verweisen auf Kapitel 10.4 von Reinhold Remmert und Georg Schumacher: Funktionentheorie 2. Dritte, neu bearbeitete Auflage, Springer 2007.

## 2.6 Das Residuum und Berechnung von Integralen

Wir hatten schon im Beweis von Satz 2.5.2 gesehen, dass für jeden geschlossenen Weg  $\sigma$  das Integral  $\int_{\sigma} z^k dz$  für  $k \neq -1$  verschwindet, weil die monomiale Funktion  $z \mapsto z^k$  dann eine Stammfunktion hat. Dies legt eine besondere Rolle des Koeffizienten  $c_{-1}$  in einer Laurententwicklung nahe.

**Definition 2.6.1**

Sei eine Funktion  $f$  mit Werten in einem Banachraum  $E$  auf der offenen Menge  $U := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - a| < r\}$  analytisch und  $a$  eine Singularität von  $f$ . Der Koeffizient  $d_1 \in E$  im Hauptteil von  $f$  wird das Residuum von  $f$  im Punkt  $a$  genannt. Wir schreiben

$$d_1 =: \text{Res}_{z=a} f .$$

**Bemerkungen 2.6.2.**

1. Nach der Koeffizientenformel aus Satz 2.5.2.3 für Laurentreihen ist das Residuum gleich dem Mittelungsintegral

$$\text{Res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz$$

für  $\rho$  klein genug.

2. Ist die Singularität von  $f$  in  $a$  hebbar, so ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.4.9 das Residuum  $\text{Res}_{z=a} f = 0$ .
3. Eine analytische Funktion  $f(z)$  habe einen Pol der Ordnung  $m$  an der Stelle  $z_0$ , so dass wir als Laurentreihe finden

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \dots .$$

Dann hat die Funktion

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \dots$$

eine hebbare Singularität in  $z_0$ . Wir setzen sie holomorph fort. Dann gilt die für praktische Rechnungen wichtige Formel

$$(*) \quad \text{Res}_{z=z_0}(f) \stackrel{\text{def}}{=} a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \right|_{z=z_0} ((z - z_0)^m f(z)) .$$

### Beispiele 2.6.3.

1. Betrachte für  $z \neq 0$  die Funktion  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ . Aus der Reihenentwicklung der cosinus-Funktion

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} \pm \dots$$

für alle  $z \in \mathbb{C}$  folgt  $\text{Res}_{z=0} f = 1$ .

2. Betrachte für  $z \neq 0$  die Funktion  $f(z) = e^{1/z}$ . Wegen der Reihenentwicklung

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

für  $z \neq 0$  folgt  $\text{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1$ .

3. Betrachte für  $z \neq 0$  die Funktion  $f(z) = e^{1/z^2}$ . Aus der gleichen Reihenentwicklung für  $z \neq 0$  folgt  $\text{Res}_{z=0} e^{1/z^2} = 0$ .

4. Sei  $U$  offen in  $\mathbb{C}$  und  $a \in U$ . Die Funktionen  $g, h : U \rightarrow \mathbb{C}$  seien holomorph. Ferner gelte  $g(z_0) \neq 0$  und  $h$  habe in  $z_0$  eine einfache Nullstelle, d.h. es gibt eine Potenzreihenentwicklung  $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$  mit  $h'(z_0) = b_1 \neq 0$ .

Dann existiert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{b_1} \neq 0.$$

und

$$\text{Res}_{z_0} \left( \frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

5. Die Funktion  $f(z) := \frac{z+2}{(z-3)^3(z+3)}$  hat in  $z_0 = 3$  einen dreifachen Pol. Sei

$$g(z) := (z-3)^3 f(z) = \frac{z+2}{z+3} = 1 - \frac{1}{z+3},$$

so ist  $g''(z) = \frac{-2}{(z+3)^3}$ , also wegen (\*)

$$\text{Res}_{z_0=3}(f) = \frac{1}{2!} \frac{-2}{(3+3)^3} = -\frac{1}{216}.$$

Wir können nun einen weiteren klassischen Satz der Funktionentheorie formulieren:

### Theorem 2.6.4 (Residuensatz).

Sei  $U \subset \mathbb{C}$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet,  $(a_n)$  eine endliche oder unendliche Folge verschiedener Punkte von  $U$  und  $S$  die Menge der Punkte dieser Folge. Alle Punkte von  $S$  seien in  $U$  isolierte Punkte.

Ist nun  $f$  eine analytische Abbildung von  $U \setminus S$  in einen komplexen Banachraum  $E$  und  $\gamma$  ein geschlossener Weg in  $U \setminus S$ , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_n j(a_n; \gamma) \text{Res}_{z=a_n}(f).$$

Dabei gibt es auf der rechten Seite nur endliche viele von Null verschiedene Glieder.

### Beweis.

1. Wir können die holomorphe Funktion  $f$  auf alle hebbaeren singulären Punkte in  $S$  analytisch ausdehnen. Wegen  $\text{Res}_{a_n}(f) = 0$  für hebbar singuläre oder nicht-singuläre Punkte tragen solche  $a_n$  zur Summe auf der rechten Seite nicht bei. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass jedes  $a_n \in S$  ein nicht hebbarer singulärer Punkt für  $f$  ist.
2. Als Nächstes wollen wir uns überlegen, dass für jede kompakte Teilmenge  $K \subset U$  der Schnitt  $K \cap S$  höchstens endlich viele Elemente enthält. Denn  $U \setminus S$  ist nach Annahme offen in  $\mathbb{C}$ , also ist  $K \cap S$  abgeschlossen. Somit ist  $K \cap S$  auch kompakt und als kompakte diskrete Menge  $K \cap S$  endlich.
3. Es sei  $I$  das Intervall, auf dem der Weg  $\gamma$  definiert ist. Sei

$$P := \{z \in U \mid j(z; \gamma) \neq 0\}$$

die Menge der Punkte, die in Bezug auf den Weg  $\gamma$  nicht-verschwindenden Index haben. Nach Korollar 2.4.6 ist der Abschluss  $\bar{P}$  von  $P$  beschränkt und somit in  $\mathbb{C}$  kompakt.

Wir beschreiben diesen Abschluss  $\bar{P}$  noch etwas genauer: Da die Menge der Punkte in  $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ , in denen der Index einen gegebenen Wert annimmt, nach Lemma 2.4.3 offen ist, liegen die Punkte des Abschluss  $\bar{P}$  entweder auf dem Weg  $\gamma(I)$  oder in der offenen Menge  $P$ .

4. Wir überlegen uns schließlich, dass die abgeschlossene Menge  $\bar{P}$  in der offenen Menge  $U$  enthalten ist. Andernfalls gäbe es in  $\bar{P}$  einen Randpunkt von  $U$ . Dieser müsste nach dem letzten Resultat in Punkt 3 entweder auf der Kurve  $\gamma(I)$  liegen, was nach Voraussetzung über  $\gamma$  nicht sein kann, oder einen von Null verschiedenen Index in Bezug auf die Kurve  $\gamma$  haben, was nach Satz 2.4.7 nicht sein kann, da der Randpunkt nicht in der offenen Menge  $U$  liegen kann. Also enthält der Abschluss  $\bar{P}$  keinen Randpunkt von  $U$  und es gilt  $\bar{P} \subset U$ . Dies beendet unsere Diskussion der Topologie der Situation.
5. Da  $U$  als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, finden wir eine Konturhomotopie  $\varphi(t, \xi)$  mit  $t \in I$  und  $\xi \in J$  mit  $J$  einem kompakten Intervall von  $\gamma$  innerhalb  $U$  in einen einpunktigen Weg.

Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  ist das Bild  $M := \varphi(I \times J)$  der Konturhomotopie eine kompakte Teilmenge von  $U$ . Man kann sich  $M$  als die Teilmenge von  $U$  vorstellen, die durch die Kurven der Konturhomotopie überstrichen wird.

Auch die endliche Vereinigung  $M \cup \bar{P}$  ist kompakt. Es sei  $H \subset \mathbb{N}$  die Menge natürlicher Zahlen, für die  $a_n \in M \cup \bar{P}$  gilt. Sie ist nach 2. endlich. Dies sind also die Indizes der Singularitäten von  $f$ , die im Bild der Konturhomotopie liegen oder deren Index in Bezug auf  $\gamma$  nicht verschwindet.

Für jedes  $n \in H$  sei  $u_n$  der Hauptteil von  $f$  im Punkte  $a_n$ . Man beachte, dass wegen Satz 2.5.14 der Hauptteil  $u_n$  eine ganze Funktion ist.

6. Mit  $B$  bezeichnen wir

$$B := U \setminus \bigcup_{n \in H} \{a_n\}.$$

Jede in  $U$  enthaltene kompakte Umgebung eines beliebigen Punktes  $x \in B$  hat wegen 2. einen endlichen Durchschnitt mit  $S$ . Daher ist eine hinreichend kleine Umgebung von  $x \in B$  in  $B$  enthalten; die Menge  $B$  ist somit offen.

7. Da  $H$  nach 5. endlich ist, ist die Menge  $B \setminus \cup_{n \in H} \{a_n\}$  offen. Wir betrachten auf ihr die Funktion

$$g(z) := f(z) - \sum_{n \in H} u_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right)$$

Die Pole von  $f$  in  $U$  liegen in  $S = \cup_{n \notin H} \{a_n\} \dot{\cup} \cup_{n \in H} \{a_n\}$ . Die erste Teilmenge liegt nicht in  $B$ , nach Definition von  $B$ . An den endlich vielen Punkten der zweiten Teilmenge hebt sich der Hauptteil von  $f$  gegen einen der Summanden weg. Daher lässt sich die Funktion  $g$  zu einer auf ganz  $B$  holomorphen Funktion fortsetzen.

Nach Definition von  $B$  gilt für das Bild  $M$  der Homotopie  $M \subset B$ , denn wir hatten bei der Konstruktion von  $B$  nur die  $a_n$  entfernt, die nicht in  $M$  liegen. Daher ist  $\gamma$  sogar innerhalb der offenen Menge  $B$  zu einem einpunktigen Weg homotop. Nach dem Cauchyschen Integralsatz 2.3.16 gilt  $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$ , also

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n \in H} \int_{\gamma} u_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right) dz .$$

8. Betrachte nun jede der endlich vielen Funktionen  $u_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right)$  in einem offenen Ring um  $a_n$ , der  $\gamma(I)$  enthält, so ergibt sich die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u_n \left( \frac{1}{z - a_n} \right) dz &= \int_{\gamma} \left( \sum_{j=-1}^{-\infty} u_{n,j} (z - a_n)^j \right) dz \\ &= \sum_{j=-1}^{-\infty} \left( u_{n,j} \int_{\gamma} (z - a_n)^j dz \right) \\ &= 2\pi i \cdot u_{n,-1} \cdot j(a_n; \gamma) = 2\pi i \cdot j(a_n; \gamma) \cdot \text{Res}_{a_n}(f) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst ausgenützt, dass auf der kompakten Menge  $\gamma(I)$  die Laurent-Entwicklung gleichmäßig konvergiert, so dass wir Integration und Summation vertauschen dürfen. Das Integral  $\int_{\gamma} (z - a_n)^j dz$  verschwindet für  $j \neq -1$ , da dann der Integrand die komplexe Stammfunktion  $(z - a_n)^{j+1} / (j + 1)$  hat.

□

Der Residuensatz erlaubt es, explizit bestimmte Integrale auszurechnen, die zum Teil im Rahmen der reellen Analysis nicht elementar zugänglich sind. Wir diskutieren fünf Beispielsklassen.

**Korollar 2.6.5** (Typ 1).

Seien  $p(x, y)$  und  $q(x, y)$  Polynome mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten in zwei Unbestimmten. Sei  $q(x, y) \neq 0$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 + y^2 = 1$ .

Setze

$$R(x, y) := \frac{p(x, y)}{q(x, y)} .$$

Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{a \in B_1(0)} \text{Res}_{z=a}(f) ,$$

wobei  $f$  die rationale Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

ist. Man beachte, dass in der Summe wieder tatsächlich nur endlich viele Terme beitragen.

**Beweis.**

- Für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| = 1$  ist  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  und daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re}z \\ \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \operatorname{Im}z \end{aligned}$$

reell. Wegen  $(\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2 = 1$  ist  $q(\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z) \neq 0$  für alle  $z$  auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene, also hat die rationale Funktion  $f$  auf dem Einheitskreis keine Pole.

- Nach dem Residuensatz ist daher

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{a \in B_1(0)} \operatorname{Res}_{z=a}(f) &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{z} dz \quad [\text{Defn. von } f] \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right) e^{-it} i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.6.6** (zu Typ 1).

Wir berechnen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}$$

für  $a \in \mathbb{R}$  und  $a > 1$ . Es ist  $R(x, y) = \frac{1}{a+x}$ , also

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2az + 1}.$$

Es gilt  $z^2 + 2az + 1 = (z - \alpha)(z - \beta)$  mit Nullstellen

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1} \quad \beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Wegen der Voraussetzung  $a > 1$  sind beide Wurzeln reell. Man rechnet leicht nach, dass aus  $a > 1$  folgt  $|\alpha| < 1$ . Wegen  $\alpha \cdot \beta = 1$  folgt  $|\beta| > 1$ . Wir finden somit nach Satz 2.6.5

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = 2\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2 + 2za + 1} = 4\pi \operatorname{Res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = 4\pi \frac{1}{\alpha-\beta} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Wir kommen nun zu einer zweiten Klasse von Integralen, die man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann.

**Korollar 2.6.7** (Typ 2).

Seien  $p(x)$  und  $q(x)$  zwei polynomiale Funktionen mit reellen Koeffizienten. Es gelte

$$\operatorname{grad}q \geq \operatorname{grad}p + 2$$

und  $q(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Betrachte die rationale Funktion

$$R(x) := \frac{p(x)}{q(x)},$$

die keine Pole auf der reellen Achse hat. Dann gilt:

1. Das uneigentliche Integral der Funktion  $|R(x)|$  und auch der Funktion  $R(x)$  existiert.
2. Das Integral ergibt sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=a_j} R(z) ,$$

wobei  $a_1, a_2, \dots, a_k$  die Polstellen der Funktion  $R(z)$  in der komplexen oberen Halbebene  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{im}(z) > 0\}$  sind.

Mit Hilfe der analytischen Fortsetzung einer auf  $\mathbb{R}$  definierten Funktion auf die obere Halbebene kann man also reelle Integrale berechnen.

### Beweis.

- Wegen der Annahme über das Nennerpolynom  $q$  ist die rationale Funktion  $R$  stetig auf  $\mathbb{R}$ . Sei

$$p(z) = \sum_{\nu=0}^m b_{\nu} z^{\nu} \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{\nu=0}^n c_{\nu} z^{\nu}$$

mit  $n - m \geq 2$  und  $c_n \neq 0$ . Für  $z \neq 0$  finde

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = z^{m-n} \frac{\frac{b_0}{z^m} + \dots + b_m}{\frac{c_0}{z^n} + \dots + c_n} .$$

Für  $|z| \rightarrow \infty$  strebt der zweite Faktor gegen  $b_m/c_n$ , ist also insbesondere beschränkt. Also existiert  $M > 0$  und  $c > 0$ , so dass

$$|R(z)| \leq |z^{m-n}| \cdot M \quad \text{für alle} \quad |z| > c$$

gilt. Wegen  $n - m \geq 2$  folgt

$$|R(z)| \leq \frac{1}{|z|^2} \cdot M \quad \text{für alle} \quad |z| > c . \tag{7}$$

Insbesondere gilt für  $z = x$  reell und für  $0 < c < A$

$$\begin{aligned} \int_0^A |R(x)| dx &= \int_0^c |R(x)| dx + \int_c^A |R(x)| dx \\ &\leq \int_0^c |R(x)| dx + M \cdot \int_c^A \frac{dx}{x^2} \quad [\text{wegen (7)}] \\ &= \int_0^c |R(x)| dx + M \left( -\frac{1}{A} + \frac{1}{c} \right) \\ &\leq \int_0^c |R(x)| dx + \frac{M}{c} < \infty \end{aligned}$$

Das Integral  $\int_0^A |R(x)| dx$  mit nicht-negativem Integranden ist offenbar monoton wachsend als Funktion von  $A$  und gleichmäßig in  $A$  beschränkt. Es folgt, dass der Grenzwert

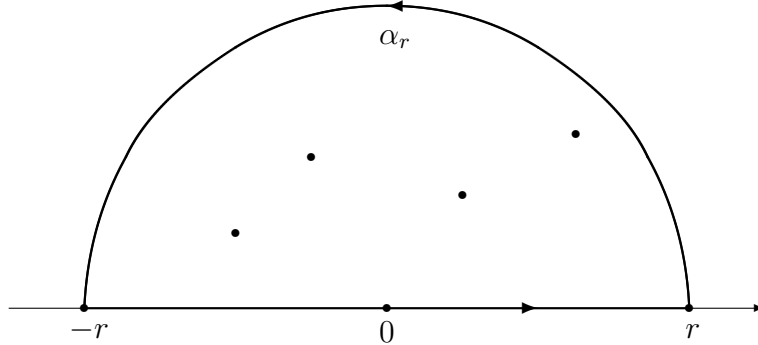
$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |R(x)| dx$$

existiert und einen endlichen Wert hat. Gleichmaßen schließt man für

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-B}^0 |R(x)| dx .$$

- Wir betrachten für jedes  $r > 0$  den geschlossenen Weg  $\gamma_r$  mit

$$\gamma_r(t) := \begin{cases} t & \text{für } -r \leq t \leq r \\ re^{i(t-r)} & \text{für } r \leq t \leq r + \pi \end{cases}$$



Die Kurve ist also die Aneinanderhängung des Intervalls  $[-r, r]$  auf der reellen Achse mit einem Halbkreis  $\alpha_r$  in der oberen Halbebene vom Radius  $r$ . Da  $q$  ein Polynom ist, hat  $R$  höchstens endlich viele Polstellen in der oberen Halbebene. Wir wählen der Radius  $r$  des Halbkreises  $\alpha_r$  so groß, dass der Halbkreis alle Polstellen der rationalen Funktion  $R$  in der oberen Halbebene umfasst. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{\alpha_r} R(z)dz + \int_{-r}^r R(x)dx = \int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}_{z=a_j} R(z) .$$

Wir schätzen das erste Integral über den Halbkreis  $\alpha_r$  ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_r} R(z)dz \right| &= \left| \int_0^\pi R(re^{it})rie^{it}dt \right| \leq r \int_0^\pi |R(re^{it})|dt \\ &\leq r \frac{M}{r^2} \pi = \frac{M\pi}{r} \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Abschätzung (7) benutzt haben. Dieser Beitrag geht für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null. Da außerdem gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx ,$$

folgt die Behauptung. □

### Beispiel 2.6.8 (zu Typ 2).

Wir zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan x \Big|_{-r}^r = \pi .$$

Es gilt  $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ , also hat die Funktion  $\frac{1}{z^2 + 1}$  genau eine Polstelle in der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , nämlich  $+i$ . Es gilt

$$\text{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i} .$$

Mit dem vorangegangenen Satz 2.6.7 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi .$$



Man kann mit dem Residuensatz auch Fourierintegrale berechnen:

**Korollar 2.6.9** (Typ 3).

Sei  $f$  eine Funktion, die in allen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\text{Im}z \geq 0$  komplex differenzierbar ist, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten  $z_0$ , für die  $\text{Im}z_0 \neq 0$  ist, und es gelte  $\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{Im} z > 0}} |f(z)| = 0$ .

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_0 > 0} \text{Res}_{z_0} (f(z)e^{iz}) .$$

**Beweis.**

Man integriert die Funktion  $f(z) \cdot e^{iz}$  über denselben Weg wie in Satz 2.6.7 und erhält

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_0 > 0} \text{Res}_{z_0}(f(z)e^{iz}) - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz} dz \quad ,$$

mit dem Halbkreis  $\alpha_r : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\alpha_r(t) := re^{it}$ , falls der Limes existiert. Mit der Schranke  $M_r := \sup\{|f(z)| \mid |z| = r, \text{Im}z \geq 0\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(re^{it}) e^{ire^{it}} \cdot ire^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi r |f(re^{it})| \cdot |e^{-r \sin t}| dt \\ &\leq r M_r \int_0^\pi e^{-r \sin t} dt = 2r M_r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} dt . \end{aligned}$$

Im Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ist  $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$  und daher

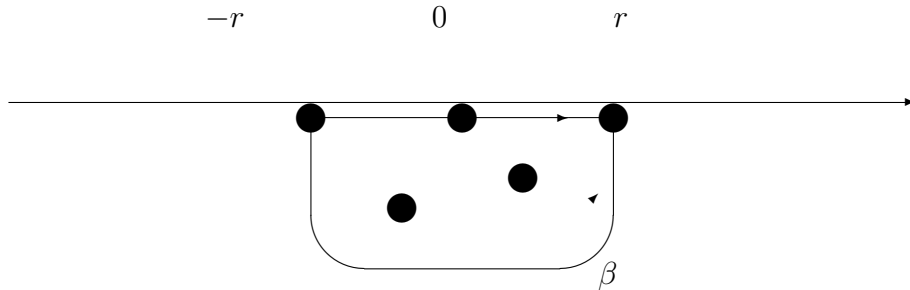
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}rt} dt = -\frac{\pi}{2r} e^{-\frac{2r}{\pi}t} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}) \leq \frac{\pi}{2r} , \quad \text{also}$$

$$\left| \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz} dz \right| \leq \pi \cdot M_r \rightarrow 0 \quad (\text{für } r \rightarrow \infty) .$$

□

**Bemerkung 2.6.10** (Typ 3').

Sei  $f$  eine Funktion auf der unteren Halbebene,  $\text{Im}z_0 \leq 0$ , die mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten  $z_0$ , für die  $\text{Im} z_0 \neq 0$  ist, holomorph ist. Indem man statt den Weg aus Satz 2.6.7 einen Weg der Form



betrachtet, um  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx$  zu berechnen, erhält man die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } z_0 < 0} \text{Res}_{z_0}(f(z)e^{-iz}),$$

Zu summieren ist hier über alle Singularitäten in der unteren Halbebene, und man muss voraussetzen

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \leq 0}} |f(z)| = 0 .$$

**Beispiel 2.6.11** ( zu Typ 3).

Es ist

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx \stackrel{2.6.9}{=} \text{Re} \left( i \pi \sum_{\text{Im } z_0 > 0} \text{Res}_{z_0} \left( \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) \right),$$

wobei über alle Pole in der oberen Halbebene summiert wird. Die Voraussetzung von Korollar 2.6.9 ist erfüllt: für  $z = r e^{it}$  und  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  gilt

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \text{Im } z \geq 0}} |f(z)| = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ t \in [0, \pi]}} \left| \frac{1}{1+r^2 e^{2it}} \right| = 0 ,$$

weil  $\left| \frac{1}{1+r^2 e^{2it}} \right| \leq \frac{1}{r^2 - 1}$  gilt. Nun hat die Funktion  $\frac{e^{iz}}{1+z^2}$  nur bei  $z_0 = i$  einen einfachen Pol mit  $\text{Im } z_0 > 0$ . Für das Residuum gilt

$$\text{Res}_{z=i} \left( \frac{e^{iz}}{1+z^2} \right) = \frac{e^{iz_0}}{2z_0} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie} ,$$

also gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2e} .$$

**Korollar 2.6.12** (Typ 4).

Sei  $0 < \alpha < 1$  und  $R$  eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  definiert ist und für die  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$  gilt. Wir setzen für  $z = |z| e^{i\theta}$  mit  $\theta \in (0, 2\pi)$  auf der geschlitzten komplexen Ebene

$$(*) \quad z^\alpha := |z|^\alpha e^{i\alpha\theta} .$$

Dann gilt:

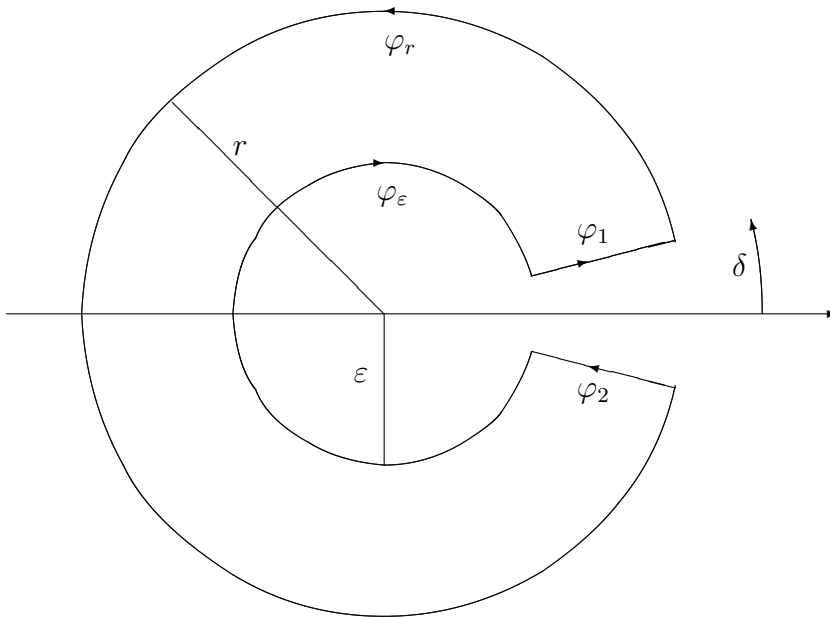
$$\int_0^{\infty} \frac{R(t)}{t^\alpha} dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i \alpha}} \cdot \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{R(z)}{z^\alpha} \right).$$

**Beweis.**

Nach den Voraussetzungen an die *rationale* Funktion  $R$  gibt es eine Konstante  $c$  mit  $|R(x)| \leq c \cdot \frac{1}{x}$  für alle  $x \geq 1$ .

Wegen  $\left| \frac{R(x)}{x^\alpha} \right| \leq \frac{c}{x^{\alpha+1}}$  folgt, dass das Integral  $\int_1^{\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$  für  $0 < \alpha$  konvergiert. Ferner ist die Funktion  $R(x)$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  stetig und somit beschränkt. Also konvergiert das Integral  $\int_0^1 \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$  für  $\alpha < 1$ . Insgesamt konvergiert das uneigentliche Integral  $\int_0^{\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$  für alle  $0 < \alpha < 1$ .

Betrachte den folgenden geschlossenen Weg in  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$ , der aus vier Wegen  $\varphi_1, \varphi_r, \varphi_2, \varphi_\varepsilon$  zusammengesetzt ist:



Wir integrieren nun  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ , wobei  $z^\alpha$  die in (\*) definierte Funktion ist. Bei der Wahl von  $\theta$  in (\*) haben wir die Funktion  $z^\alpha$  so definiert, dass sie in der geschlitzten Ebene  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$  holomorph ist. Wir wählen  $r$  so groß und  $\varepsilon$  so klein, dass für alle Pole  $z_0 \neq 0$  von  $\frac{R(z)}{z^\alpha}$  der Index von  $\varphi$  gleich 1 ist,  $j(\varphi, z_0) = 1$ . Dann gilt

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \int_{\varphi} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \left( \int_{\varphi_r} + \int_{\varphi_\varepsilon} + \int_{\varphi_1} + \int_{\varphi_2} \right) \frac{R(z)}{z^\alpha} dz.$$

Aus  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$  und  $0 < \alpha < 1$  folgt nun, dass die Integrale über die Kreissegmente  $\varphi_r$

und  $\varphi_\varepsilon$  für  $r \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0 gehen. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz &= \lim_{r \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^r \frac{R(te^{i\delta})}{(te^{i\delta})^\alpha} e^{i\delta} dt - \int_{\varepsilon}^r \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{(te^{i(2\pi-\delta)})^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} dt \right) \\ &= e^{-i\alpha\delta} \int_0^\infty \frac{R(te^{i\delta})}{t^\alpha} e^{i\delta} dt - e^{i\alpha\delta-2\pi i\alpha} \int_0^\infty \frac{R(te^{i(2\pi-\delta)})}{t^\alpha} e^{i(2\pi-\delta)} dt . \end{aligned}$$

Wir bilden nun den Limes für  $\delta \rightarrow 0$ :

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z_0} \left( \frac{R(z)}{z^\alpha} \right) = (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^\infty \frac{R(t)}{t^\alpha} dt .$$

□

**Beispiel 2.6.13** (zu Typ 4).

Wir wollen das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} \quad \text{für } \alpha \in (0, 1)$$

berechnen. Die Funktion  $\frac{R(z)}{z^\alpha} := \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$  hat nur bei  $z_0 = -1$  einen von Null verschiedenen Pol erster Ordnung. Es ist für  $z^\alpha$  wie in Korollar 2.6.12 definiert:

$$\operatorname{Res}_{z=-1} \frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{R(z)}{z^\alpha} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{z^\alpha} = \frac{1}{(-1)^\alpha} = \frac{1}{(1 \cdot e^{i\pi})^\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}} .$$

Daher ist das Integral  $I$

$$I = \frac{1}{e^{i\alpha\pi}} \cdot \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} .$$

**Korollar 2.6.14** (Typ 5).

Sei  $R$  eine reelle rationale Funktion, die auf der positiven Halbachse  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  keine Pole hat und für die gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xR(x) = 0 .$$

Wir betrachten einen Zweig  $l(z)$  des Logarithmus, der auf der geschlitzten komplexen Ebene  $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+$  holomorph ist:

$$(**) \quad l : \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}, \quad l(re^{i\theta}) := \ln r + i\theta, \quad \text{mit } \theta \in (0, 2\pi) .$$

Dann gilt

$$\int_0^\infty R(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left( \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z_0} (R(z) l(z)^2) \right)$$

und

$$\int_0^\infty R(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z_0} (R(z) l(z)^2) \right) .$$

**Beweis.**

Wir nehmen denselben Integrationsweg  $\varphi$  wie in Korollar 2.6.12 und integrieren die Funktion  $R(z)l(z)^2$  über  $\varphi$ . Wiederum lässt sich zeigen, dass die Wegintegrale über die Strecken  $\varphi_r$  und  $\varphi_\varepsilon$  für  $r \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen 0 gehen. Damit folgt für  $\delta \rightarrow 0$ :

$$2\pi i \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z=z_0} R(z)l(z)^2 = \int_0^\infty R(te^{i\delta})(\ln t + i\delta)^2 e^{i\delta} dt - \int_0^\infty R(te^{i(2\pi-\delta)})(\ln t + i(2\pi-\delta))^2 e^{i(2\pi-\delta)} dt,$$

und für  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \dots &= \int_0^\infty R(t)(\ln t)^2 dt - \int_0^\infty R(t)(\ln t + 2\pi i)^2 dt \\ &= -4\pi i \int_0^\infty R(t) \ln t dt + 4\pi^2 \int_0^\infty R(t) dt, \end{aligned}$$

also

$$-2 \int_0^\infty R(t) \ln t dt - 2\pi i \int_0^\infty R(t) dt = \sum_{z_0 \neq 0} \operatorname{Res}_{z=z_0} R(z)l(z)^2.$$

Da die Funktion  $R$  nach Voraussetzung auf  $\mathbb{R}$  nur reelle Werte annimmt, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung Imaginär- und Realteil bilden und erhalten die angegebenen Formeln.  $\square$

**Beispiel 2.6.15** (zu Typ 5).

Wir wollen das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$$

berechnen. Für die Funktion  $R(x) := \frac{1}{(1+x)^3}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x)^3} = 0$ . Ferner hat die Funktion  $R(z) = \frac{1}{(1+z)^3}$  an der Stelle  $z_0 = -1$  einen dreifachen Pol. Nach Bemerkung 2.6.2.3 ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1}(R(z)l(z)^2) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} (z+1)^3 R(z)l(z)^2 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} l(z)^2 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left( 2l(z) \cdot \frac{1}{z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \left( \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} - l(z) \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{(-1)^2} - \frac{l(-1)}{(-1)^2} = 1 - i\pi. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus Korollar 2.6.14, dass

$$I = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2}$$

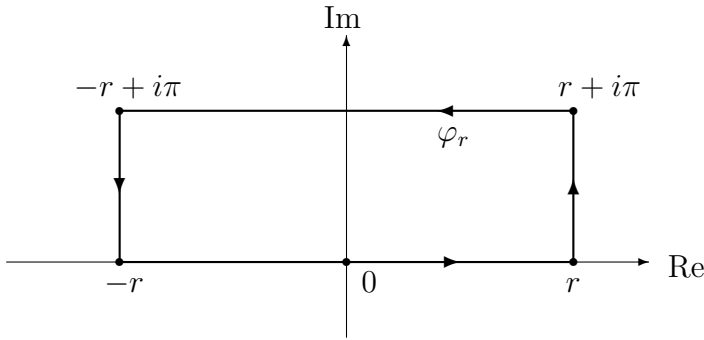
und nebenbei noch

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^3} = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2\pi} (-\pi) = \frac{1}{2}.$$

Wir bringen abschließend noch ein letztes Beispiel:

**Beispiel 2.6.16.**

Zu berechnen ist das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x}$ . Dazu integrieren wir die Funktion  $\frac{1}{\cosh z}$  über den Rand  $\varphi_r$  des folgenden Rechtecks:



und finden für das Integral über den Rand  $\varphi_r$

$$\int_{\varphi_r} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{-r}^r \frac{dt}{\cosh t} - \int_{-r}^r \frac{dt}{\cosh(t + i\pi)} + \int_0^\pi \frac{idt}{\cosh(r + it)} - \int_0^\pi \frac{idt}{\cosh(-r + it)} .$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{idt}{\cosh(r + it)} \right| &\leq \pi \cdot \sup_{t \in [0, \pi]} \frac{1}{|\cosh r \cos t + i \sinh r \sin t|} \\ &= \pi \cdot \sup_{t \in [0, \pi]} \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 r \cos^2 t + \sinh^2 r \sin^2 t}} = \frac{\pi}{\sinh r} . \end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sinh r = \infty$  ergibt sich der Grenzwert des Randintegrals zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_r} \frac{dz}{\cosh z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh(t + i\pi)} ;$$

wegen  $\cosh(t + i\pi) = -\cosh t$  folgt aus dem Residuensatz

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t} = 2\pi i \sum_{0 < \text{Im } a < \pi} \text{Res}_{z=a} \left( \frac{1}{\cosh z} \right) ,$$

denn auf der reellen Achse hat die Funktion  $\frac{1}{\cosh z}$  keine Singularitäten.

Für  $0 < \text{Im } a < \pi$  ist  $\cosh a = 0$  nur für  $a = i\frac{\pi}{2}$ . Es ist  $i\frac{\pi}{2}$  ein einfacher Pol wegen

$$\cosh'(i\frac{\pi}{2}) = \sinh(i\frac{\pi}{2}) = i \sin \frac{\pi}{2} = i \neq 0 .$$

Nach Bemerkung 2.6.2.3 ist daher das Residuum

$$\text{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cosh z} \right) = \frac{1}{\cosh'(i\frac{\pi}{2})} = -i,$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\cosh t} = i\pi \text{Res}_{z=i\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cosh z} = \pi .$$

**Bemerkung 2.6.17.**

1. Wir können nun auch eine andere Form “generalisierter Funktionen” einführen, die Distributionen einschließen. Eine Hyperfunktion auf  $\mathbb{R}$  ist ein Paar  $(f, g)$ , wobei  $f$  eine holomorphe Funktion auf der oberen und  $g$  eine holomorphe Funktion auf der unteren komplexen Halbebene ist. Für jede ganze Funktion  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  identifizieren wir die Hyperfunktionen  $(f, g)$  und  $(f - h, g - h)$ . Informell stellen wir uns die Hyperfunktion als das vor, was die Differenz  $f - g$  auf der reellen Achse  $\mathbb{R}$  wäre.
2. Hyperfunktionen bilden einen Vektorraum; die können komponentenweise differenziert werden.
3. Ein Punkt  $a \in \mathbb{R}$  heißt holomorpher Punkt der Hyperfunktion  $f$ , wenn die Einschränkung  $f$  auf eine Umgebung von  $a$  äquivalent zu einer holomorphen Funktion ist. Sind  $a, b$  holomorphe Punkte von  $f$ , so wählen wir Kurven  $\gamma_{\pm} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}_{\pm}$  mit Anfangspunkt  $a$  und Endpunkt  $b$ , die in der oberen bzw. unteren Halbebene verlaufen. Wir setzen dann

$$\int_a^b f := - \int_{\gamma_+} f_+ dz + \int_{\gamma_-} f_- dz .$$

Da die obere und untere Halbebene einfach zusammenhängend sind, ist dieser Ausdruck wegen des Cauchyschen Integralsatzes 2.3.16 von der Wahl der Wege  $\gamma_{\pm}$  unabhängig.

4. Ist  $f$  eine Hyperfunktion mit kompaktem Träger und  $\varphi$  eine analytische Funktion auf (einer Umgebung von)  $\mathbb{R}$ , so haben wir eine bilineare Paarung

$$(f, \varphi) \mapsto \int f \cdot \varphi ,$$

die den Dualraum  $\mathcal{O}'(\mathbb{R})$  des Raumes  $\mathcal{O}(\mathbb{R})$  der analytischen Funktionen mit dem Raum der Hyperfunktionen mit kompaktem Träger sogar identifiziert.

5. Wir betrachten nun die von Null verschiedene Hyperfunktion  $\delta := (\frac{1}{2\pi iz}, \frac{1}{2\pi iz})$ . Wir finden für jede reell analytische Funktion  $\varphi$

$$\int f \cdot \varphi = \int_{z=0} \frac{1}{2\pi iz} \varphi(z) dz = f(0) ,$$

wobei wir im letzten Schritt die Cauchysche Integralformel 2.4.8 benutzt haben. Damit haben wir eine Hyperfunktion gefunden, die der Dirac-Distribution entspricht.

6. Sei nun  $g$  eine beliebige Distribution mit Träger in einem kompakten Intervall  $I$ . Dann definieren wir durch

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_I g(x) \frac{1}{z - x} dx$$

eine Hyperfunktion, die an der reellen Achse auf  $I$  “springt”. Über eine Zerlegung der Eins auf kann man so jede Distribution in die Hyperfunktionen einbetten. Aber meromorphe Funktionen mit wesentlichen Singularitäten wie  $e^{1/z}$  liefern Hyperfunktionen, die keine Distributionen sind.

# 3 Funktionalanalysis

## 3.1 Hilberträume und Banachräume

Wir erinnern an einige Begriffe und Sätze. Sei  $V$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

### Definition 3.1.1

1. Ein Banachraum ist ein normierter Vektorraum  $V$ , der bezüglich der zur Norm gehörenden Metrik mit  $d(x, y) = \|x - y\|$  für  $x, y \in V$  vollständig ist, für den also jede Cauchy-Folge konvergiert.
2. Ein Hilbertraum ist ein Hermitescher Vektorraum  $V$ , der bezüglich der vom Skalarprodukt induzierten Metrik  $d$  vollständig ist.
3. Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge in  $X$  gibt.
4. Wir vereinbaren, dass ein Hilbertraum in der Folge stets ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum ist.

### Beispiel 3.1.2.

Der Vektorraum der quadratisch summierbaren komplexen Zahlenfolgen

$$\ell^2 := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

mit dem Hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

ist ein (unendlich-dimensionaler, separabler) Hilbertraum.

Wir erinnern an ein Resultat:

### Satz 3.1.3. [Orthogonalprojektion auf vollständige Unterräume]

Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $U \subset V$  ein abgeschlossener Unterraum; sei

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das orthogonale Komplement:

1. Dann existiert zu jedem  $x \in V$  genau ein  $x_U \in U$  mit kleinstem Abstand zu  $x$ , d.h.

$$\|x - x_U\| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle } y \in U.$$

2. Das Element  $x_U \in U$  ist durch  $x - x_U \in U^\perp$  charakterisiert.
3. Es gilt  $V = U \oplus U^\perp$ , der Vektorraum  $V$  ist die direkte orthogonale Summe der abgeschlossenen Unterräume  $U$  und  $U^\perp$ .
4. Die Zuordnung  $x \mapsto x_U$  definiert eine stetige lineare Abbildung  $P : V \rightarrow U$ , die orthogonale Projektion auf  $U$ .



Wir erinnern daran, dass die stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei normierten Vektorräumen genau die beschränkten linearen Abbildungen sind, also die linearen Abbildungen  $F : V_1 \rightarrow V_2$ , für die die Operatornorm

$$\|F\| := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}$$

endlich ist. Für die Operatornorm gilt für  $f_1, f_2 \in L(B)$

$$\|f_1 \circ f_2\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\| ;$$

dies folgt sofort aus der Abschätzung

$$\|(f_1 \circ f_2)(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2(x)\| \leq \|f_1\| \cdot \|f_2\| \cdot \|x\|,$$

die für jedes  $x \in B$  gilt.

### Definition 3.1.4

1. Es seien  $V$  und  $W$  komplexe Banachräume. Mit

$$L(V, W) := L_b(V, W)$$

bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen  $f : V \rightarrow W$ , versehen mit der Operatornorm.

2. Speziell bezeichnen wir  $L(V) := L(V, V)$  die stetigen Selbstabbildungen und mit  $V'$  die stetigen linearen Funktionale,

$$V' := L(V, \mathbb{C}) .$$

Wir kommen nun zu einem ersten neuen Resultat:

### Satz 3.1.5. [Darstellungssatz von Riesz]

Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $V'$  der Vektorraum aller *stetigen* linearen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann ist durch

$$\begin{aligned} \phi : V &\rightarrow V' \\ x &\mapsto \phi(x) \end{aligned}$$

mit

$$\phi(x) := \langle x, \cdot \rangle$$

ein konjugiert-linearer Isomorphismus normierter Vektorräume  $\phi : V \rightarrow V'$  gegeben, mit  $\|\phi(x)\| = \|x\|$ .

Insbesondere ist jede *stetige* Linearform (“bra”) auf einem Hilbertraum  $V$  durch das Skalarprodukt mit einem Vektor in  $V$  (“ket”) darstellbar. Dies ist eine Grundlage des Diracschen Formalismus in der Quantenmechanik.

### Beweis.

- Die Stetigkeit der Linearform  $\phi(x) : V \rightarrow \mathbb{C}$  ergibt sich aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung:

$$|\phi(x)(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{für alle } y \in V.$$

Dies liefert zunächst  $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ .

Für  $y = x$  erhalten wir Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und somit  $\|\phi(x)\| = \|x\|$ . Es ist klar, dass  $\phi$  konjugiert-linear ist, denn das Hermitesche Skalarprodukt ist in unserer Konvention konjugiert-linear im ersten Argument. Da  $\phi$  die Norm erhält, ist  $\phi$  injektiv.

- Es bleibt noch die Surjektivität von  $\phi$  zu zeigen. Sei dazu  $0 \neq \alpha \in V'$ . Wir finden dann  $v \in V$  mit  $\alpha(v) = 1$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $\alpha$  ist  $U = \ker \alpha \subset V$  ein abgeschlossener und somit vollständiger Unterraum. Wir finden eine orthogonale Zerlegung  $V = U \oplus U^\perp$ .

Wir setzen  $x_0 := v - v_U \in U^\perp$ , wobei  $v_U \in U$  die Orthogonalprojektion von  $v$  auf  $U$  ist. Dann gilt  $\alpha(x_0) = \alpha(v) - \alpha(v_U) = 1 - 0 = 1$ . Für ein beliebiges  $y \in V$  ist daher die orthogonale Zerlegung

$$y = \underbrace{(y - \alpha(y)x_0)}_{\in \ker \alpha} + \alpha(y)x_0 \in U \oplus U^\perp.$$

Somit ist  $\langle y, x_0 \rangle = \alpha(y)\|x_0\|^2$ ; wir können die Linearform  $\alpha$  schreiben als  $\alpha = \phi\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)$ .

□

### Definition 3.1.6

Eine Teilmenge  $U$  eines (Euklidischen oder) Hermiteschen Vektorraums ist eine orthonormale Familie, wenn  $\langle u, u \rangle = 1$  für alle  $u \in U$  und  $\langle u, v \rangle = 0$  für alle  $u, v \in U$  mit  $u \neq v$  gilt.

Wir wissen aus früheren Vorlesungen:

### Bemerkung 3.1.7.

Ist  $V$  separabel, so ist jede orthonormale Familie  $(v_i)_{i \in I}$  höchstens abzählbar.

Wir haben auch schon gesehen:

### Satz 3.1.8 (Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung).

Sei  $V$  ein Hilbertraum und  $(v_0, v_1, \dots)$  eine (abzählbare) orthonormale Familie. Für einen Vektor  $x \in V$  nennen wir  $\alpha_k := \langle v_k, x \rangle$  den  $k$ -ten Fourierkoeffizienten von  $x$  bezüglich der Familie  $(v_0, v_1, \dots)$ . Dann gilt für alle  $x \in V$ :

$$\sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2.$$

Die Folge  $(\sum_{k=0}^n \alpha_k v_k)$  ist Cauchy-Folge in  $V$ . Da  $V$  als Hilbertraum vollständig ist, besitzt sie in  $V$  einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist gleich  $x$  ist genau dann, wenn

$$\sum_k |\alpha_k|^2 = \|x\|^2.$$

### Definition 3.1.9

Sei  $V$  ein Hermitescher Vektorraum. Eine orthonormale Familie  $(v_1, v_2, \dots)$  heißt Hilbertbasis, wenn jeder Vektor  $x \in V$  eine Darstellung als Reihe  $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, v_k \rangle v_k$  besitzt.

Vorsicht: eine Hilbertbasis ist im Allgemeinen *keine* Basis im Sinne einer Vektorraumbasis.

### Theorem 3.1.10.

Für eine orthonormale Familie  $B = (b_1, b_2, \dots)$  von Vektoren eines Hermiteschen Vektorraums  $V$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Unterraum  $\text{span}\{b_1, b_2, \dots\}$ , der von der Familie  $B$  algebraisch erzeugt wird, ist dicht in  $V$ .

2.  $B$  ist eine Hilbertbasis.

3. Für alle  $x, y \in V$  gilt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle x, b_k \rangle} \langle y, b_k \rangle.$$

4. Für alle  $x \in V$  gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle b_k, x \rangle|^2.$$

**Beweis.**

1.  $\Rightarrow$  2.: Da das Erzeugnis von  $B$  dicht liegt, existiert zu jedem  $x \in V$  eine Folge  $x_i \in \text{span}\{b_1, b_2, \dots\}$  mit  $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ . Wir definieren  $N_i$  so., dass

$$x_i \in U_i := \text{span}\{b_1, \dots, b_{N_i}\},$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass  $N_i \in \mathbb{N}$  eine monoton wachsende Folge ist.

Für die orthogonale Projektion  $x'_i := \sum_{k=1}^{N_i} \langle x, b_k \rangle b_k$  des Vektors  $x$  auf den endlich-dimensionalen und daher abgeschlossenen Unterraum  $U_i$  gilt nach Satz 3.1.3

$$\|x - x'_i\| \leq \|x - x_i\|$$

und somit

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} x'_i = \sum_{k=1}^{\infty} \langle b_k, x \rangle b_k.$$

2.  $\Rightarrow$  3.:

Wenn  $B = (b_1, b_2, \dots)$  eine Hilbertbasis ist, so können wir  $x, y \in V$  schreiben als

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j b_j,$$

mit  $x_i = \langle x, b_i \rangle$  und  $y_j = \langle y, b_j \rangle$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} \langle b_i, y \rangle \\ \langle b_i, y \rangle &= \left\langle b_i, \sum_{j=1}^{\infty} y_j b_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \langle b_i, b_j \rangle = y_i \end{aligned}$$

und somit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i} y_i.$$

3.  $\Rightarrow$  4.: Setze  $x = y$ .

4.  $\Rightarrow$  1.: Aus der Parsevalschen Gleichung folgt nach dem vorhergehenden Satz 3.1.8, dass  $x = \sum_k \langle b_k, x \rangle b_k$  für alle  $x \in V$  ist. Damit gilt 1.

□

Aus früheren Semestern wissen wir:

**Satz 3.1.11** (Existenz von Hilbertbasen).

Jeder (unendlich-dimensionale, separable) Hilbertraum  $V$  besitzt eine abzählbare Hilbertbasis  $B = (b_1, b_2, \dots)$ .

Funktionsräume bilden wichtige Beispiele für Hilberträume und Banachräume. Umgekehrt erlauben es die Begriffsbildungen der Funktionalanalysis, über Räume von Funktionen geometrisch zu denken. Es war ein wichtiger Schritt in der Entwicklung der Analysis, über *Räume* von Funktionen und nicht nur über einzelne Funktionen nachzudenken.

Wir erinnern zunächst an bekannte Tatsachen:

**Definition 3.1.12**

Sei  $p \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ . Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für eine beliebige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist die  $L^p$ -Halbnorm bezüglich  $A \subset \mathbb{R}^n$  wie folgt erklärt:

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\|f_A^p\|_1},$$

wobei wir  $f_A := f\chi_A$  und  $\sqrt[p]{\infty} := \infty$  setzen.

**Lemma 3.1.13.**

Für die  $L^p$ -Halbnorm bezüglich  $A \subset \mathbb{R}^n$  gelten die folgenden Aussagen:

1.  $\|f\|_p = 0$  dann und nur dann, wenn  $f = 0$  fast überall gilt.
2. Die Halbnorm ist homogen,  $\|cf\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$ .
3. Die Halbnorm ist monoton:  $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_p \leq \|g\|_p$ .
4. Es gilt die Dreiecksungleichung:  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .
5. Hat  $A$  endliches Volumen,  $v(A) < \infty$ , so gilt  $\|f\|_1 \leq v(A)^{1/q} \cdot \|f\|_p$ .

**Bemerkung 3.1.14.**

1. Sei  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$  eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen und sei die Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  lokal-integrierbar. Dann heißt  $f$  eine  $L^p$ -Funktion oder  $p$ -fach integrierbar, wenn die Funktion  $|f|^p$  integrierbar ist.

Eine lokal-integrierbare Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  ist genau dann  $p$ -fach integrierbar, wenn  $\|f\|_p < \infty$  gilt. Für  $p = 2$  sprechen wir von quadratintegrierbaren Funktionen.

2. Wir erinnern an Bezeichnungen:

- des Funktionenraums

$$\mathcal{L}^p(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f \text{ ist } L^p\text{-Funktion}\}.$$

Die ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum mit der Halbnorm  $\|\cdot\|_p$ .

- des Quotientenraums nach dem Unterraum

$$\mathcal{N} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid \|f\| = 0\},$$

$$L^p(U) := \mathcal{L}^p(U)/\mathcal{N}$$

Mit der  $\|\cdot\|_p$ -Norm ist dies ein normierter Vektorraum.

3. Aus dem Satz von Riesz-Fischer folgt, dass der normierte Vektorraum  $L^p(U)$  ein Banachraum ist, also vollständig ist, also dass jede  $L^p$ -Cauchyfolge  $(f_k)_k$  in  $\mathcal{L}^p(U)$  gegen einen  $L^p$ -Grenzwert  $f$  konvergiert. Durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge kann man punktweise Konvergenz gegen  $f$  fast überall erreichen.
4. Bei der  $L^2$ -Konvergenz sprechen wir auch von Konvergenz im quadratischen Mittel. Es gilt  $(f_k) \rightarrow f$  bzgl.  $L^2$  genau dann, wenn  $\|f - f_k\|_2 \rightarrow 0$ .

In diesem Fall liegt ein Skalarproduktraum vor:

**Satz 3.1.15.**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine nicht-leere offene Menge. Setzt man für  $f, g \in \mathcal{L}^2(U)$ :

$$\langle f, g \rangle := \int_U \overline{f(x)}g(x)dx .$$

und weiter:

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle := \langle f, g \rangle ,$$

so ist  $\langle , \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $L^2(U)$ , mit zugehöriger Norm

$$\|f + \mathcal{N}\| = \langle f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N} \rangle^{\frac{1}{2}} .$$

$L^2(U)$  erhält durch dieses Skalarprodukt die Struktur eines Hilbertraums.

**Beweis.**

Wir haben schon gesehen, dass  $L^2(U)$  ein Skalarproduktraum ist und mit der durch das Skalarprodukt gegebenen Norm

$$\|f + \mathcal{N}\| = \langle f + \mathcal{N}, f + \mathcal{N} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ein vollständiger normierter Raum, also ein Banachraum.

Wir müssen noch zeigen, dass  $L^2(U)$  separabel und unendlich-dimensional ist: eine Treppenfunktion mit Träger in  $U$

$$\sum_{k=1}^N c_k 1_{Q_k}$$

heiße rational, wenn  $c_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$  und die Quader  $Q_k$  Eckpunkte aus  $\mathbb{Q}^n$ , also mit rationalen Koordinaten, haben. Die Menge  $T_{\mathbb{Q}}(U)$  der rationalen Treppenfunktionen mit Träger in  $U$  ist abzählbar und liegt dicht in  $\mathcal{L}^2(U)$ .

Wegen  $U \neq \emptyset$  gibt es unendlich viele linear unabhängige Treppenfunktionen

$$g = \sum_{j=1}^N \alpha_j 1_{U_j}$$

mit offenen beschränkten Teilmengen  $U_j$  von  $U$ , also ist  $\mathcal{L}^2(U)$  unendlich-dimensional. □

**Bemerkung 3.1.16.**

Es gibt noch andere wichtige Hilbert-Räume. Ein Beispiel sind Sobolev-Räume, die in der Theorie partieller Differentialgleichungen und von Schrödinger-Operatoren eine wichtige Rolle spielen.

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Jede Funktion in  $\mathcal{L}^p(U)$  ist insbesondere lokal integrierbar und definiert daher eine reguläre Distribution und hat daher eine schwache Ableitung, die wir mit  $D^\alpha f$  bezeichnen. Das Beispiel der Heavisideschen Stufenfunktion zeigt, dass die Ableitung nicht unbedingt eine reguläre Distribution ist. Wir können aber auf diejenigen Funktionen einschränken, für die dies der Fall ist.

Der Sobolev-Raum  $W^{k,p}$  für  $p \geq 1$  und  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ist

$$W^{k,p}(U) := \{f \in \mathcal{L}^p(U) \mid D^\alpha f \in \mathcal{L}^p(U) \text{ für alle Multiindizes } |\alpha| \leq k\}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{k,p}^p := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p^p$$

erhält man Banachräume. Für  $p = 2$  erhält man einen Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle.$$

Auch in diesen Banachräumen liegen der Unterraum  $C_c^\infty(U)$  der glatten Funktionen mit kompakten Träger dicht.

### Definition 3.1.17

Es seien  $H_1$  und  $H_2$  Hilberträume,  $D$  ein Untervektorraum von  $H_1$  und  $R$  ein Untervektorraum von  $H_2$ . Sei  $f : D \rightarrow R$  eine surjektive lineare Abbildung.

1. Dann heißt  $f$  isometrisch oder Isometrie, wenn für alle  $x \in D$  die Gleichheit  $\|f(x)\| = \|x\|$  gilt. (Dabei haben wir dasselbe Zeichen  $\|\cdot\|$  für die Normen in den Hilberträumen  $H_1$  und  $H_2$  verwendet.) Insbesondere sind isometrische Abbildungen stetig.
2. Eine isometrische Abbildung heißt unitär, wenn zusätzlich  $D = H_1$  und  $R = H_2$  gilt.

Wir brauchen einige Hilfsmittel zum Skalarprodukt:

### Lemma 3.1.18 (Polarisierung).

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann legt die Norm das Skalarprodukt eindeutig fest: Es gilt für alle  $x, y \in H$ :

$$\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}\langle x, y \rangle = \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2.$$

### Beweis.

Es handelt sich um eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 &= \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle x, y \rangle + \frac{1}{2}\langle y, x \rangle = \operatorname{Re}\langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Für den Imaginärteil beachten wir

$$\left\| \frac{x+iy}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x-iy}{2} \right\|^2 = \operatorname{Re}\langle x, iy \rangle = \operatorname{Re}i\langle x, y \rangle = -\operatorname{Im}\langle x, y \rangle.$$

□

Mit ähnlichen Methoden zeigt man:

**Korollar 3.1.19.**

Seien  $f, g \in L(H)$  und gelte für alle  $x \in H$

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x, g(x) \rangle.$$

Dann ist  $f = g$ .

**Beweis.**

Für  $x, y \in H$  ist in Verallgemeinerung von Lemma 3.1.18

$$4\langle x, f(y) \rangle = \langle x+y, f(x+y) \rangle - \langle x-y, f(x-y) \rangle \\ - i\langle x-iy, f(x-iy) \rangle - i\langle x+iy, f(x+iy) \rangle.$$

Damit folgt nach der Voraussetzung  $4\langle x, f(y) \rangle = 4\langle x, g(y) \rangle$  für alle  $x, y \in H$ , also  $\langle (f-g)(y), x \rangle = 0$ . Da das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt  $f = g$ .  $\square$

**Lemma 3.1.20.**

Sei  $f : D \rightarrow R$  eine isometrische lineare Abbildung. Dann gilt

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Auf dem Wertebereich  $R$  existiert eine isometrische lineare Umkehrfunktion

$$f^{-1} : R \rightarrow D.$$

Ist  $f$  unitär, so ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  unitär.

**Beweis.**

- Erhält nun  $f$  die Norm, so erhält  $f$  nach Lemma 3.1.18 auch das Skalarprodukt.
- Eine isometrische Abbildung ist injektiv: sei  $x \in \ker f$ , dann gilt  $0 = \|f(x)\| = \|x\|$ , woraus  $x = 0$  folgt. Also ist  $f$  bijektiv und es gibt eine Umkehrfunktion

$$f^{-1} : R \rightarrow D.$$

Umkehrabbildungen linearer Abbildungen sind linear.  $f^{-1}$  ist isometrisch, denn zu  $y \in R$  gibt es  $x \in D$  mit  $f(x) = y$ , also

$$\|y\| = \|f(x)\| = \|x\| = \|f^{-1}(y)\|.$$

Ist  $f$  unitär, so hat man  $D = H_1$  und  $R = H_2$ , also ist auch  $f^{-1}$  unitär.  $\square$

**Satz 3.1.21.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum, dann gibt es eine unitäre lineare Abbildung

$$f : H \rightarrow \ell^2.$$

**Beweis.**

Sei  $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Hilbertbasis von  $H$ . Jeden Vektor  $x \in H$  können wir nach der Definition 3.1.9 einer Hilbertbasis in der Form

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k \quad \text{mit} \quad \mu_k := \langle x, v_k \rangle$$

schreiben. Wir setzen  $f(x) := (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Wegen der Besselschen Ungleichung 3.1.8  $\sum_k |\mu_k|^2 \leq \|x\|^2$  ist die Folge  $f(x)$  quadratsummierbar, also  $f(x) \in \ell^2$ . Die so definierte Abbildung  $f : H \rightarrow \ell^2$  ist linear. Nach der Parsevalschen Gleichung 3.1.8 gilt

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 = \|x\|^2,$$

also ist  $f$  eine Isometrie. Wir müssen daher nur noch zeigen, dass  $f$  surjektiv ist. Sei  $(\beta_k)_{k \geq 0} \in \ell^2$ ; dann ist  $\sum_k |\beta_k|^2 < \infty$ . Betrachte die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^n \beta_k v_k \in H$$

und finde für  $n > m$ :

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n \beta_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\beta_k|^2.$$

Also ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $H$ . Da  $H$  vollständig ist, existiert

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k v_k \in H.$$

Es gilt  $f(x) = (\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Da  $f : H \rightarrow \ell^2$  die Norm erhält, ist  $f$  unitär. □

Nach Lemma 3.1.20 ist auch die Umkehrfunktion einer unitären linearen Abbildung unitär. Für  $f : H_1 \rightarrow \ell^2$  und  $g : H_2 \rightarrow \ell^2$  ist daher auch  $g^{-1} \circ f : H_1 \rightarrow H_2$  unitär. Daher sind alle Hilberträume isomorph:

**Korollar 3.1.22.**

Zwischen zwei beliebigen Hilberträumen  $H_1$  und  $H_2$  gibt es eine unitäre lineare Abbildung.

Entscheidend sind also nicht Hilberträume, sondern *Abbildungen* zwischen Hilberträumen. Man kann mit einigen Zusatzüberlegungen zeigen, dass die Fouriertransformation zu einer unitären Abbildung  $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  führt. Obwohl hier der gleiche Funktionenraum vorliegt, wird man in Anwendungen die Räume nicht identifizieren und z.B. zwischen Impuls- und Ortsraum unterscheiden. Ferner sind die Räume  $L^2(\mathbb{R}^n)$  isomorph, ohne dass es ausgezeichnete Isomorphismen gibt. Tatsächlich können die Funktionenräume noch deutlich verschiedener definiert sein. Dies illustriert

**Betrachtung 3.1.23** (Radontransformierte/Tomographie).



1. Sei  $\rho \in L^2(\mathbb{R}^n)$  eine Funktion, die wir uns als Dichteverteilung vorstellen.

Dann berechnen wir für jede affine Hyperebene im  $\mathbb{R}^n$  das Integral der Dichteverteilung  $\rho$  über diese Hyperebenen. Man nehme etwa den Fall einer affinen Ebene,  $n = 2$ , und stelle sich vor, mit Hilfe eines Röntgentomographen habe man mit einem Röntgenstrahl entlang jeder Geraden in der Ebene die Gesamtdichte entlang der Geraden gemessen.

Wir beschreiben eine affine Hyperebene durch ihren Einheitsnormalenvektor  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  und die Gleichung  $\langle \alpha, x \rangle = s$  mit  $s \in \mathbb{R}$ . Da die Paare  $(\alpha, s)$  und  $(-\alpha, -s)$  die gleiche affine Hyperebene beschreiben, ist der Raum der Hyperebenen gleich  $(S^{n-1} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ . Die Radontransformierte der Funktion  $\rho \in L^2(\mathbb{R}^n)$  ist dann die Funktion

$$R\rho : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, s) \mapsto \int_{\langle \alpha, x \rangle = s} \rho(x) dS(x) .$$

Sie setzt  $\mathcal{L}^2$ -Funktionsräume auf verschiedenen Mannigfaltigkeiten in Beziehung, nämlich  $\mathbb{R}^n$  und  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

2. Die Frage nach Umkehrabbildungen der Radontransformierten ist von großer praktischer Bedeutung. Wir berechnen die Fouriertransformierte  $\hat{\rho}$  der Dichteverteilung  $\rho$  im Punkt  $r\alpha \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(r\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} dx e^{-2\pi i \langle r\alpha, x \rangle} \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{\langle \alpha, x \rangle = s} e^{-2\pi i \langle r\alpha, x \rangle} \rho(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-2\pi i sr} R\rho(\alpha, s) \end{aligned}$$

Somit legt die Radontransformierte  $R\rho$  die Fouriertransformierte von  $\rho$  und somit nach dem Umkehrtheorem auch die Dichteverteilung  $\rho$  selbst fest. (Für die numerische Implementierung werden allerdings andere Methoden verwendet.)

3. Man mache sich klar, dass bei unseren Überlegungen die Tatsache, dass die fraglichen Funktionsräume abstrakt isomorph sind, keine Rolle gespielt hat.

### Satz 3.1.24.

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann gibt es zu jedem  $f \in L(H)$  genau eine lineare Abbildung  $f^* \in L(H)$ , so dass für alle  $x, y \in H$  gilt

$$\langle y, f(x) \rangle = \langle f^*(y), x \rangle .$$

Es gilt  $\|f^*\| = \|f\|$  und  $f^{**} = f$ .

### Definition 3.1.25

Der Operator  $f^*$  heißt der zu  $f$  adjungierte Operator. Operatoren  $f$  mit  $f^* = f$  heißen selbstadjungierte Operatoren.

### Beweis.

- Sei  $x \in H$  fest. Dann ist die Linearform

$$g_x : H \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad g_x(y) := \langle x, f(y) \rangle$$

stetig, denn für  $\|y\| \leq 1$  ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|g_x(y)| \leq \|x\| \cdot \|f(y)\| \leq \|x\| \cdot \|f\| .$$

Also ist  $g_x \in H'$  und nach dem Rieszschen Darstellungssatz 3.1.5 gibt es genau ein  $h(x) \in H$  mit

$$g_x(y) = \langle h(x), y \rangle \quad \text{für alle } y \in H ,$$

also

$$\langle h(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in H .$$

- Die so definierte Abbildung  $h : H \rightarrow H$  ist linear, denn für  $y, x, x' \in H$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt

$$\begin{aligned} \langle h(\lambda x + x'), y \rangle &= \langle \lambda x + x', f(y) \rangle = \bar{\lambda} \langle x, f(y) \rangle + \langle x', f(y) \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle h(x), y \rangle + \langle h(x'), y \rangle = \langle \lambda h(x) + h(x'), y \rangle . \end{aligned}$$

Da  $h(\lambda x + x') \in H$  eindeutig bestimmt ist, folgt

$$h(\lambda x + x') = \lambda h(x) + h(x') .$$

Die Abbildung  $h$  ist stetig, denn für  $x, y \in H$  und  $\|x\| \leq 1$  gilt

$$|\langle h(x), y \rangle| = |\langle x, f(y) \rangle| \leq \|x\| \|f(y)\| \leq \|x\| \|f\| \|y\| \leq \|f\| \|y\| .$$

Mit  $y = h(x)$  folgt

$$\|h(x)\|^2 \leq \|f\| \|h(x)\| , \quad \text{also } \|h\| \leq \|f\| .$$

Also ist  $h \in L(H)$ . Wir finden somit

$$(*) \quad \|f^*\| \leq \|f\| .$$

- Aus

$$\langle x, h(y) \rangle = \overline{\langle h(y), x \rangle} = \overline{\langle y, f(x) \rangle} = \langle f(x), y \rangle$$

für alle  $x, y \in H$  folgt  $h^* = f$ , also  $(f^*)^* = f$ .

- Die erneute Anwendung von (\*) liefert

$$\|f\| = \|(f^*)^*\| \leq \|f^*\| ,$$

so dass wir die Gleichheit  $\|f\| = \|f^*\|$  gezeigt haben.

□

### Beispiel 3.1.26.

Sei  $H = \ell^2$ . Dann hat der Verschiebeoperator  $T \in L(H)$  mit  $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$  Norm Eins. Sein adjungierter Operator ist der Verschiebeoperator nach rechts  $T^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ , denn es gilt für alle  $x, y \in \ell^2$ :

$$\langle y, Tx \rangle = \sum_{i=2}^{\infty} \bar{y}_i x_{i-1} = \langle T^*y, x \rangle .$$

Ähnlich wie für formal adjungierte Operatoren zeigt man:

**Lemma 3.1.27.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum; seien  $f, f_1, f_2 \in L(H)$  und  $f^*, f_1^*, f_2^*$  die zugehörigen adjungierten Operatoren. Dann gilt:

1. Adjunktion ist konjugiert linear:  $(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)^* = \overline{\lambda_1} f_1^* + \overline{\lambda_2} f_2^*$  für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ .
2.  $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*$ .
3. Existiert der inverse Operator  $f^{-1} \in L(H)$ , so existiert auch  $(f^*)^{-1} \in L(H)$  und es ist  $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ .

**Lemma 3.1.28.**

Für einen *selbstadjungierten* beschränkten Operator  $A : H \rightarrow H$  auf einem Hilbertraum  $H$  gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|$$

**Beweis.**

- Sei

$$\nu := \sup_{x \in H, \|x\|=1} \{|\langle A(x), x \rangle|\};$$

es gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für alle  $x \in H$  mit  $\|x\| = 1$ :

$$|\langle A(x), x \rangle| \leq \|A(x)\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|^2 = \|A\|,$$

und somit  $\nu \leq \|A\|$

- Wir erinnern an die Parallelogrammgleichung, die für Normen gilt, die von einem Skalarprodukt herkommen:

$$(*) \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{für } v, w \in H$$

Es gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  und  $x \in H$  mit  $\|x\| = 1$  die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 4\|A(x)\|^2 &= 2\langle Ax, Ax \rangle + 2\langle A^2x, x \rangle && [A \text{ selbstadjungiert}] \\ &= \langle A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x)), \lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x) \rangle \\ &\quad - \langle A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x)), \lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x) \rangle \\ &\leq \nu \cdot (\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}A(x)\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}A(x)\|^2) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\nu(\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|A(x)\|^2). \end{aligned}$$

Für  $A(x) \neq 0$  setzen wir  $\lambda := \sqrt{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|}}$  und erhalten

$$4\|A(x)\|^2 \leq 2\nu \cdot 2\|x\| \|A(x)\|,$$

und somit

$$\|A(x)\| \leq \nu \cdot \|x\|.$$

Die Ungleichung gilt sicher auch für  $A(x) = 0$ ; somit folgt auch  $\|A\| \leq \nu$ .

□

**Korollar 3.1.29.**

Hieraus folgt die wichtige Eigenschaft der Operatornorm

$$\|T^*T\| \stackrel{3.1.28}{=} \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T^*Tx, x \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2 .$$

**Satz 3.1.30.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum.

1. Die orthogonalen Projektoren  $p$  auf *abgeschlossene* Unterräume  $U$  sind selbstadjungierte Operatoren,  $p^* = p$ , und idempotent,  $p^2 = p$ .
2. Sei umgekehrt  $p \in L(H)$  ein stetiger linearer Operator, für den dass  $p^* = p$  und  $p^2 = p$  gilt; dann ist  $p$  ein orthogonaler Projektor auf einen abgeschlossenen Unterraum.

**Beweis.**

- Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $U \subset H$  ein abgeschlossener Untervektorraum. Nach Satz 3.1.3 gibt es die orthogonale Zerlegung  $H = U \oplus U^\perp$ , die es uns erlaubt, jedem  $x \in H$  eindeutig  $x_1 \in U$  und  $x_2 \in U^\perp$  mit  $x = x_1 + x_2$  zuzuordnen. Der orthogonale Projektor von  $H$  auf  $U$  ist dann

$$p(x) := x_1 \quad .$$

- Die Abbildung  $p$  ist offenbar linear. Wegen

$$\|x\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|p(x)\|^2 \quad ,$$

gilt  $\|p(x)\| \leq \|x\|$  und damit  $\|p\| \leq 1$ . Ist  $U = \{0\}$ , so ist  $p = 0$  und damit  $\|p\| = 0$ . Ist  $U \neq \{0\}$ , so gibt es ein  $z \in U$  mit  $\|z\| = 1$ . Es gilt  $p(z) = z$  und somit  $\|p(z)\| = \|z\|$ , also  $\|p\| = 1$ . Insbesondere ist ein orthogonaler Projektor  $p$  stetig.

- Um zu sehen, dass  $p$  selbstadjungiert ist, finde für  $x, y \in H$  eindeutig bestimmte Vektoren  $x_1, y_1 \in U$  und  $x_2, y_2 \in U^\perp$  mit  $x = x_1 + x_2$  und  $y = y_1 + y_2$ . Wir rechnen:

$$\langle p(x), y \rangle = \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle = \langle x, p(y) \rangle ,$$

also ist  $p$  selbstadjungiert,  $p^* = p$ .

- Für  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_1 \in U$ ,  $x_2 \in U^\perp$  ist

$$p(p(x)) = p(x_1) = x_1 = p(x) ,$$

also sind orthogonale Projektoren Idempotente,  $p^2 = p$  .

- Sei nun umgekehrt  $p \in L(H)$  ein stetiger linearer Operator, für den  $p^* = p$  und  $p^2 = p$  gilt. Wir setzen  $U := \{z \in H \mid p(z) = z\}$ . Da  $p$  linear ist, ist

$$U = \{z \in H \mid (p - \text{id}_H)(z) = 0\} = \text{Kern}(p - \text{id}_H)$$

ein Untervektorraum.  $U = (p - \text{id}_H)^{-1}(\{0\})$  ist als Urbild des abgeschlossenen Unterraums  $\{0\}$  unter der stetigen Abbildung  $p - \text{id}_H$  abgeschlossen. Jedes  $x \in H$  läßt sich als Summe

$$x = p(x) + (x - p(x))$$

schreiben. Wegen  $p(p(x)) = p^2(x) = p(x)$  gilt  $p(x) \in U$ . Für jedes  $z \in U$  gilt

$$\begin{aligned} \langle z, x - p(x) \rangle &= \langle z, x \rangle - \langle z, p(x) \rangle \\ &= \langle z, x \rangle - \langle p(z), x \rangle \quad [\text{wegen } p^* = p] \\ &= \langle z - p(z), x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0 . \end{aligned}$$

Also ist  $x - p(x) \in U^\perp$ . Nach Satz 3.1.3 ist  $p$  der orthogonale Projektor von  $H$  auf den abgeschlossenen Unterraum  $U$ .

□

Wir halten gleich einige Eigenschaften von Projektoren fest. Dafür brauchen wir:

**Definition 3.1.31**

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Ein Operator  $T \in L(H)$  heißt positiv, wenn  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  für all  $x \in H$  gilt. Wir schreiben dann  $T \geq 0$  und, falls  $A - B \geq 0$  gilt, auch  $A \geq B$ .

**Bemerkung 3.1.32.**

Es seien  $p, p_1, p_2$  orthogonale Projektoren auf abgeschlossene Unterräume von  $H$ . Wir setzen  $U := p(H)$  und  $U_j := p_j(H)$ . Dann gilt für jedes  $f \in L(H)$

1. Es gilt  $f(U) \subset U$  genau dann, wenn  $f \circ p = p \circ f \circ p$  gilt.
2. Es gilt  $f(U) \subset U$  und  $f(U^\perp) \subset U^\perp$  genau dann, wenn  $f \circ p = p \circ f$  gilt.
3. Gilt  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$ , so ist auch  $p_1 \circ p_2$  ein orthogonaler Projektor mit Bild

$$(p_1 \circ p_2)(H) = U_1 \cap U_2 .$$

4. Gilt  $p_1 \circ p_2 = 0$ , so gilt auch  $p_2 \circ p_1 = 0$ . In diesem Fall sind die Unterräume  $U_1$  und  $U_2$  zueinander orthogonal und  $p_1 + p_2$  ist der orthogonale Projektor auf den abgeschlossenen Untervektorraum

$$U_1 \oplus U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\} .$$

5. Es gilt  $p_1 \leq p_2$  genau dann, wenn für alle  $x \in H$  gilt  $\|p_1(x)\| \leq \|p_2(x)\|$ . Insbesondere gilt für einen Projektor  $0 \leq p \leq \text{id}_H$ .

Die einfachen Beweise überlassen wir dem Leser.

**Lemma 3.1.33.**

Seien  $p_1, p_2$  Projektoren auf  $H$ . Wir setzen  $U_j := p_j(H)$  für  $j = 1, 2$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $p_1 \leq p_2$ .
- (ii)  $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = p_1$ .
- (iii)  $U_1 \subset U_2$ .
- (iv)  $p_2 - p_1$  ist ein Projektor .

**Beweis.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Da  $p_2$  ein Projektor ist, gilt auch  $(\text{id} - p_2)^2 = \text{id} - p_2$  und  $(\text{id} - p_2)^* = \text{id} - p_2$ , also ist auch  $\text{id} - p_2$  ein Projektor. Somit gilt

$$\begin{aligned} \|((\text{id} - p_2) \circ p_1)(x)\|^2 &= \langle (\text{id} - p_2)(p_1(x)), (\text{id} - p_2)(p_1(x)) \rangle \\ &= \langle (\text{id} - p_2)(p_1(x)), p_1(x) \rangle . \end{aligned}$$

Aus  $p_1 \leq p_2$  folgt  $\text{id} - p_2 \leq \text{id} - p_1$ , können wir den Ausdruck abschätzen

$$\dots \leq \langle (\text{id} - p_1)(p_1(x)), p_1(x) \rangle = \langle 0, p_1(x) \rangle = 0 \quad .$$

Es folgt  $(\text{id} - p_2) \circ p_1 = 0$  und somit  $p_1 = p_2 \circ p_1$ . Andererseits gilt

$$p_1 = p_1^* = (p_2 \circ p_1)^* = p_1^* \circ p_2^* = p_1 \circ p_2 \quad .$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Für  $y \in U_1$  ist

$$y = p_1(y) = (p_2 \circ p_1)(y) = p_2(y), \quad \text{und somit } y \in U_2 \quad .$$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Es ist  $(p_2 - p_1)^* = p_2^* - p_1^* = p_2 - p_1$ , und jedes  $x \in H$  lässt sich eindeutig zerlegen in  $x = x_2 + x''$  mit  $x_2 \in U_2$  und  $x'' \in U_2^\perp$ .

Wegen  $U_1 \subset U_2$  kann man  $x_2$  weiter zerlegen in  $x_2 = x_1 + x'$  mit  $x_1 \in U_1$  und  $x' \in U_1^\perp$ . Insgesamt finden wir eine Zerlegung

$$x = x_1 + x' + x'' ,$$

Beachten wir, dass  $p_1(x) = x_1$  gilt, so finden wir für alle  $x \in H$

$$(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(x_1 + x') = x_1 = p_1(x)$$

und

$$(p_2 \circ p_1)(x) = p_2(x_1) = x_1 = p_1(x)$$

und rechnen damit

$$(p_2 - p_1)^2(x) = p_2(x) - (p_2 \circ p_1)(x) - (p_1 \circ p_2)(x) + p_1(x) = p_2(x) - p_1(x),$$

also gilt auch  $(p_2 - p_1)^2 = p_2 - p_1$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Es gilt für alle  $x \in H$

$$\langle (p_2 - p_1)(x), x \rangle = \langle (p_2 - p_1)(x), (p_2 - p_1)(x) \rangle \geq 0 \quad ,$$

also ist  $p_2 \geq p_1$ .

□

### **Definition 3.1.34**

Seien  $M$  und  $M'$  metrische Räume. Eine Abbildung  $g : M \rightarrow M'$  heißt eine offene Abbildung, wenn für jede offene Teilmenge  $U \subset M$  das Bild  $g(U)$  offen in  $M'$  ist.

Den folgenden Satz möchten wir hier nicht beweisen und verweisen auf [H, §39]; er wird aber noch wichtig sein:

**Theorem 3.1.35** (Satz von der offenen Abbildung).

Seien  $B, B'$  komplexe Banachräume.

1. Ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f : B \rightarrow B'$  stetig, so ist die Abbildung  $f : B \rightarrow f(B)$  genau dann offen, wenn der Bildraum  $f(B)$  abgeschlossen ist.
2. Insbesondere ist eine  $\mathbb{C}$ -lineare *surjektive* stetige Abbildung  $f : B \rightarrow B'$  offen.

**Korollar 3.1.36.**

Seien  $B, B'$  komplexe Banachräume und  $f : B \rightarrow B'$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare, stetige und bijektive Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung  $f^{-1} : B' \rightarrow B$  stetig.

Man kann diese Aussage auch so reformulieren: ist die inhomogene lineare Gleichung  $f(x) = b$  mit  $f$  stetig für jedes  $b \in B'$  eindeutig lösbar, so hängt die Lösung stetig von  $b$  ab.

## 3.2 Kompakte Operatoren

Wir machen zunächst einige Bemerkungen zu Eigenwertproblemen in Banach- und Hilberträumen.

**Bemerkung 3.2.1.**

1. Wir erinnern uns an die Bestimmung von Eigenwerten: Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung, so gibt es für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  genau zwei Möglichkeiten:

- Die Abbildung  $f - \lambda \text{id}_V$  ist nicht injektiv.  
Dann ist  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V) \neq \{0\}$ ; von Null verschiedene Elemente des Kerns heißen Eigenvektoren;  $\lambda$  heißt dann ein Eigenwert von  $f$ .
- Die Abbildung  $f - \lambda \text{id}_V$  ist injektiv.  
Dann ist  $\lambda$  kein Eigenwert von  $f$ . Nach der Dimensionsformel ist  $f - \lambda \text{id}_V$  in diesem Fall auch surjektiv, und es gibt eine Umkehrfunktion  $(f - \lambda \text{id}_V)^{-1} \in L(V)$ .

2. Die Dimensionsformel können wir im Fall eines unendlich-dimensionalen Vektorraums  $V$  nicht anwenden. Es kann sein, dass ein  $\lambda$  zwar kein Eigenwert von  $f$  ist, also  $(f - \lambda \text{id}_V)$  injektiv ist, aber dennoch  $(f - \lambda \text{id}_V)$  nicht surjektiv ist.

Betrachte etwa  $B = L^2(U)$  mit  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Für jede beschränkte stetige Funktion  $f \in C(U)$  ist der Multiplikationsoperator  $\varphi \mapsto f\varphi$  ein stetiger linearer Operator mit Norm  $\|f\|_\infty$ . Ist  $f$  nicht konstant, so hat dieser Operator keine Eigenvektoren. Hat die stetige Funktion  $f$  eine Nullstelle, so ist der Multiplikationsoperator nicht surjektiv.

3. Sei nun  $B$  ein Banachraum und  $f : B \rightarrow B$  linear und stetig. Ferner existiere für  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Umkehrabbildung  $(f - \lambda \text{id}_B)^{-1} : B \rightarrow B$ . Wir setzen also Injektivität *und* Surjektivität voraus.

Nach Korollar 3.1.36 aus dem Satz von der offenen Abbildung ist dann die lineare Abbildung  $(f - \lambda \text{id}_B)^{-1}$  stetig (und die Abbildung  $(f - \lambda \text{id}_B)$  offen).

Nur die  $\lambda \in \mathbb{C}$ , für die  $f - \lambda \text{id}_V$  bijektiv ist, wollen als "gutartig" ansehen:

**Definition 3.2.2**

Sei  $B$  ein komplexer Banachraum und  $D(T)$  ein dichter Unterraum, d.h.  $\overline{D(T)} = B$ . (Wir lassen natürlich auch  $D(T) = B$  zu.) Sei  $T : D(T) \rightarrow B$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.

1. Dann heißt

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda \text{id}_{D(T)} : D(T) \rightarrow B \text{ ist bijektiv und} \\ (T - \lambda \text{id}_{D(T)})^{-1} \in L(B) \}$$

die Resolventenmenge von  $T$ . Für jedes  $\lambda \in \rho(T)$  heißt die Umkehrabbildung

$$r_\lambda(T) := (T - \lambda \text{id}_{D(T)})^{-1}$$

die Resolvente von  $T$  zu  $\lambda$ .

2. Das Komplement  $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$  der Resolventenmenge heißt das Spektrum des Operators  $T$ . Man nennt

$$\sigma_p(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_{D(T)}) \neq \{0\} \}$$

das Punktspektrum von  $T$  und  $\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$  das kontinuierliche Spektrum von  $T$ .

Man überlegt sich leicht, dass ein orthogonaler Projektor  $p$  das Spektrum  $\sigma(p) = \sigma_p(p) = \{0, 1\}$  hat. Wir machen erste Aussagen über das Spektrum.

### Satz 3.2.3.

Sei  $B$  ein Banachraum und  $T : B \rightarrow B$  ein linearer Operator. Dann ist die Resolventenmenge  $\rho(T)$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $r_\lambda(T)$  eine analytische  $L(B)$ -wertige Funktion auf der Resolventenmenge. Für je zwei Werte  $\lambda, \mu \in \rho(T)$  kommutieren die Resolventen  $r_\lambda(T)$  und  $r_\mu(T)$ , und es gilt die Resolventenformel

$$r_\lambda(T) - r_\mu(T) = (\mu - \lambda)r_\mu(T)r_\lambda(T) .$$

### Beweis.

Sei  $\lambda_0 \in \rho(T)$ . Die formale Rechnung

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0 + (\lambda_0 - T)} = \frac{1}{\lambda_0 - T} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T}} \\ = \frac{1}{\lambda_0 - T} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - T} \right)^n \right]$$

legt es nahe, den Potenzreihenansatz

$$\tilde{r}_\lambda(T) := r_{\lambda_0}(T) \left( \text{id}_B + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n r_{\lambda_0}(T)^n \right)$$

zu machen. Wegen  $\|(r_{\lambda_0}(T))^n\| \leq \|r_{\lambda_0}(T)\|^n$  konvergiert die Reihe für  $|\lambda - \lambda_0| < \|r_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ . Man zeigt dann, dass  $\tilde{r}_\lambda(T)$  in der Tat ein Inverses zu  $(\lambda \text{id} - T)$  ist, so dass  $\lambda \in \rho(T)$ . Die Resolventenmenge ist also offen und  $r_\lambda(T)$  als Funktion mit Potenzreihenentwicklung analytisch. Ferner gilt

$$r_\lambda(T) - r_\mu(T) = r_\lambda(T)(\mu \text{id} - T)r_\mu(T) - r_\lambda(T)(\lambda \text{id} - T)r_\mu(T) = (\mu - \lambda)r_\mu(T)r_\lambda(T) .$$

□



**Korollar 3.2.4.**

Sei  $B$  ein komplexer Banachraum und  $T \in L(B)$  ein beschränkter Operator. Dann ist das Spektrum  $\sigma(T)$  nicht leer. Ferner gilt  $\sigma(T) \subset \overline{B_{\|T\|}(0)} \subset \mathbb{C}$ .

**Beweis.**

- Die formale Rechnung

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right)$$

legt die Neumann-Reihe

$$\frac{1}{\lambda} \left( \text{id}_B + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \right)$$

als Ansatz für die Resolvente nahe. Diese Reihe konvergiert für  $|\lambda| > \|T\|$  und gibt für diese Werte von  $\lambda$  eine Resolvente  $r_\lambda(T)$ .

- Es gilt überdies  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|r_\lambda(T)\| = 0$ . Wäre nun  $\sigma(T)$  die leere Menge, so wäre  $r_\lambda$  eine beschränkte ganze Funktion mit Werten im Banachraum  $L(H)$  und nach dem Satz von Liouville 2.4.13 gleich Null. Dies kann aber nicht gelten.

□

**Satz 3.2.5.**

Sei  $T$  ein beschränkter Operator auf einem Banachraum  $B$ . Man nennt

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

den Spektralradius von  $T$ . Es ist

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n};$$

ist  $B$  sogar ein Hilbertraum und ist  $A$  selbstadjungiert, so gilt  $r(A) = \|A\|$ .

**Beweis.**

- Wir fassen die Neumann-Reihe als Laurentreihe in der Variablen  $\frac{1}{\lambda}$  auf. Sie hat dann einen Konvergenzradius  $\tilde{r}$ , für den nach dem Satz von Cauchy-Hadamard 2.2.3 gilt

$$\tilde{r} = \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Man zeigt dann noch mit einem weiteren Argument [RS, VI, Problem 11], dass die Folge  $\|T^n\|^{1/n}$  sogar konvergiert.

- Wir wollen zeigen, dass der Spektralradius  $r(T)$  gleich  $\tilde{r}^{-1}$  ist; dann ist die Behauptung gezeigt. Wir haben in Satz 3.2.3 gesehen, dass die Resolvente  $r_\lambda(T)$  eine analytische Funktion auf der Resolventenmenge  $\rho_\lambda(T)$  ist, und in Korollar 3.2.4, dass alle  $z$  mit  $|z| > r(T)$  in der Resolventenmenge liegen. Die Neumannreihe muss also für  $\lambda > r(T)$  bzw.  $\frac{1}{\lambda} < r(T)^{-1}$  konvergieren. Also muss für den Konvergenzradius der Neumannreihe gelten  $\tilde{r} \geq r(T)^{-1}$ .

- Andererseits haben wir gesehen, dass dort, wo die Neumannreihe konvergiert, die Resolvente existiert. Dies ist wie bei jeder Potenzreihe der Fall für alle  $\frac{1}{\lambda} < \tilde{r}$ , also für alle  $\lambda > \tilde{r}^{-1}$ . Wäre nun  $\tilde{r} > r(T)^{-1}$ , so wäre  $\tilde{r}^{-1} < r(T)$  und die Neumannreihe würde auch für alle  $\lambda$  mit  $\tilde{r}^{-1} < |\lambda| < r(T)$  konvergieren und eine Resolvente liefern. Dies wäre im Widerspruch zur Definition des Spektralradius  $r(T)$ . Daher muss der Konvergenzradius  $\tilde{r} = r(T)^{-1}$  sein.
- Ist  $B$  ein Hilbertraum und  $A$  selbstadjungiert, so gilt nach Korollar 3.1.29  $\|A^2\| = \|A\|^2$ . Daraus folgt  $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$  und somit durch Übergang zu einer Teilfolge

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\| .$$

□

Wir beschäftigen uns nun mit einer Klasse von Operatoren, deren Eigenschaften recht nah an denen linearer Abbildungen endlich-dimensionaler Vektorräume sind. Sie haben wichtige Anwendungen in der Theorie partieller Differenzialgleichungen und in der Quantenmechanik, die wir aber erst verstehen können, wenn wir etwas mehr über diese Operatoren wissen.

### Definition 3.2.6

1. Seien  $V$  und  $W$  komplexe Banachräume. Eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  heißt kompakte Abbildung, wenn für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $V$  die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W$  eine konvergente Teilfolge besitzt.
2. Eine Folge  $(x_n)$  von Elementen  $x_n \in V$  heißt schwach konvergent gegen  $x \in V$ , wenn für jede stetige Linearform  $\lambda \in V'$  die Folge komplexer Zahlen  $\lambda(x_n)$  gegen  $\lambda(x)$  konvergiert. Wir schreiben dann  $x_n \rightharpoonup x$ .

### Bemerkungen 3.2.7.

1. Wegen der Ungleichung  $|\lambda(x_n - x)| \leq \|\lambda\| \|x_n - x\|$  für  $\lambda \in V'$  sind konvergente Folgen insbesondere schwach konvergent mit gleichem Grenzwert.
2. Jede schwach konvergente Folge eines normierten Vektorraums ist beschränkt. Diese Eigenschaft ist eine Folgerung aus dem Satz von Banach-Steinhaus.
3. Wenn eine Folge schwach konvergiert, so ist ihr Grenzwert eindeutig. Denn würde gelten  $x_n \rightharpoonup x$  und  $x_n \rightharpoonup y$  für  $x \neq y$ , so würde für jede stetige Linearform  $\lambda \in V'$  gelten, dass  $\lambda(x) = \lambda(y)$ . Mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach zeigt man aber, dass es ein beschränktes  $\lambda \in V'$  gibt mit  $\lambda(x) \neq \lambda(y)$ .
4. Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $(e_a)$  eine Hilbertbasis. Für eine Folge  $(\psi_n)$  in  $H$  betrachte die Folgen  $(\psi_n^a)$  der Koordinaten  $\psi_n^a = \langle e_a, \psi_n \rangle$ . Dann gilt  $\psi_n \rightharpoonup \psi$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n^a = \langle e_a, \psi \rangle$  für alle  $a$  gilt und wenn die Folge  $\|\psi_n\|$  beschränkt ist.

Denn gilt  $\psi_n \rightharpoonup \psi$ , so folgt die erste Eigenschaft aus der Definition von schwacher Konvergenz angewandt auf die Linearform  $\langle e_a, - \rangle$  und die zweite nach Punkt 2. Umgekehrt sei  $F = \text{span}(e_a)$  das algebraische Erzeugnis und  $\varphi \in F$ . Dann folgt aus der zweiten Eigenschaft  $\langle \varphi, \psi_n \rangle \rightarrow \langle \varphi, \psi \rangle$  für alle  $\varphi \in F$ . Da  $F$  dicht in  $H$  liegt, finde für beliebiges

$\varphi \in H$  eine Folge  $(\varphi_l)$  mit  $\varphi_l \in F$ , die stark gegen ein vorgegebenes  $\varphi \in H$  konvergiert. Wir schätzen dann ab:

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi_n \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle| &\leq |\langle \varphi - \varphi_l, \psi_n \rangle| + |\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle| + |\langle \varphi_l - \varphi, \psi \rangle| \\ &\leq (c + \|\psi\|) \cdot \|\varphi_l - \varphi\| + |\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle| \end{aligned}$$

Für  $\epsilon > 0$  wähle ein  $l$ , das so groß ist, dass  $\|\varphi_l - \varphi\| < \epsilon$  gilt. Dann gibt es ein  $N_0$ , so dass für alle  $n \geq N_0$  folgt  $|\langle \varphi_l, \psi_n - \psi \rangle| < \epsilon$ . Dies zeigt die schwache Konvergenz  $\psi_n \rightarrow \psi$ .

5. Insbesondere besitzt jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum eine schwach konvergente Teilfolge. (Die Einheitskugel in einem Hilbertraum ist also nicht mehr kompakt, aber immer noch schwach kompakt.)
6. Als Beispiel betrachten wir eine Folge, die durch eine Hilbertbasis  $(e_n)$  in einem Hilbertraum gegeben ist. Hier gilt  $\|e_i - e_j\|^2 = 2$  für  $i \neq j$ , also konvergiert die Folge nicht stark. Andererseits gibt es nach dem Rieszschen Darstellungssatz 3.1.5 für jede Linearform  $\lambda \in V'$  einen Vektor  $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n \in V$  mit  $\lambda(x) = \langle v, x \rangle$ . Es ist dann

$$\lambda(e_n) = \langle v, e_n \rangle = \bar{v}_n \rightarrow 0 ,$$

so dass  $e_n \rightarrow 0$  gilt.

### Satz 3.2.8.

Seien  $V$  und  $W$  komplexe Banachräume.

1. Eine kompakte Abbildung  $T : V \rightarrow W$  bildet schwach konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab.
2. Jede kompakte Abbildung  $T : V \rightarrow W$  ist stetig.

### Beweis.

Sei  $T$  kompakt. Es gelte  $x_n \rightarrow x$ . Setze  $y_n := Tx_n$ . Dann gilt für jedes  $\lambda \in W'$

$$\lambda(y_n) - \lambda(y) = (T'\lambda)(x_n - x) ,$$

wobei die Linearform  $T'\lambda$  definiert ist durch  $T'\lambda(x) = \lambda(Tx)$ ; offenbar ist die Linearform  $T'\lambda$  stetig. Es folgt  $y_n \rightarrow y$  mit  $y = Tx \in W$ . Wäre die Folge  $(y_n)$  nicht auch normkonvergent gegen  $y$ , so gäbe es eine Teilfolge mit  $\|y_{n_k} - y\| \geq \epsilon$  für ein  $\epsilon > 0$ . Da aber die Folge  $x_{n_k}$  als schwach konvergente Folge nach Bemerkung 3.2.7.2 beschränkt ist und  $T$  kompakt ist, hat die Teilfolge  $y_{n_k}$  ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit einem Grenzwert  $\tilde{y} \neq y$ . Diese Teilfolge muss dann auch schwach gegen  $\tilde{y}$  konvergieren, im Widerspruch zur schwachen Konvergenz gegen  $y$ . Also gilt  $y_n \rightarrow y$ .

Sei nun  $x_n \rightarrow x$  eine konvergente Folge. Diese Folge ist nach Bemerkung 3.2.7.1 insbesondere schwach konvergent und wird daher unter  $T$  auf eine konvergente Folge abgebildet. Also ist  $T$  stetig.  $\square$

### Bemerkungen 3.2.9.

1. Sei  $B$  ein komplexer Banachraum. Ein beschränkter Operator  $T \in L(B)$  heißt von endlichem Rang, wenn sein Wertebereich endlich-dimensional ist,  $\dim_{\mathbb{C}} R(T) < \infty$ . Schwach konvergente Folgen sind beschränkt; beschränkte Operatoren sind stetig und bilden die schwach-konvergente Folge auf eine beschränkte Folge ab. Ist der Wertebereich endlich-dimensional, so hat die Folge eine konvergente Teilfolge. Also sind Operatoren von endlichem Rang kompakte Operatoren.

2. Insbesondere sind alle linearen Abbildungen in einen endlich-dimensionalen Banachraum kompakt.
3. Im Fall eines unendlich-dimensionalen Banachraums gibt es stetige Operatoren, die nicht kompakt sind. Für ein Beispiel beschränken wir uns auf den Fall eines separablen Hilbertraums  $H$  mit Hilbertbasis  $(e_i)$ . Dann ist die Identität  $\text{id}_H : H \rightarrow H$  sicher stetig mit Norm 1, bildet aber die nach Bemerkung 3.2.7.6 schwach konvergente Folge  $e_i \rightarrow 0$  auf eine Folge ab, die wegen  $\|e_i - e_j\|^2 = 2$  keine konvergente Teilfolge hat.
4. Man kann allgemeiner zeigen, dass genau dann alle beschränkten Operatoren auf einem komplexen Banachraum  $V$  kompakt sind, wenn  $V$  endlich-dimensional ist.

**Satz 3.2.10.**

Seien  $V, W$  komplexe Banachräume und  $L(V, W)$  der Banachraum der beschränkten linearen Abbildungen mit der Operatornorm  $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ .

1. Gilt  $T_n \rightarrow T$  in der Normtopologie und sind alle Operatoren  $T_n$  kompakt, so ist auch  $T$  kompakt. Die kompakten linearen Abbildungen bilden also einen *abgeschlossenen* Untervektorraum des Banachraums  $L(V, W)$ .
2. Sei  $Z$  ein weiterer Banachraum und  $S \in L(W, Z)$  und  $T \in L(V, W)$ . Ist entweder  $S$  oder  $T$  kompakt, dann ist  $S \circ T$  kompakt.

Insbesondere sind die kompakten Operatoren  $T : W \rightarrow W$  ein sogenanntes beidseitiges Ideal der Banachalgebra  $L(W)$ .

**Beweis.**

1. Wir müssen zeigen, dass kompakte Operatoren einen Untervektorraum bilden. Seien  $T, S$  kompakt und  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Sei  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine beliebige beschränkte Folge in  $V$ ; finde eine Teilfolge  $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so dass die Folge  $(S(x_{j_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  in  $W$  konvergiert. Finde davon wiederum eine Teilfolge  $(x_{j_{k_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ , so dass auch die Folge  $(T(x_{j_{k_n}}))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge  $(\lambda S(x_{j_{k_n}}) + \mu T(x_{j_{k_n}}))_{n \in \mathbb{N}}$ . Also ist auch die Linearkombination  $\lambda S + \mu T$  ein kompakter Operator.
2. Sei  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine in  $L(V, W)$  konvergente Folge kompakter linearer Abbildungen. Sei  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine beliebige beschränkte Folge in  $V$ , also  $\|x_j\| \leq c$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(x_{1j})_{j \in \mathbb{N}}$  der Folge  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(T_1(x_{1j}))_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert; von dieser Teilfolge finde wiederum eine Teilfolge  $(x_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ , so dass auch  $(T_2(x_{2j}))_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Induktiv finde eine Teilfolge  $(x_{n+1,j})_{j \in \mathbb{N}}$  von  $(x_{nj})_{j \in \mathbb{N}}$ , so dass  $(T_{n+1}(x_{n+1,j}))_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

Betrachte die Folge der Diagonalglieder  $y_j := x_{jj}$ ; offenbar konvergiert  $T_n(y_j)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Für gegebenes  $\epsilon > 0$  gibt es wegen der Normkonvergenz ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung  $\|T_n - T\| < \epsilon$  gilt. Finde dann  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $l, k > k_0$

$$\|T_{n_0}(y_l) - T_{n_0}(y_k)\| < \epsilon$$

gilt. Für diese  $l, k$  gilt dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|T(y_l) - T(y_k)\| &\leq \|T(y_l) - T_{n_0}(y_l)\| + \|T_{n_0}(y_l) - T_{n_0}(y_k)\| + \|T_{n_0}(y_k) - T(y_k)\| \\ &< \epsilon \|y_l\| + \epsilon + \epsilon \|y_k\| \leq (2c + 1)\epsilon \end{aligned}$$

Also ist  $(T(y_k))_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge im Banachraum  $W$  und damit eine konvergente Teilfolge von  $(T(x_j))_{j \in \mathbb{N}}$ .

□

Wir betrachten nun wieder kompakte Operatoren auf Hilberträumen.

**Lemma 3.2.11.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$  ein Operator von endlichem Rang. Dann gibt es endliche linear unabhängige Familien  $(e_j)_{j=1,\dots,k}$  und  $(e_j^*)_{j=1,\dots,k}$  in  $H$  mit  $k = \dim \operatorname{im}(T)$ , so dass

$$T(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j^*, x \rangle e_j \quad \text{für alle } x \in H, .$$

Der adjungierte Operator  $T^*$  ist ebenfalls von endlichem Rang. Es gilt  $\dim \operatorname{im}(T^*) = k$  und

$$T^*(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j, x \rangle e_j^* .$$

**Beweis.**

1. Der Beweis sind einfache Rechnungen. Sei  $(e_j)_{j=1,\dots,k}$  eine beliebige Orthonormalbasis des Bildes  $R(T)$ . Entwickle für  $x \in H$

$$T(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(x) e_j ,$$

wobei

$$\alpha_l(x) = \langle e_l, T(x) \rangle = \langle T^* e_l, x \rangle .$$

Wir setzen  $e_l^* := T^* e_l$  und haben

$$T(x) = \sum_{j=1}^k \langle e_j^*, x \rangle e_j ,$$

2. Für beliebige  $x, y \in H$  gilt

$$\langle y, T(x) \rangle = \sum_{j=1}^k \langle e_j^*, x \rangle \langle y, e_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k \langle e_j, y \rangle e_j^*, x \right\rangle .$$

Der Vergleich mit der definierenden Gleichung  $\langle y, T(x) \rangle = \langle T^*(y), x \rangle$  liefert die Darstellung

$$T^*(y) = \sum_{j=1}^k \langle e_j, y \rangle e_j^* .$$

des adjungierten Operators  $T^*$ . Also ist auch  $T^*$  von endlichem Rang und die Familie  $(e_j^*)_{j=1,\dots,k}$  ist ein Erzeugendensystem des Bildes  $\operatorname{im}(T^*)$ ; es folgt  $\dim \operatorname{im}(T^*) \leq \dim \operatorname{im}(T)$ . Aus  $(T^*)^* = T$ , vgl. Satz 3.1.24, folgt auch die umgekehrte Ungleichung

$$\dim \operatorname{im}(T) = \dim \operatorname{im}((T^*)^*) \leq \dim \operatorname{im}(T^*),$$

und somit  $\dim R(T^*) = \dim R(T)$ .

□

**Satz 3.2.12.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $T \in L(H)$ .

1. Der Operator  $T$  ist genau dann kompakt, wenn es eine Folge  $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Operatoren von endlichem Rang gibt mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f - f_j\| = 0$ .
2. Ein Operator  $T$  ist genau dann kompakt, wenn der adjungierte Operator  $T^*$  kompakt ist.

**Beweis.**

1. Da Operatoren von endlichem Rang nach Bemerkung 3.2.9.1 kompakt sind, folgt aus Satz 3.2.10 sofort, dass Operatoren im Normabschluss des Unterraums von Operatoren endlichen Ranges kompakt sind.
2. Sei nun umgekehrt  $T$  kompakt. Wir müssen  $T$  durch Operatoren endlichen Ranges approximieren. Wähle eine Orthonormalbasis  $(e_j)$  von  $H$  und setze

$$\lambda_n := \sup_{\|\psi\|=1, \psi \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)^\perp} \|T\psi\| ;$$

dies ist eine monoton fallende Folge mit  $\lambda_n \geq 0$ , die also gegen einen Grenzwert  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  konvergiert.

Wähle nun eine Folge  $\psi_n \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)^\perp$  mit  $\|\psi_n\| = 1$  und  $\|T\psi_n\| \geq \lambda/2$ . Aus  $\psi_n \rightarrow 0$  folgt wegen Satz 3.2.8.1, dass  $T\psi_n \rightarrow 0$ . Also ist  $\lambda = 0$ . Für  $x \in H$  gilt nun

$$\| \underbrace{T(x) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, x \rangle T(e_j)}_{\in \text{span}(e_1, \dots, e_n)^\perp} \| \leq \lambda_n \|x\| ,$$

so dass die Operatoren endlichen Rangs  $\sum_{j=1}^n \langle e_j, - \rangle T(e_j)$  gegen den kompakten Operator  $T$  konvergieren.

3. Sei  $T$  kompakt. Dann gibt es nach 2. eine Folge von Operatoren  $T_n$  von endlichem Rang, die gegen  $T$  konvergieren. Nach Lemma 3.2.11 sind die adjungierten Operatoren  $T_n^*$  auch von endlichem Rang; ferner gilt nach Satz 3.1.24

$$\|T^* - T_n^*\| = \|T - T_n\|,$$

also auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^* = T^*$ . Nach Satz 3.2.10 ist  $T^*$  als Grenzwert von Operatoren endlichen Ranges kompakt. Ist umgekehrt  $T^*$  kompakt, so folgt mit gleichem Schluss, dass  $T = (T^*)^*$  kompakt ist.

□

Wir brauchen noch einige Theorie, um kompakte Operatoren anwenden zu können:

**Satz 3.2.13** (Analytisches Fredholm-Theorem).

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Sei  $D \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Sei  $f : D \rightarrow L(H)$  eine analytische operatorwertige Funktion, so dass  $f(z)$  für alle  $z \in D$  ein kompakter Operator ist. Dann gilt die folgende Alternative: entweder gilt

- Der Operator  $(\text{id}_H - f(z))^{-1}$  existiert in  $L(H)$  für *kein*  $z \in D$ .

oder es gilt

- Der Operator  $(\text{id}_H - f(z))^{-1}$  existiert in  $L(H)$  für alle  $z \in D \setminus S$ , wo bei  $S$  eine diskrete Untermenge von  $U$  ist, d.h. keinen Häufungspunkt in  $U$  besitzt. Dann ist  $(\text{id}_H - f(z))^{-1}$  analytisch auf  $D \setminus S$  und hat Pole als Singularitäten in  $S$ . Die Residuen an den Polen sind Operatoren von endlichem Rang. Für  $z \in S$  hat die Eigenwertgleichung  $f(z)\psi = \psi$  eine von Null verschiedene Lösung in  $H$ .

### Beweis.

Es geht entscheidend das Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 für analytische Funktionen ein.

Wir zeigen, dass in der Umgebung jedes Punktes  $z_0 \in D$  eine der beiden Aussagen gilt. Da  $U$  zusammenhängend ist, folgt dann die Behauptung.

- Wähle  $r > 0$ , so dass aus  $|z - z_0| < r$  folgt  $\|f(z) - f(z_0)\| < \frac{1}{2}$ . Da  $f(z_0)$  ein kompakter Operator ist, finde mit Satz 3.2.12 einen Operator endlichen Rangs  $F$ , so dass  $\|f(z_0) - F\| < \frac{1}{2}$  gilt. Dann ist für  $z \in B_r(z_0)$  nach der Dreiecksungleichung  $\|f(z) - F\| < 1$ . Daher existiert für  $z \in B_r(z_0)$  die Abbildung

$$(\text{id}_H - f(z) + F)^{-1} = \text{id}_H + \sum_{n=1}^{\infty} (f(z) - F)^n$$

und ist in  $z$  analytisch. Da  $F$  endlichen Rang hat, finden wir nach Lemma 3.2.11 linear unabhängige Vektoren  $(\psi_i)_{i=1, \dots, N}$  und Vektoren  $(\phi)_{i=1, \dots, N}$ , so dass

$$F(v) = \sum_{n=1}^N \langle \phi_n, v \rangle \psi_n \quad \text{für alle } v \in H .$$

- Führe nun für  $z \in B_r(z_0)$  die Familie von Vektoren

$$\phi_n(z) := (\text{id}_H - f(z) + F)^{-1*} \phi_n \in H$$

und die Familie von Abbildungen

$$\begin{aligned} g(z) &:= F \circ (\text{id}_H - f(z) + F)^{-1} = \sum_{n=1}^N \langle \phi_n, (\text{id}_H - f(z) + F)^{-1} \cdot \rangle \psi_n \\ &= \sum_{n=1}^N \langle \phi_n(z), - \rangle \psi_n \end{aligned} .$$

ein. Die Gleichung

$$(\text{id}_H - f(z)) = (\text{id}_H - g(z)) \circ (\text{id}_H - f(z) + F)$$

zeigt, dass  $(\text{id}_H - f(z))$  für  $z \in B_r(z_0)$  genau dann invertibel ist, wenn  $\text{id}_H - g(z)$  invertibel ist, und dass die Eigenwertgleichung  $\psi = f(z)\psi$  genau dann eine Lösung  $\psi \neq 0$  hat, wenn die Gleichung  $\varphi = g(z)\varphi$  eine Lösung  $\varphi \neq 0$  hat. Somit reicht es aus, alle Aussagen für die Familie  $g(z)$  von Abbildungen endlichen Rangs zu zeigen.

- Entwickle eine Lösung  $\varphi$  von  $g(z)\varphi = \psi$  in Komponenten,  $\varphi = \sum_{n=1}^N \beta_n \psi_n$  mit  $\beta_n \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $\varphi$  genau dann Lösung, wenn die komplexen Zahlen  $(\beta_n)$  eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\beta_n = \sum_{m=1}^N \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m$$

sind. Daher gibt es eine von Null verschiedene Lösung genau dann, wenn

$$d(z) := \det(\delta_{m,n} - \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle) = 0$$

gilt. Da die Matrixelemente analytische Funktionen sind, ist auch die Funktion  $d(z)$  analytisch. Nach dem Prinzip der Isoliertheit der Nullstellen 2.2.6 ist die Nullstellenmenge  $S$  von  $d(z)$  entweder ganz  $B_r(z_0)$  oder eine diskrete Menge, entsprechend der Alternative. Verschwindet  $d$  auf ganz  $B_r(z_0)$ , so gibt es nirgendwo ein Inverses und wir sind im ersten Fall der Alternative. Im zweiten Fall betrachten wir den Unterfall, dass  $z \notin S$ , also  $z$  nicht in der Nullstellenmenge liegt; für gegebenes  $\psi$  können wir die Gleichung  $(\text{id} - g(z))\varphi = \psi$  durch den Ansatz

$$\varphi = \psi + \sum_{n=1}^N \beta_n \psi_n$$

lösen, wenn wir Lösungen  $(\beta_n)$  mit

$$\beta_n = \langle \phi_n(z), \psi \rangle + \sum_{m=1}^N \langle \phi_n(z), \psi_m \rangle \beta_m .$$

finden. Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem hat wegen  $d(z) \neq 0$  eine nicht-triviale Lösung. Also existiert  $(\text{id} - g(z))^{-1}$  und somit  $(\text{id} - f(z))^{-1}$  genau für  $z \notin S$ .

- Dass  $(\text{id} - f(z))^{-1}$  analytisch ist bis auf Pole in  $S$  und dort als Residuen Operatoren endlichen Rangs hat, folgt aus expliziten Formeln für die  $\beta_n$ .

□

### Korollar 3.2.14 (Fredholmsche Alternative).

Sei  $A$  ein kompakter Operator auf  $H$ . Dann existiert entweder der inverse Operator  $(\text{id} - A)^{-1}$  in  $L(H)$ , oder die Eigenvektorgleichung  $A\psi = \psi$  hat eine von Null verschiedene Lösung.

### Beweis.

Betrachte die analytische Funktion  $f(z) = zA$ . Im analytischen Fredholmtheorem 3.2.13 kann die erste Alternative nicht zutreffen, da für  $z = 0$  der Operator  $\text{id}_H - zA = \text{id}_H$  invertibel ist. In der zweiten Alternative gilt entweder  $1 \in S$ , dann ist die Eigenvektorgleichung lösbar, oder  $1 \notin S$ , dann existiert das Inverse  $(\text{id}_H - A)^{-1}$ . □

### Bemerkung 3.2.15.

1. Eine wichtige Anwendung der Fredholmschen Alternative ist das Studium von Lösungsmengen von Gleichungen  $\psi = \varphi + A\psi$  für gegebenes  $\varphi \in H$  mit gegebenem kompakten Operator  $A$ , mit anderen Worten also von inhomogenen linearen Gleichungen der Form  $(\text{id}_H - A)\psi = \varphi$ .



Angenommen, wir wissen, dass für irgendein  $\varphi \in H$  höchstens eine Lösung  $\psi_0$  existieren kann. Dann kann die Eigenvektorgleichung  $A\psi = \psi$  keine von Null verschiedene Lösung  $\psi$  haben, denn dann wäre wegen

$$A(\psi_0 + \psi) + \varphi = \psi_0 + \psi$$

mit  $\psi_0$  auch  $\psi_0 + \psi$  eine weitere Lösung. Nach der Fredholmschen Alternative 3.2.14 muss dann  $(\text{id} - A)^{-1}$  existieren. Also impliziert in diesem Fall Eindeutigkeit für eine Inhomogenität  $\varphi$  und Kompaktheit von  $A$  die eindeutige Lösbarkeit für alle  $\varphi$  und die stetige Abhängigkeit der Lösung von  $\varphi$ .

2. Sei  $\Omega$  eine beschränkte offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ . Man kann zeigen, vgl. [RS, Theorem VI.22], dass der Operator  $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  mit dem Integralkern  $k$

$$(Kf)(x) := \int_{\Omega} k(x, y) f(y) d^n y \quad \text{für } f \in L^2(\Omega)$$

kompakt ist.

3. Wir wenden die Theorie kompakter Operatoren auf das Randwertproblem für den Laplace-Operator an. Sei  $D \subset \mathbb{R}^3$  offen und beschränkt mit glattem Rand  $\partial D$ . Wir suchen für eine vorgegebene stetige Funktion  $f$  auf  $\partial D$  eine Funktion  $u \in C^2(D, \mathbb{R}) \cap C^0(\overline{D}, \mathbb{R})$  mit

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{für } x \in D \quad \text{und} \quad u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \partial D .$$

Sei  $n_y$  der äußere Normalenvektor in  $y \in \partial D$ ; wir machen mit

$$K(x, y) = \frac{\langle x - y, n_y \rangle}{2\pi|x - y|^3} \quad \text{für } y \in \partial D \text{ und } x \in D$$

den Ansatz

$$(*) \quad u(x) = \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) dS(y)$$

mit einer noch zu bestimmenden stetigen Funktion  $\varphi$ . Das Integral ist wohldefiniert für  $x \in D$  und es gilt  $\Delta u(x) = 0$ . Sei  $x_0 \in \partial D$ ; für  $x \rightarrow x_0$  vom Innern von  $U$  gilt

$$u(x) \rightarrow -\varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0, y) \varphi(y) dS(y) ;$$

bei Annäherung von außen ersetze  $-\varphi(x_0)$  im ersten Summanden durch  $\varphi(x_0)$ . Man kann zeigen, dass die durch den Integraloperator definierte Abbildung

$$\begin{aligned} T : C(\partial D) &\rightarrow C(\partial D) \\ T\varphi(x) &:= \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) dS(y) \end{aligned}$$

wohldefiniert und kompakt ist. (Hierbei gehen wesentlich Eigenschaften des Randes ein!). Für das Randwertproblem suchen wir also Lösungen  $\varphi$  der Integralgleichung

$$(**) \quad f(x) = -\varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0, y) \varphi(y) dS(y)$$

für gegebenes  $f$ , oder Lösungen von  $-f = (\text{id} - T)\varphi$ . Nach der Fredholmschen Alternative müssen wir dafür nur ausschließen, dass die Eigenwertgleichung  $T\psi = \psi$  eine Lösung hat, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu erhalten.

Definieren wir  $u : D \rightarrow \mathbb{R}$  wie in (\*), mit einer hypothetischen Eigenfunktion  $\psi$  an Stelle von  $\varphi$ , dann haben wir mit  $u$  eine harmonische Funktion, die auf dem Rand gegen Null geht, also nach dem Maximumsprinzip verschwindet. Man zeigt ferner, dass  $u$  auch außerhalb von  $D$  verschwindet. Wegen der (\*\*) entsprechenden Aussage für Annäherung von außen folgt  $0 = \psi(x) + T\psi(x) = 2\psi(x)$ . Also kann die erste Alternative nicht zutreffen. Wir haben also Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des elliptischen Randwertproblems und die stetige Abhängigkeit von den Randwerten  $f$ .

Wir können nun mit Hilfe des analytischen Fredholm-Theorems 3.2.13 Aussagen über das Spektrum kompakter Operatoren machen:

**Satz 3.2.16** (Riesz-Schauder).

Das Spektrum eines kompakten Operators  $A$  auf einem Hilbertraum  $H$  ist die höchstens abzählbare Menge der Eigenwerte, eventuell vereinigt mit  $\{0\}$ .  $\lambda = 0$  ist auch der einzige mögliche Häufungspunkt im Spektrum. Die Eigenräume der von Null verschiedenen Eigenwerte sind endlich-dimensional.

**Beweis.**

Betrachte die auf der ganzen komplexen Ebene definierte analytische Funktion  $f(z) := zA$ . Für  $z = 0$  existiert  $(\text{id}_H - f(z))^{-1} = \text{id}_H$ ; wir sind also in der zweiten Alternative von Satz 3.2.13. Daher ist die Menge

$$C := \{z \in \mathbb{C} \mid zA\psi = \psi \text{ hat eine Lösung} \}$$

diskret. Damit gibt es höchstens abzählbar viele Eigenwerte.

Ist  $\frac{1}{\lambda}$  nicht in der diskreten Menge  $C$ , so existiert der Operator

$$(\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\text{id}_H - \frac{1}{\lambda}A)^{-1};$$

es gibt also nur ein Punktspektrum und kein kontinuierliches Spektrum. Da  $C$  keinen Häufungspunkt besitzt, ist 0 der einzig mögliche Häufungspunkt der Inversen der Elemente von  $C$ . Die Tatsache, dass die Eigenräume zu Eigenwerten ungleich Null endlich-dimensional sind, folgt direkt aus der Kompaktheit von  $A$ .  $\square$

Wir können nun zeigen, dass sich kompakte selbstadjungierte Operatoren ganz ähnlich verhalten wie endlich-dimensionale selbstadjungierte Operatoren:

**Satz 3.2.17** (Hilbert-Schmidt).

Sei  $A$  ein selbstadjungierter kompakter Operator auf einem separablen Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es eine Hilbertbasis  $(e_n)$  von  $H$ , so dass  $Ae_n = \lambda_n e_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

**Beweis.**

- Wähle für den Eigenraum zu jedem Eigenwert eine Orthonormalbasis. Da Eigenräume eines selbstadjungierten Operators zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal stehen, erhalten wir so eine orthonormale Familie  $(e_i)$  in  $H$ . Sei  $U$  der Abschluss des Erzeugnisses dieser Familie in  $H$ .
- Es gilt  $A(U) \subset U$  und, da  $A$  selbstadjungiert ist,  $A(U^\perp) \subset U^\perp$ . Setze  $\tilde{A} := A|_{U^\perp}$ ; auch  $\tilde{A}$  ist selbstadjungiert und kompakt. Ferner gilt für das Spektrum  $\sigma(\tilde{A}) \subset \sigma(A)$ . Nach dem Satz von Riesz-Schauder 3.2.16 ist jedes  $\lambda \in \sigma(\tilde{A}) \setminus \{0\}$  ein Eigenwert, daher existiert ein

Eigenvektor von  $A$  zu diesem Eigenwert, der aber dann in  $U$  liegen muss. Also ist  $r(\tilde{A}) = 0$  und wegen Bemerkung 3.2.5 gilt  $\|\tilde{A}\| = 0$ . Aber Vektoren im Kern sind Eigenvektoren und somit in  $U$ , also  $U^\perp = \{0\}$ .

- Die Aussage  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  folgt direkt aus dem Satz 3.2.16 von Riesz-Schauder.

□

Wir zeigen nun, wie sich Lemma 3.2.11 von Operatoren endlichen Rangs auf kompakte Operatoren verallgemeinert:

**Korollar 3.2.18.**

Sei  $A$  ein kompakter Operator auf  $H$ . Dann gibt es (nicht-notwendigerweise vollständige) orthonormale Familien  $(e_n)_{n=1}^N$  und  $(e_n^*)_{n=1}^N$  und positive reelle Zahlen  $(\lambda_n)_{n=1}^N$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ , so dass

$$A = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle e_n^*, - \rangle e_n .$$

Die Summe kann endlich oder unendlich sein; im letzteren Fall konvergiert sie in der Normtopologie.

**Beweis.**

Weil  $A$  kompakt ist, ist nach Satz 3.2.12 auch  $A^*$  und nach Satz 3.2.10 auch der selbstadjungierte und positive Operator  $A^*A$  kompakt. Nach dem Satz 3.2.17 finde eine orthonormale Menge  $(e_n)_{n=1, \dots, N}$  so dass  $A^*Ae_n = \mu_n e_n$  gilt mit  $\mu_n > 0$  und dass  $A^*A$  auf dem orthogonalen Komplement des Erzeugnisses der Familie verschwindet. Sei  $\lambda_n := \sqrt{\mu_n}$  die positive Quadratwurzel. Setze  $e_n^* := \frac{1}{\lambda_n} Ae_n$ . Dann gilt

$$\langle e_n^*, e_m^* \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle Ae_n, Ae_m \rangle = \frac{1}{\lambda_n \lambda_m} \langle e_n, A^*Ae_m \rangle = \frac{\mu_m}{\lambda_n \lambda_m} \langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} ,$$

so dass auch die Familie  $(e_n^*)_{n=1, \dots, N}$  orthonormal ist. Damit ist wie in Lemma 3.2.11

$$Av = \sum_{n=1}^N \langle A^*e_n^*, v \rangle e_n^* = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle e_n, v \rangle e_n^* ,$$

wobei wir benutzt haben

$$A^*e_n^* = \lambda_n^{-1} A^*Ae_n = \frac{\mu_n}{\lambda_n} e_n = \lambda_n e_n .$$

Man beachte: wenn  $A$  selbstadjungiert und positiv ist, gilt  $e_n^* = \frac{1}{\lambda_n} Ae_n = e_n$ , und man erhält die Aussage von Satz 3.2.17 als Spezialfall. □

Wir erwähnen, dass kompakte Operatoren mehrere interessante Unterklassen besitzen. Dies ist von großer praktischer Bedeutung, da man oft leichter zeigt, dass ein konkret gegebener Operator in einer der Unterklassen liegt.

Wir erinnern an den Begriff eines positiven Operators  $B$  aus Definition 3.1.31: dies sind Operatoren, für die gilt  $\langle x, Bx \rangle \geq 0$  für alle  $x \in H$ . Man zeigt dann zum Beispiel mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der analytischen Funktion  $\sqrt{1-z}$  für  $|z| \leq 1$ :

**Satz 3.2.19.**

Sei  $A \in L(H)$  positiv. Dann gibt es einen eindeutigen positiven Operator  $B \in L(H)$  mit  $B^2 = A$ . Der Operator  $B$  kommutiert mit jedem beschränkten Operator, der mit  $A$  kommutiert. Wir schreiben  $B = \sqrt{A}$ .

Wir werden einen unabhängigen Beweis dieses Satzes in Abschnitt 3.3 sehen.

**Bemerkungen 3.2.20.**

1. Für jeden Operator  $A \in L(H)$  ist der Operator  $A^*A$  positiv, denn es gilt  $\langle A^*A, x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$ . Wir betrachten daher den positiven selbstadjungierten Operator  $|A| := \sqrt{A^*A}$ .  
Ist  $A$  kompakt, so waren die Eigenwerte von  $|A|$  die sogenannten singulären Werte  $\lambda_n$  in Satz 3.2.18.
2. Man beachte, dass im Allgemeinen nicht gilt  $|AB| = |A| \circ |B|$  oder  $|A| = |A^*|$ .
3. Das Analogon zur Polarzerlegung komplexer Zahlen für beschränkte Operatoren als Produkt  $A = U|A|$  mit  $U$  unitär und  $|A|$  positiv ist etwas subtil: ist zum Beispiel  $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  die Verschiebung nach rechts wie in Beispiel 3.1.26, dann ist  $A^*$  die Verschiebung nach links und  $A^*A = \text{id}_{\ell^2}$ , also  $|A| = \sqrt{A^*A} = \text{id}$ . Schreiben wir  $A = U|A|$ , so muss in diesem Fall  $U = A$  gelten. Aber  $A$  ist *nicht* unitär, da  $A$  nicht surjektiv ist.
4. Ein Operator  $U \in L(H)$  heißt partielle Isometrie, wenn die Restriktion von  $U$  auf den abgeschlossenen Unterraum  $\ker U^\perp$  eine Isometrie ist.
5. Man zeigt dann [RS, Theorem VI.10], dass jeder beschränkte Operator  $A \in L(H)$  eindeutig in der Form  $A = U|A|$  geschrieben werden kann, mit einer partiellen Isometrie  $U$  mit  $\ker U = \ker A$ .

**Bemerkungen 3.2.21.**

1. Sei  $H$  ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis  $(e_i)$ . Für einen positiven Operator  $A \in L(H)$  definieren wir die Spur durch

$$\text{tr}(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Ae_n \rangle \in [0, \infty] .$$

Sie ist unabhängig von der Orthonormalbasis, linear, invariant unter Konjugation mit einem unitären Operator  $U$ , d.h.  $\text{tr}UAU^{-1} = \text{tr}(A)$ , und monoton: aus  $0 \leq A \leq B$  folgt  $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$ .

2. Ein Operator  $A \in L(H)$  heißt Operator von Spurklasse, wenn  $\text{tr}|A| < \infty$  gilt. Wir bezeichnen die Menge der Spurklasseoperatoren in  $L(H)$  mit  $\mathcal{I}_1$ .
3. Die Operatoren von Spurklasse bilden ein beidseitiges  $*$ -Ideal von  $B(H)$ : sie sind ein Untervektorraum, aus  $A \in \mathcal{I}_1$  und  $B \in L(H)$  folgt  $A \circ B \in \mathcal{I}_1$  und  $B \circ A \in \mathcal{I}_1$ , und mit  $A$  liegt auch  $A^*$  in  $\mathcal{I}_1$ .
4. Mit der Norm  $\|A\|_1 := \text{tr}|A|$  wird  $\mathcal{I}_1$  zur Banachalgebra. Es gilt  $\|A\| \leq \|A\|_1$ . Spurklasse-Operatoren sind kompakte Operatoren. Ein kompakter Operator  $A$  ist Spurklasse genau dann, wenn für die positiven Zahlen  $\lambda_i$  aus Korollar 3.2.18 gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ .
5. Dichtematrizen oder statistische Matrizen in der Quantenmechanik sind selbstadjungierte positive Operatoren von Spurklasse mit Spur 1 und somit insbesondere kompakt. Die nicht-negativen Zahlen  $\lambda_i$  aus Korollar 3.2.17 mit  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$  haben dann die Interpretation klassischer Wahrscheinlichkeiten. Der Zerlegung in Eigenräume nach dem Satz 3.2.17 von Hilbert-Schmidt sagt, dass wir den gemischten Zustand als Superposition reiner Zustände schreiben können.

Damit für einen gegebenen Hamilton-Operator  $h$  ein Operator der Form  $\frac{1}{Z}e^{-\beta h}$  mit  $\beta > 0$  eine Dichtematrix für ein kanonisches Ensemble oder ein Operator der Form  $\frac{1}{Z}e^{-\beta(h-\mu N)}$  mit  $N$  dem Anzahloperator und  $\mu$  dem chemischen Potential eine Dichtematrix für ein makrokanonisches Ensemble sein kann, darf der Hamilton-Operator nur ein reines Punktspektrum haben. Es kann insbesondere Grenztemperaturen geben, sogenannte Hagedorn-Temperaturen. Für allgemeinere Hamilton-Operatoren arbeitet man mit sogenannten KMS-Zuständen.

6. Man nennt einen Operator  $T \in L(H)$  einen Hilbert-Schmidt Operator, wenn  $\text{tr } T^*T < \infty$  gilt. Wir erhalten ein weiteres  $*$ -Ideal  $\mathcal{I}_2$  von  $L(H)$ , das mit der Struktur eines Hilbertraums verstanden werden kann. Hilbert-Schmidt Operatoren sind kompakt. Ein kompakter Operator  $A$  ist Hilbert-Schmidt, genau dann wenn für die positiven Zahlen  $\lambda_i$  aus Korollar 3.2.18 gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$ . Man kann nun für  $1 \leq p < \infty$  analog zu den  $L^p$ -Räumen weitere Ideale  $\mathcal{I}_p$  einführen, die Schattenideale mit Norm  $\|a\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p)^{1/p} < \infty$ .

### 3.3 Die Spektralsätze für beschränkte selbstadjungierte Operatoren

#### Betrachtung 3.3.1.

Sei  $A$  ein beschränkter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann existieren alle Potenzen  $A^n$  und somit können wir für jedes Polynom  $f \in \mathbb{C}[X]$  einen Operator  $f(A) \in L(H)$  definieren. Ist  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum, so können wir  $A$  diagonalisieren. In einer Basis  $(v_i)_{i=1, \dots, n}$  von Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_i \in \sigma(A) \subset \mathbb{R}$  schreiben wir, wenn  $p_i \in \text{End}(H)$  der Projektor auf den Unterraum  $\mathbb{C}v_i$  ist,

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \quad \text{und erhalten} \quad f(A) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) p_i .$$

Dies legt es nahe, auch für einen beschränkten selbstadjungierten Operator  $A$  auf einem Hilbertraum für geeignete Funktionen  $f$  auf dem Spektrum  $\sigma(A)$  den Operator  $f(A) \in L(H)$  zu definieren.

Unser Ziel ist:

#### Theorem 3.3.2 (Spektralsatz - stetiger Funktionalkalkül).

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\Phi : C^0(\sigma(A)) \rightarrow L(H)$$

von den komplexwertigen stetigen Funktionen auf dem Spektrum  $\sigma(A)$  in die beschränkten Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\Phi$  ist ein unitärer  $*$ -Algebra Morphismus, d.h.  $\Phi$  ist linear und es gilt

$$\Phi(1) = \text{id}_H, \quad \Phi(f \cdot g) = \Phi(f)\Phi(g) \quad \text{und} \quad \Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$$

für alle  $f, g \in C(\sigma(A))$ .

2.  $\Phi$  ist stetig: es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|\Phi(f)\|_{L(H)} \leq C\|f\|_{\infty}$ .
3. Für die Funktion  $f(x) = x$  auf  $\sigma(A)$  gilt  $\Phi(f) = A$ .

$\Phi$  hat die weiteren Eigenschaften:

4. Aus  $A\psi = \lambda\psi$  mit  $\psi \in H$  folgt  $\Phi(f)\psi = f(\lambda)\psi$ .
5. Das Spektrum von  $\Phi(f)$  ist  $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ .
6. Aus  $f \geq 0$  folgt  $\Phi(f) \geq 0$ .
7. Die Eigenschaft 2. wird verschärft zu der Aussage  $\|\Phi(f)\|_{L(H)} = \|f\|_\infty$ .

Wir schreiben auch  $f(A)$  für  $\Phi(f)$ . Es ist klar, dass durch die Eigenschaften 1. und 3. die Abbildung  $\Phi$  auf Polynomen festgelegt wird. Auch wenn  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > \|A\|$  ist, konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n A^n$  im Banachraum  $L(H)$  absolut und ergibt einen Kandidaten für  $\Phi(f)$ . So kann man einen analytischen Funktionalkalkül für beschränkte Operatoren sogar auf Banachräumen entwickeln. Dies ist aber für Anwendungen in der Physik nicht ausreichend, da die interessanten Operatoren in der Quantenmechanik nicht beschränkt sind.

Andererseits liegen Polynome im Raum der stetigen Funktionen bezüglich der Supremumsnorm dicht:

**Satz 3.3.3** (Weierstraßscher Approximationssatz).

Sei  $[a, b]$  ein kompaktes reelles Intervall und  $f \in C([a, b])$ . Dann gibt es eine Folge  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  polynomialer Funktionen  $p_k$ , die auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Dies beweist man mit ähnlichen Methoden, mit denen wir im zweiten Semester die gleichmäßige Approximation von stetigen periodischen Funktionen durch trigonometrische Polynome gezeigt haben.

Wir brauchen häufiger das folgende Lemma:

**Lemma 3.3.4.**

Seien  $V_1, V_2$  vollständige normierte Räume und  $W_1 \subset V_1$  ein dichter Unterraum. Sei  $T : W_1 \rightarrow V_2$  ein *beschränkter* linearer Operator. Dann kann  $T$  eindeutig zu einem beschränkten Operator  $\tilde{T} : V_1 \rightarrow V_2$  mit der gleichen Norm fortgesetzt werden.

**Beweis.**

- Sei  $(x_n)$  eine Folge im Unterraum  $W_1$ , die gegen ein Element  $v \in V_1$  konvergiert. Diese Folge ist als konvergente Folge insbesondere eine Cauchy-Folge. Wegen  $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$  ist auch die Folge  $Tx_n$  aller Bildwerte eine Cauchy-Folge. Da  $V_2$  vollständig ist, konvergiert diese Folge.
- Der Grenzwert hängt nur von  $v \in V_1$  ab: denn sei  $(x'_n)$  eine weitere Folge in  $V$ , die auch gegen  $v$  konvergiert, so hat nach dem gleichen Argument auch die Folge  $(Tx'_n)$  einen Grenzwert in  $V_2$ . Da auch die Folge  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots$  einen Grenzwert hat, müssen die Grenzwerte der beiden Folgen übereinstimmen. Setze  $\tilde{T}(v)$  gleich diesem Grenzwert.
- Man überprüft leicht, dass  $\tilde{T}$  eindeutig und linear ist. Aus der Stetigkeit der Norm und von  $T$  folgt

$$\|\tilde{T}v\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|v\|$$

folgt die Stetigkeit von  $\tilde{T}$  und die Ungleichung  $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ . Die umgekehrte Ungleichung ist trivial.

□

Um Lemma 3.3.4 anwenden zu können, brauchen wir für ein beliebiges Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  eine Normabschätzung für den beschränkten Operator  $P(A)$  auf  $H$ . Dazu brauchen wir erst eine Aussage über das Spektrum des Operators  $P(A)$ .

**Lemma 3.3.5.**

Für  $P(X) = \sum_{n=0}^N a_n x^n \in \mathbb{C}[X]$  setze  $P(A) = \sum_{n=0}^N a_n A^n \in L(H)$ . Dann ist das Spektrum

$$\sigma(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\} .$$

**Beweis.**

⊇ Sei  $\lambda \in \sigma(A)$ . Da  $\lambda$  trivialerweise eine Nullstelle des Polynoms  $P(x) - P(\lambda)$  ist, schreiben wir

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x)$$

mit einem Polynom  $Q(x)$ . Daher ist  $P(A) - P(\lambda) \text{id}_H = (A - \lambda \text{id}_H)Q(A)$ . Da  $A - \lambda \text{id}_H$  kein beschränktes Inverses hat, hat auch  $P(A) - P(\lambda) \text{id}_H$  kein beschränktes Inverses, also ist  $P(\lambda) \in \sigma(P(A))$ .

⊆ Sei umgekehrt  $\mu \in \sigma(P(A))$ . Zerlege in Linearfaktoren

$$P(x) - \mu = a(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_N) .$$

Angenommen, keine der Nullstellen  $\lambda_i$  wäre in  $\sigma(A)$ . Dann gäbe es den beschränkten Operator

$$(P(A) - \mu \text{id}_H)^{-1} = a^{-1}(A - \lambda_1 \text{id}_H)^{-1} \cdots (A - \lambda_N \text{id}_H)^{-1} .$$

und es gäbe ein beschränktes Inverses zu  $P(A) - \mu \text{id}_H$ , im Widerspruch zu  $\mu \in \sigma(P(A))$ . Also gilt  $\lambda_i \in \sigma(A)$  für ein  $i$ . Also ist  $\mu = P(\lambda)$  für ein  $\lambda \in \sigma(A)$ .

□

Nun können wir die Norm von  $P(A)$  berechnen:

**Lemma 3.3.6.**

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gilt

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| .$$

**Beweis.**

Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \|P(A)\|^2 &= \|P(A)^* P(A)\| && \text{[Korollar 3.1.29]} \\ &= \|(\overline{P}P)(A)\| && \text{[}\Phi \text{ Homomorphismus auf Polynomen]} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\overline{P}P(A))} |\lambda| && \text{[Satz 3.2.5]} \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\overline{P}P(\lambda)| && \text{[Lemma 3.3.5]} \\ &= \left( \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| \right)^2 \end{aligned}$$

□

Wir können nun Theorem 3.3.2 beweisen.

**Beweis.**

Nach dem Weierstraßschen Approximationsatz liegen die Polynome in den stetigen Funktionen dicht. Wegen der Identität der Normen in Lemma 3.3.6 hat die Abbildung  $P \mapsto P(A)$  auf Polynomen eine eindeutige Fortsetzung  $\Phi$  auf  $C(\sigma(A))$ . Die Eigenschaften 1,2,3 und 7 sind klar, ebenso die Eindeutigkeit.

Eigenschaft 4. folgt, weil für Polynome aus  $A\psi = \lambda\psi$  die Gleichung  $\Phi(P)\psi = P(\lambda)\psi$  gilt, durch Grenzübergang. Ist  $f \geq 0$ , so schreibe die Funktion  $f = g^2$  mit  $g$  reell,  $g \in C(\sigma(A))$ . Dann gilt  $\Phi(f) = \Phi(g)^2$  mit  $\Phi(g)$  selbstadjungiert, woraus  $\Phi(f) \geq 0$  folgt. 5. ist Übungsaufgabe. □

**Bemerkungen 3.3.7.**

1. Es ist  $\Phi(f) \geq 0$  genau dann, wenn  $f \geq 0$ .
2. Da Funktionen eine kommutative Algebra bilden,  $fg = gf$  für alle  $f, g \in C(\sigma(A))$ , ist  $\{f(A) \mid f \in C(\sigma(A))\}$  eine abelsche Unter algebra von  $L(H)$ . Da  $\Phi$  die Norm erhält, ist diese Algebra unter der Norm vollständig und somit eine sogenannte  $C^*$ -Algebra und als solche isomorph zur  $C^*$ -Algebra  $C(\sigma(A))$ .
3. Als Folge des Funktionalkalküls erhalten wir für positive Operatoren einen Beweis von Satz 3.2.19, der Existenz einer Quadratwurzel positiver Operatoren.

Wir kommen nun zu einer weiteren Formulierung des Spektralsatzes, der uns näher an die mathematische Struktur der Quantenmechanik bringt. Dazu brauchen wir einige Tatsachen aus der Maßtheorie.

**Beobachtung 3.3.8.**

1. Das Lebesgue-Integral basierte wesentlich auf dem translationsinvarianten Maß auf  $\mathbb{R}$  mit  $\mu([a, b]) = b - a$ . Wir arbeiten weiter mit der  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen von  $\mathbb{R}$ , also der kleinsten  $\sigma$ -Algebra, die alle offenen (und abgeschlossenen) Teilmengen von  $\mathbb{R}$  enthält.
2. Sei  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige monotone Funktion. Dann existieren für jedes  $x \in \mathbb{R}$  die einseitigen Grenzwerte

$$\alpha(x - 0) := \lim_{a \uparrow x} \alpha(a) \quad \text{und} \quad \alpha(x + 0) := \lim_{a \downarrow x} \alpha(a) .$$

Wir führen nun für offene Intervalle in  $\mathbb{R}$  ein neues Maß ein, indem wir Intervalle mit Hilfe von  $\alpha$  unterschiedlich gewichten:

$$\mu_\alpha(a, b) := \alpha(b - 0) - \alpha(a + 0) .$$

Dieses Maß kann man fortsetzen zu einem Maß auf Borelmengen von  $\mathbb{R}$ , das die die Regularitätseigenschaft

$$\mu_\alpha(B) = \sup_{C \subset B, C \text{ kompakt}} \mu_\alpha(C) = \inf_{U \supset B, U \text{ offen}} \mu_\alpha(U)$$

hat. Man nennt ein Maß mit dieser Regularitätseigenschaft ein Borelmaß.



3. Man führt dann messbare und integrierbare Funktionen ein wie für das Lebesguesche Maß. Man definiert für integrierbare Funktionen ein Integral

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} f d\alpha$$

das Lebesgue-Stieltjes Integral, das linear und monoton ist. Man erhält  $L^1$ -Räume, die bezüglich der Metrik  $d_{\alpha}(f, g) = \int_{\mathbb{R}} |f - g| d\mu_{\alpha}$  vollständig sind und in denen die stetigen Funktionen dicht liegen.

4. Wenn die Funktion  $\alpha$  stetig differenzierbar ist, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f \frac{d\alpha}{dx} dx$$

und wir können alles mit Hilfe des Lebesgue-Maßes beschreiben. Als anderes Beispiel betrachten wir für  $\alpha$  die Heavisidesche Stufenfunktion  $\alpha(x) = \theta(x) = \chi_{[0, \infty)}$ . Es gilt

$$\mu_{\theta}(B) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \in B \\ 0 & \text{wenn } 0 \notin B \end{cases}$$

und  $\int f d\theta = f(0)$ . Wir erhalten das sogenannte Diracmaß in 0. Man mache sich klar, dass für dieses Maß  $d_{\theta}(f, g) = |f(0) - g(0)|$  gilt, so dass im  $L^1$ -Raum alle Funktionen identifiziert werden, die gleichen Wert an der Stelle 0 haben. Daher ist der  $L^1$ -Raum bezüglich des Dirac-Maßes eindimensional.

### Definition 3.3.9

Sei  $\mu$  ein Borel-Maß auf  $\mathbb{R}$ .

1. Die Menge  $P := \{x \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$  heißt die Menge der reinen Punkte des Maßes  $\mu$ . Dann definiert

$$\mu_{pp}(X) := \sum_{x \in P \cap X} \mu(\{x\}) = \mu(P \cap X)$$

ein Maß.

2. Ein Maß heißt stetig, wenn es keine reinen Punkte hat. Ein Maß heißt reines Punktmaß, wenn  $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(x)$  für jede Borelmenge  $X$  gilt.
3. Ein Maß heißt absolut stetig relativ zum Lebesgue-Maß, wenn es eine Funktion  $f \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R})$  gibt, so dass für jede Borelfunktion  $g$

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \int_{\mathbb{R}} g f dx$$

gilt.

4. Ein Maß heißt singulär relativ zum Lebesgue-Maß, wenn  $\mu(S) = 0$  gilt, mit einer Teilmenge  $S \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\mathbb{R} \setminus S$  eine Lebesgue-Nullmenge ist.

### Bemerkungen 3.3.10.

1. Man zeigt dann, dass jedes Borel-Maß  $\mu$  eindeutig geschrieben werden kann als Summe  $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$ , wobei  $\mu_{pp}$  ein reines Punktmaß ist,  $\mu_{ac}$  absolut stetig relativ zum Lebesgue-Maß und  $\mu_{sing}$  stetig und singulär zum Lebesgue-Maß.

2. Wir werden sehen, dass auch der Hamilton-Operator (oder eine andere Observable eines quantenmechanischen Systems) zu einer ähnlichen Zerlegung von Zuständen führt: in gebundene Zustände, Streuzustände und einem Typ von Zuständen, der bei physikalischen Hamilton-Operatoren nicht auftreten darf.
3. Man zeigt dann für die Integrale  $\int d\mu_\alpha$  Verallgemeinerungen der uns bekannten Sätze: monotone Konvergenz, dominierte Konvergenz, Riesz-Fischer und Fubini.
4. Da wir hauptsächlich an der Integration stetiger Funktionen auf einem kompakten Hausdorff-Raum  $X$  interessiert sind, brauchen wir noch eine Unter algebra der  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen.

Eine  $G_\delta$ -Menge ist ein abzählbarer Durchschnitt offener Mengen. Sei  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Hausdorff-Raum. Dann ist zum Beispiel

$$f^{-1}([a, \infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right)$$

eine  $G_\delta$ -Menge.

### Definition 3.3.11

Die  $\sigma$ -Algebra, die von den  $G_\delta$ -Mengen eines kompakten Raumes erzeugt wird, heißt die  $\sigma$ -Algebra der Baire-Mengen. Die bezüglich dieser  $\sigma$ -Algebra messbaren Funktionen heißen Baire-Funktionen. Ein Maß auf den Baire-Mengen heißt Baire-Maß, wenn es endlich ist, also wenn  $\mu(X) < \infty$  gilt.

### Betrachtung 3.3.12.

Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $\mu$  ein Baire-Maß. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \ell_\mu : C^0(X) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \int_X f d\mu . \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear und wegen der Monotonie des Integrals

$$|\ell_\mu(f)| \leq \int_X |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(X)$$

stetig. Es folgt  $|\ell_\mu| \leq \mu(X)$ . Die konstante Funktion  $f = 1$  zeigt, dass sogar  $\|\ell_\mu\| = \mu(X)$  gilt.

Außerdem ist das Funktional  $\ell_\mu$  positiv: es ist  $\ell_\mu(f) \geq 0$  für alle  $f$  mit  $f(x) \geq 0$   $\mu$ -fast überall.

### Lemma 3.3.13.

Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $\ell : C^0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives lineares Funktional. Dann ist  $\ell$  bezüglich der Supremumsnorm auf  $C^0(X)$  stetig und es gilt  $\|\ell\| = \ell(1)$ .

### Beweis.

1. Wenn  $f$  reelle Werte annimmt, folgt aus  $-\|f\|_\infty \leq f \leq \|f\|_\infty$  wegen der Positivität  $-\ell(1)\|f\|_\infty \leq \ell(f) \leq \ell(1)\|f\|_\infty$  und somit  $|\ell(f)| \leq \|f\|_\infty \ell(1)$ .
2. Für eine beliebige Funktion  $f$  folgt aus der Polarzerlegung  $\ell(f) = e^{-i\phi} r$

$$|\ell(f)| = \operatorname{Re} e^{i\phi} \ell(f) = \ell(\operatorname{Re}[e^{i\phi} f]) \leq \|\operatorname{Re}[e^{i\phi} f]\|_\infty \ell(1) \leq \ell(1) \|f\|_\infty .$$

Die erste Ungleichung folgt aus Teil 1; die zweite Ungleichung folgt, da  $|\operatorname{Re}[e^{i\phi} f]| \leq |f|$  gilt.

□

**Theorem 3.3.14** (Riesz-Markov).

Sei  $X$  ein kompakter Hausdorff-Raum. Für jedes positive lineare Funktional  $\ell : C^0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  existiert ein eindeutiges Baire-Maß  $\mu$  auf  $X$  mit

$$\ell(f) = \int f d\mu .$$

**Beweis.**

Wir geben nur die Idee an: Baire-Maße sind regulär, es gilt  $\mu(Y) = \sup_{K \subset Y, K \text{ kompakt}} \mu(K)$ . Daher reicht es,  $\mu(K)$  für  $K$  kompakt zu finden. Der Ansatz ist dann

$$\mu(C) := \inf\{\ell(f) \mid f \in C(X), f \geq \chi_C\} ,$$

wobei  $\chi_C$  die charakteristische Funktion der Menge  $C$  ist, also  $\chi_C(x) = 1$  für  $x \in C$  und  $\chi_C(x) = 0$  für  $x \notin C$ . □

**Betrachtung 3.3.15.**

1. Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Sei  $\psi \in H$ . Dann ist

$$f \mapsto \langle \psi, f(A)\psi \rangle$$

ein *positives* lineares Funktional auf  $C^0(\sigma(A))$ . Nach dem Satz von Riesz-Markov 3.3.14 finden wir ein eindeutiges Maß  $\mu_\psi$  auf der kompakten Menge  $\sigma(A)$  mit

$$\langle \psi, f(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi .$$

Das Maß  $\mu_\psi$  heißt das Spektralmaß des Operators  $A$  zum Vektor  $\psi \in H$ .

2. Man beachte, dass nach Theorem 3.3.2.1 für die konstante Funktion  $f = 1$  gilt  $f(A) = \text{id}_H$  und somit

$$\mu(\sigma(A)) = \int_{\sigma(A)} d\mu_\psi = \|\psi\|^2 .$$

Die Spektralmaße sind also endliche Maße.

3. Wir können nun den Funktionalkalkül aus Theorem 3.3.2 von stetigen Funktionen auf die Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  der beschränkten Borelfunktionen auf  $\mathbb{R}$  ausdehnen. Wir definieren für eine Borelfunktion  $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  und einen beschränkten selbstadjungierten Operator  $A$  einen Operator  $g(A)$  durch seine Diagonalmatrixelemente

$$\langle \psi, g(A)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} g(\lambda) d\mu_\psi(\lambda) ,$$

und erhalten den Operator  $g(A)$  durch Polarisierung, vgl. Lemma 3.1.18, und den Riesz-schen Darstellungssatz 3.1.5.

Wir erhalten

**Theorem 3.3.16** (Spektralsatz - beschränkter Funktionalkalkül).

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es eine eindeutige Abbildung

$$\hat{\Phi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$$

von den beschränkten Borelfunktionen auf  $\mathbb{R}$  in die beschränkten Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\hat{\Phi}$  ist ein unitärer  $*$ -Algebra Morphismus.
2.  $\hat{\Phi}$  ist stetig:  $\|\hat{\Phi}(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_{\infty}$ .
3. Für die Funktion  $f(x) = x$  gilt  $\hat{\Phi}(f) = A$ .
4. Es gelte  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  fast überall und  $\|f_n\|_{\infty}$  sei beschränkt. Dann gilt  $\hat{\Phi}(f_n) \rightarrow \hat{\Phi}(f)$  bezüglich der Norm. (Hier geht der Satz über dominierte Konvergenz ein.)

$\Phi$  hat die weiteren Eigenschaften:

5. Aus  $A\psi = \lambda\psi$  folgt  $\hat{\Phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$ .
6. Aus  $f \geq 0$  folgt  $\hat{\Phi}(f) \geq 0$ .
7. Aus  $BA = AB$  folgt  $\hat{\Phi}(f)B = B\hat{\Phi}(f)$ .

Aus dem Struktursatz über Maße in Bemerkung 3.3.10.1, der Zerlegung  $\mu = \mu_{pp} + \mu_{ac} + \mu_{sing}$  mit einem reinen Punktmaß  $\mu_{pp}$ , einem Maß  $\mu_{ac}$ , das absolut stetig zum Lebesgue-Maß ist, und einem singulären Anteil, erhalten wir:

**Bemerkungen 3.3.17.**

1. Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann setzen wir

$$\begin{aligned} H_{pp} &:= \{\psi \in H \mid \mu_{\psi} \text{ ist reines Punktmaß}\} \\ H_{ac} &:= \{\psi \in H \mid \mu_{\psi} \text{ ist absolut stetig}\} \\ H_{sing} &:= \{\psi \in H \mid \mu_{\psi} \text{ ist singulär}\} \end{aligned}$$

2. Man zeigt, dass man  $H$  als Hilbertsche Summe, also als direkte Summe orthogonaler abgeschlossener Unterräume

$$H = H_{pp} \oplus H_{ac} \oplus H_{sing}$$

schreiben kann, wobei alle Unterräume unter  $A$  invariant sind.

3. Setzt man

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(A) &:= \{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert}\} \\ \sigma_{ac}(A) &:= \sigma(A|_{H_{ac}}) \\ \sigma_{sing}(A) &:= \sigma(A|_{H_{sing}}) \end{aligned}$$

so gilt

$$\sigma(A) = \overline{\sigma_{pp}(A)} \cup \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A) .$$

Diese Zerlegung ist aber i.a. nicht disjunkt. Man sollte sie auch nicht mit der Zerlegung in Bemerkung 3.3.27 verwechseln.

Für die nächste Formulierung des Spektralsatzes brauchen wir einen weiteren Begriff:

**Definition 3.3.18**

Sei  $A$  ein linearer Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Ein Vektor  $\psi \in H$  heißt zyklisch für  $A$ , wenn der von den Vektoren  $(A^n\psi)_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugte Unterraum dicht in  $H$  ist.

**Lemma 3.3.19.**

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$  mit zyklischem Vektor  $\psi \in H$ . Dann gibt es einen unitären Operator

$$U : H \rightarrow L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$$

so dass

$$UAU^{-1}f(\lambda) = \lambda f(\lambda)$$

gilt mit Gleichheit im Sinne von  $L^2$ -Räumen.

Ein beschränkter selbstadjungierter Operator, der einen zyklischen Vektor hat, ist also unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator.

**Beweis.**

Wir setzen für eine stetige Funktion  $U\Phi(f)\psi := f$ . Um zu zeigen, dass  $U$  wohldefiniert ist, bemerken wir, dass

$$\|\Phi(f)\psi\|^2 = \langle \psi, \Phi^*(f)\Phi(f)\psi \rangle = \langle \psi, \Phi(\bar{f}f)\psi \rangle = \int_{\sigma(A)} |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi$$

gilt, wobei in der letzten Gleichheit die Definition des Spektralmaßes  $\mu_\psi$  benutzt wurde. Daher folgt aus  $f = g$   $\mu_\psi$ -fast überall, dass  $\Phi(f)\psi = \Phi(g)\psi$  gilt. Also ist  $U$  auf dem dichten Unterraum  $\{\Phi(f)\psi \mid f \in C(\sigma(A))\}$  wohldefiniert und normerhaltend. Nach Lemma 3.3.4 kann man  $U$  eindeutig zu einer Isometrie auf  $H$  in  $L^2(\sigma(A), \mu_\psi)$  fortsetzen. Weil die stetigen Funktionen im Zielraum dicht liegen, ist die Isometrie surjektiv.

Schließlich rechnen wir für  $f \in C(\sigma(A))$

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} [UA\Phi(f)](\lambda) = [U\Phi(xf)](\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f(\lambda)$$

wobei wir bei der zweiten Gleichheit  $A = \Phi(x)$  und die Homomorphismeigenschaft von  $\Phi$  ausgenutzt haben. Diese Gleichheit setzt sich auf den Abschluss  $L^2(\sigma(A))$  von  $C^0(\sigma(A))$  fort.  $\square$

Nun hat nicht jeder selbstadjungierte Operator einen zyklischen Vektor; es gilt jedoch:

**Lemma 3.3.20.**

Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es eine (nicht eindeutige) Zerlegung in eine höchstens abzählbare direkte Hilbertsche Summe  $H = \bigoplus_{n=1}^N H_n$  mit  $N \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ , so dass gilt

- $A$  lässt jeden der Unterräume  $H_n$  invariant, d.h. aus  $\psi \in H_n$  folgt  $A\psi \in H_n$ .
- Für jedes  $n$  gibt es einen Vektor  $\psi_n \in H_n$ , der für die Restriktion  $A|_{H_n}$  zyklisch ist.

Es folgt damit eine weitere Form des Spektraltheorems:

**Theorem 3.3.21** (Spektralsatz - Multiplikationsoperatoren).

Sei  $A$  ein beschränkter, selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann existieren endliche Maße  $(\mu_n)_{n=1,\dots,N}$  auf dem Spektrum  $\sigma(A)$  und ein unitärer Operator

$$U : H \rightarrow \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, \mu_n)$$

so dass  $(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda)$  für  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \in \bigoplus_{n=1}^N L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$  gilt. Man nennt dies eine spektrale Realisierung von  $A$ .

Wir reformulieren das Resultat:

**Korollar 3.3.22.**

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es einen *endlichen* Maßraum  $(M, \mu)$  und eine beschränkte Funktion  $f$  auf  $M$  und eine unitäre Abbildung

$$U : H \rightarrow L^2(M, \mu) ,$$

so dass gilt

$$(UAU^{-1}\varphi)(m) = f(m)\varphi(m) .$$

Jeder Operator ist also äquivalent zu einem Multiplikationsoperator auf einem endlichen Maßraum.

**Beweis.**

Wir wählen die Normierung der zyklischen Vektoren  $(\psi_n)$  so, dass  $\|\psi_n\|^2 = 2^{-n}$  gilt. Als Maßraum  $M$  wählen wir die disjunkte Vereinigung von  $N$  Kopien von  $\mathbb{R}$ ; wir definieren das Maß  $\mu$  durch seine Restriktion auf die  $i$ -te Kopie, die  $\mu_{\psi_i}$  sei. Dann ist

$$\mu(M) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\mathbb{R}) = \sum_{i=1}^N 2^{-i} < \infty .$$

Das Spektralmaß ist also endlich. Die Einschränkung der Funktion  $f$  auf die  $i$ -te Komponente ist die Funktion  $f_i(\lambda) = \lambda$ . □

**Bemerkungen 3.3.23.**

1. Man beachte, dass in das Spektralmaß in Korollar 3.3.22 Wahlen eingehen; weder das Maß noch die Funktion  $f$  sind kanonisch bestimmt.
2. Theorem 3.3.21 ist eine rigorose Version der Aussage, dass wir nach Wahl einer "Darstellung" schreiben können

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle &= \sum_{n=1}^N \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)} \phi(\lambda; n) \\ \langle \psi, A\phi \rangle &= \sum_{n=1}^N \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)} \lambda \phi(\lambda; n) \end{aligned}$$

Die Darstellung ist durch den Operator  $A$  gegeben. Gerne wählt man hierfür den Orts- oder den Impulsoperator. Diese sind allerdings nicht beschränkt, so dass wir noch nicht ausreichende Hilfsmittel haben, um diese Darstellungen zu verstehen.

3. Wir betrachten den Operator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ , der auf einem dichten Teilraum von  $L^2(\mathbb{R})$ , etwa dem Sobolev-Raum  $W^{1,2}(\mathbb{R})$  aus Bemerkung 3.1.16, definiert ist. Dieser Operator ist nicht beschränkt und daher nicht stetig.

Dann liefert die Fouriertransformation

$$(Uf)(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$$

einen Operator, so dass gilt

$$U \left( \frac{1}{i} \frac{d}{dx} f \right) (k) = kUf(k) .$$

Dies legt es nahe, die Fouriertransformation als eine Spektraldarstellung eines nicht-beschränkten Operators zu verstehen. Hierzu kommen wir in Kapitel 3.4 der Vorlesung.

Dadurch, dass wir den Funktionalkalkül nun auch für Borelfunktionen haben, können wir auch Operatoren aus charakteristischen Funktionen von Borelmengen erhalten.

**Definition 3.3.24**

Sei  $A$  ein beschränkter selbstadjungierter Operator und  $\Omega$  eine Borelmenge von  $\mathbb{R}$ . Dann heißt  $P_{\Omega} := \chi_{\Omega}(A) = \Phi(\chi_{\Omega})$  auch die Spektralprojektion von  $A$  zur Borelmenge  $\Omega$ .

Da  $\Phi$  ein Morphismus von  $*$ -Algebren ist, folgt aus  $\chi_{\Omega}^2 = \chi_{\Omega}$  und  $\overline{\chi_{\Omega}} = \chi_{\Omega}$  mit Betrachtung 3.1.30, dass  $P_{\Omega}$  für jede Borelmenge  $\Omega$  ein orthogonaler Projektor ist. Es gilt:

**Theorem 3.3.25** (Spektralsatz - projektorwertige Maße).

Die Familie  $(P_{\Omega})_{\Omega}$  der Spektralprojektionen eines beschränkten selbstadjungierten Operators hat die folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Operator  $P_{\Omega}$  ist eine orthogonale Projektion.
2.  $P_{\emptyset} = 0$  und  $P_{(-a,a)} = \text{id}_H$  für  $a$  groß genug.
3. Gilt  $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  mit  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$  für alle  $n \neq m$ , so gilt  $P_{\Omega} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N P_{\Omega_n}$  in der Normtopologie.
4. Es gilt  $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ .

Eine Familie von Projektoren, die 1. -3. erfüllt, heißt ein beschränktes projektorwertiges Maß.

**Bemerkungen 3.3.26.**

1. Für ein beschränktes projektorwertiges Maß folgt Eigenschaft 4. aus allgemeinen Gründen aus den Axiomen 1. -3.
2. Man kann über projektorwertige Maße integrieren und erhält Werte im Banachraum  $L(H)$ .
3. Für jedes  $\psi \in H$  ist  $\omega \mapsto \langle \psi, P_{\omega} \psi \rangle$  ein gewöhnliches Maß, das wir mit  $d\langle \psi, P_{\lambda} \psi \rangle$  bezeichnen. Dann gibt es für jede beschränkte Borel-Funktion  $f$  auf  $\text{supp} P_{\Omega}$  einen eindeutigen Operator  $B := \int f(\lambda) dP_{\lambda}$ , so dass gilt

$$\langle \psi, B\psi \rangle = \int f(\lambda) d\langle \psi, P_{\lambda} \psi \rangle .$$

Es ist dann offensichtlich  $f(A) = \int f(\lambda) dP_{\lambda} \in L(H)$ .

4. Es gibt eine Bijektion zwischen beschränkten selbstadjungierten Operatoren  $A$  und beschränkten projektorwertigen Maßen  $(P_\Omega)$ :

$$A \mapsto (\chi_\Omega(A)) \quad \text{und} \quad (P_\Omega) \mapsto A = \int \lambda dP_\lambda .$$

5. Die Spektralprojektionen geben eine klare Interpretation des quantenmechanischen Formalismus. Man nennt einen eindimensionalen Unterraum von  $H$  einen (reinen) Zustand. Oft beschreibt man Zustände durch normierte Vektoren  $x \in H$  mit  $\|x\| = 1$ ; dann muss man  $x$  und  $e^{i\alpha}x$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  identifizieren.

Eine Observable eines quantenmechanischen Systems wird dann beschrieben durch einen Operator  $A$  auf  $H$ , wobei wir im nächsten Unterkapitel wie in Definition 3.2.2 Operatoren mit dichtem Definitionsbereich  $D(A) \subset H$  zulassen werden.

Die möglichen Messwerte von  $A$  sind dann durch das Spektrum  $\sigma(A)$  gegeben. Die Forderung nach reellen Messwerten führt zur Forderung, dass  $A$  selbstadjungiert ist. Das Spektralmaß  $(P_\Omega)$  zu  $A$  liefert dann für jeden Zustand  $\psi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $d\langle\psi, P_\lambda\psi\rangle$  auf dem Raum  $\sigma(A)$  der möglichen Meßwerte, entsprechend der probabilistischen Natur der Quantenmechanik. Konkret ist  $\mu_{\langle\psi, P_\Omega\psi\rangle}(U)$  für eine Borelmenge  $U \subset \sigma(A)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert der Observablen  $A$  im Zustand  $\psi$  in die Menge  $U$  fällt.

Wir erwähnen noch eine andere Zerlegung des Spektrums, die nicht mit der aus Bemerkung 3.3.17 verwechselt werden darf.

**Bemerkung 3.3.27.**

1. Man zeigt zunächst, dass genau dann  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt, wenn für die Projektoren gilt  $P_{(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)} \neq 0$  für alle  $\epsilon > 0$ .
2. Man sagt dann  $\lambda$  liege im wesentlichen Spektrum, wenn  $P_{(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)}(A)$  unendlich-dimensionales Bild hat für alle  $\epsilon > 0$ . Falls  $\lambda \in \sigma(A)$  gilt, aber für ein  $\epsilon > 0$  das Bild von  $P_{(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon)}$  endlich-dimensional ist, sagen wir,  $\lambda$  liege im diskreten Spektrum.
3. Das wesentliche Spektrum ist abgeschlossen. Das diskrete Spektrum sind genau die isolierten Punkte von  $\sigma(A)$ , die Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind.

### 3.4 Unbeschränkte Operatoren

**Bemerkung 3.4.1.**

1. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  offen und nicht-leer. Den Operator  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  können wir nicht einfach auf alle Funktionen  $\varphi \in L^2(\Omega)$  anwenden, denn es hat nicht jede  $L^2$ -Funktion eine schwache Ableitung, die in  $L^2$  liegt, vgl. auch Bemerkung 3.1.16. Aber immerhin liegt der Sobolevraum  $W^{1,2}(\Omega)$  dicht in  $L^2(\Omega)$  bezüglich der  $L^2$ -Norm.
2. Sei  $\Omega := (-\pi, \pi)$ . Der Operator  $A := \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  ist auf dem dichten Unterraum  $L^2(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$  definiert, aber nicht stetig: betrachte für  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion

$$\varphi_n(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)$$



in  $C^1(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ . Die Funktionen sind alle normiert:

$$\|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2nt)) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1 .$$

Andererseits gilt

$$\|A\varphi_n\|^2 = \frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt = \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2nt) + 1) dt = n^2 ;$$

also ist  $A$  unbeschränkt.

3. Andererseits gilt für den Operator gleicher Form für  $\varphi, \psi \in C_c^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ :

$$\left\langle \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \varphi, \psi \right\rangle = -\frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi'(t)} \cdot \psi(t) dt = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(t)} \psi'(t) dt = \left\langle \varphi, \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \psi \right\rangle ,$$

weil die Randterme verschwinden. Da  $C_c^1(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt, gilt die Gleichung auf dem ganzen Definitionsgebiet. Dies erinnert an die Eigenschaft eines *beschränkten* Operators, selbstadjungiert zu sein.

4. Die Probleme sind nicht spezifisch für den Differentiationsoperator. Man kann den Multiplikationsoperator  $f \mapsto x \cdot f$  zum Beispiel auf dem dichten Unterraum  $C_c^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger definieren. Es ist klar, dass der Multiplikationsoperator nicht beschränkt ist: sei  $\varphi$  eine Funktion mit Träger in  $[-1, 1]$  mit  $\|\varphi\|_2 = 1$ , dann haben für  $\varphi_n(x) := \varphi(x - n)$  die Funktionen  $x\varphi_n(x)$  beliebig große  $L^2$ -Norm.

### Definition 3.4.2

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $D(f)$  ein dichter Unterraum von  $H$ , d.h.  $\overline{D(f)} = H$ . Eine lineare Abbildung  $f : D(f) \rightarrow H$  heißt ein dicht definierter Operator auf  $H$ . Wir setzen

$$D^* := \{y \in H \mid \exists y^* \in H \text{ mit } \langle f(x), y \rangle = \langle x, y^* \rangle \text{ für alle } x \in D(f)\} .$$

Zu jedem  $y \in D^*$  ist  $y^* \in H$  mit

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad \text{für alle } x \in D(f)$$

eindeutig bestimmt. Wir betrachten den Operator  $f^* : D^* \rightarrow H$  mit  $f^*(y) := y^*$  und  $D(f^*) := D^*$ . Dann ist  $f^*$  linear und heißt der zu  $f$  adjungierte Operator.

### Definition 3.4.3

Sei  $H$  ein Hilbertraum und seien

$$f : D(f) \rightarrow H, \quad g : D(g) \rightarrow H$$

lineare Abbildungen, deren Definitionsbereiche  $D(f)$  und  $D(g)$  Untervektorräume von  $H$  sind. Gilt dann  $D(f) \subset D(g)$  und  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in D(f)$ , so heißt  $g$  eine Fortsetzung oder Erweiterung von  $f$ . Wir schreiben  $g \supset f$ .

**Lemma 3.4.4.**

Ein auf  $H$  dicht definierter linearer Operator  $f : D(f) \rightarrow H$  erfülle die Bedingung

$$(Sy) \quad \langle f(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle \quad \text{für alle } x, y \in D(f) .$$

Dann ist der adjungierte Operator  $f^*$  eine Fortsetzung von  $f$ , also  $f^* \supset f$ . Im Allgemeinen handelt es sich um eine echte Fortsetzung.

**Beweis.**

Für alle  $y, x \in D(f)$  folgt aus (Sy) und Definition 3.4.2

$$\langle y, f(x) \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \text{mit} \quad y^* = f(y) .$$

□

**Definition 3.4.5**

Sei  $H$  ein Hilbertraum,  $D(f) \subset H$  ein dichter Unterraum und  $f : D(f) \rightarrow H$  linear.

1. Dann heißt  $f$  symmetrisch, wenn gilt

$$(Sy) \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in D(f), \text{ also wenn } f^* \supset f \text{ gilt.}$$

2. Ein symmetrischer Operator  $f$  heißt selbstadjungiert, wenn gilt

$$(Se) \quad D(f) = D(f^*). \text{ Dann gilt } f^* = f.$$

**Bemerkung 3.4.6.**

1. Wir haben in Bemerkung 3.4.1.3 gesehen, dass der Operator  $i \frac{d}{dx}$  mit dem Definitionsbereich  $L^2(\mathbb{R}) \cap C_c^1(\mathbb{R})$  oder auch  $W^{2,2}(\mathbb{R})$  symmetrisch ist.
2. Dass ein Operator wie  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  nur dicht definiert ist, ist typisch: Der Satz von Hellinger-Toeplitz besagt: sei  $H$  ein Hilbertraum und sei  $f : H \rightarrow H$  eine symmetrische lineare Abbildung, von der wir nicht voraussetzen, dass sie stetig ist, aber dass sie überall definiert ist. Dann ist  $f$  notwendigerweise stetig.

**Definition 3.4.7**

Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume. Dann ist der Vektorraum  $X \times Y$  mit der Norm  $\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$  wieder ein Banachraum. Sei  $f : D \rightarrow Y$  mit  $D \subset X$  eine nicht notwendigerweise stetige lineare Abbildung.

1. Der Graph der Abbildung  $f$  ist die Teilmenge

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subseteq X \times Y .$$

Für eine lineare Abbildung ist  $\text{Graph}(f)$  ein Untervektorraum.

2. Eine lineare Abbildung heißt *f* abgeschlossen, falls  $\text{Graph}(f)$  ein abgeschlossener Unterraum des Produktraums  $X \times Y$  ist.

Explizit bedeutet dies:

(Ab) Für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$ , die gegen ein  $x \in X$  konvergiert und für die die Folge der Bildwerte  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $y \in Y$  konvergiert, gilt  $x \in D$  und  $f(x) = y$ .

3. Man nennt einen dicht definierten Operator abschließbar, wenn es eine abgeschlossene Fortsetzung gibt.

**Satz 3.4.8.**

Sei  $f : D(f) \rightarrow H$  ein auf  $D(f) \subset H$  dicht definierter Operator. Dann ist der zu  $f$  adjungierte Operator  $f^* : D^* \rightarrow H$  abgeschlossen.

Inbesondere sind selbstadjungierte Operatoren abgeschlossen.

**Beweis.**

Sei  $(x_n)$  eine in  $D(f^*)$  konvergente Folge,  $x_n \rightarrow x$ , die die Eigenschaft hat, dass auch ihre Bildwerte  $f^*(x_n) \rightarrow y$  konvergieren. Für jedes  $z \in D(f)$  gilt

$$\langle x, f(z) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, f(z) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f^*(x_n), z \rangle = \langle y, z \rangle \quad .$$

Also ist  $x \in D^*$ , und es gilt  $f^*(x) = y$ . □

**Satz 3.4.9.**

Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $f : D(f) \rightarrow H$  ein dicht definierter *abschließbarer* linearer Operator. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte abgeschlossene Fortsetzung  $\bar{f} : D(\bar{f}) \rightarrow H$  von  $f$ , so dass für jede abgeschlossene Fortsetzung  $g$  von  $f$  gilt  $g \supset \bar{f} \supset f$ . Der Operator  $\bar{f}$  heißt der Abschluss von  $f$ .

**Beweis.**

- Da  $f$  abschließbar ist, wähle eine beliebige abgeschlossene Fortsetzung  $g$  von  $f$ . Es gilt  $D(f) \subset D(g)$ . Setze für  $x, y \in D(g)$

$$[x, y]_g := \langle x, y \rangle + \langle g(x), g(y) \rangle ;$$

man rechnet dann direkt nach, dass dies ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum  $D(g)$  ist, das wie üblich durch

$$\|x\|_g := \sqrt{[x, x]_g}$$

eine Norm auf  $D(g)$  definiert.

- Der Vektorraum  $D(g)$  ist mit dem Skalarprodukt  $[ \ , \ ]_g$  ein Hilbertraum. Denn sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $D(g)$ ; dann gibt es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$ , so dass

$$\|x_n - x_m\|_g < \epsilon \quad \text{für alle } n, m > n_0 ,$$

was impliziert

$$\|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \text{und} \quad \|g(x_n) - g(x_m)\| < \epsilon$$

für alle  $n, m > n_0$ . Da  $H$  als Hilbertraum vollständig ist, existieren die Grenzwerte der Cauchy-Folgen  $(x_n)$  und  $g(x_n)$  in  $H$ :

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \quad y := \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) .$$

Da der Operator  $g$  abgeschlossen ist, gilt

$$x \in D(g) \quad \text{und} \quad g(x) = y .$$

Damit folgt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_g^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n - x\|^2 + \|g(x_n) - g(x)\|^2) = 0 \quad ,$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  auch bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_g$ . Somit ist  $D(g)$  ein Hilbertraum. Trivialerweise liefert  $g$  eine stetige Abbildung  $D(g) \rightarrow H$ .

- Wegen  $g \supset f$  gilt  $D(f) \subset D(g)$  und  $D(f)$  ist ein Untervektorraum des Hilbertraums  $D(g)$ . Wir setzen nun  $D(\bar{f}) := \overline{D(f)}$ , dem Abschluss von  $D(f)$  im Hilbertraum  $D(g)$ ; wir definieren ferner  $\bar{f}$  als Einschränkung von  $g$ ,

$$\bar{f} : D(\bar{f}) \rightarrow H \quad \text{mit} \quad \bar{f}(x) := g(x) .$$

Dann ist  $\bar{f}$  jedenfalls linear und stetig bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_g$ , und es gilt  $g \supset \bar{f} \supset f$ .

- Wir wollen zeigen, dass der Operator  $\bar{f}$  abgeschlossen ist. Dazu bemerken wir, dass als abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums  $D(g)$  der Definitionsbereich  $D(\bar{f})$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_g = \|\cdot\|_{\bar{f}}$  ein Hilbertraum ist. Sei nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $D(\bar{f})$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n) = y ;$$

diese Grenzwerte sind im Hilbertraum  $H$  zu verstehen. Wegen

$$\|x_n - x_m\|_{\bar{f}}^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x_m)\|^2,$$

ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge im Hilbertraum  $(D(\bar{f}), \|\cdot\|_{\bar{f}})$  und damit in  $(D(g), \|\cdot\|_g)$ . Da  $D(g)$  ein Hilbertraum ist, konvergiert sie gegen ein  $x \in D(g)$ . Da  $D(\bar{f})$  abgeschlossen ist, ist  $x \in D(\bar{f})$ , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{f}(x_n) - \bar{f}(x)\| = 0 .$$

Also ist der Operator  $\bar{f}$  abgeschlossen.

- Sei nun der Operator  $h$  eine beliebige abgeschlossene Fortsetzung von  $f$ . Da  $D(f)$  dicht in  $D(\bar{f})$  liegt, gibt es zu jedem  $x \in D(\bar{f})$  eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in D(f)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|_{\bar{f}} = 0$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n) - \bar{f}(x)\| = 0 .$$

Da auch  $h$  eine Fortsetzung von  $f$  ist, folgt aus  $x_n \in D(f) \subset D(h)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \bar{f}(x) ;$$

da  $h$  abgeschlossen ist, gilt  $h(x) = \bar{f}(x)$  und somit  $h \supset \bar{f}$ .

□

**Definition 3.4.10**

Ein symmetrischer Operator  $T : D(T) \rightarrow H$  heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn sein Abschluss selbstadjungiert ist.

In der Quantenmechanik schreibt man oft in einem ersten Schritt symmetrische Operatoren hin; man muss dann selbstadjungierte Erweiterungen finden. Zu einem symmetrischen Operator kann es eine, mehrere oder auch keine Erweiterungen geben. Man kann zeigen, dass die selbstadjungierten Erweiterungen in Bijektion zu unitären Abbildungen

$$\ker(A^* - i \operatorname{id}_H) \rightarrow \ker(A^* + i \operatorname{id}_H)$$

sind. Diese Räume werden in der Folge auch eine Rolle spielen.

**Lemma 3.4.11.**

Sei  $f : D(f) \rightarrow H$  ein selbstadjungierter Operator in  $H$ .

1. Dann gilt für alle  $x \in D(f)$

$$\|(f \pm i \operatorname{id}_H)(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 ,$$

und damit insbesondere  $\|(f \pm i \operatorname{id}_H)(x)\| \geq \|x\|$ .

2. Es existieren die Umkehrfunktionen  $(f \pm i \operatorname{id}_H)^{-1}$ . Sie sind auf ganz  $H$  definierte und stetige Operatoren.

**Beweis.**

1. Wir rechnen für  $x \in D(f)$

$$\|(f \pm i \operatorname{id}_H)(x)\|^2 = \|f(x)\|^2 + \|ix\|^2 \pm \langle f(x), ix \rangle \pm \langle ix, f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 + \|x\|^2 ,$$

denn, da  $f$  symmetrisch ist, gilt wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts

$$\langle f(x), ix \rangle = i \langle f(x), x \rangle \stackrel{(\text{Sy})}{=} i \langle x, f(x) \rangle = -\langle ix, f(x) \rangle .$$

2. Es folgt sofort, dass  $\operatorname{Ker}(f \pm i \operatorname{id}_H) = \{0\}$ .
3. Aus den Ungleichungen folgt sofort, dass die Operatoren  $(f \mp i \operatorname{id}_H)^{-1}$  stetige Operatoren auf den Untervektorräumen  $D_{\pm} := (f \mp i \operatorname{id}_H)(D(f))$  von  $H$  sind.

Wir zeigen nun, dass die Unterräume  $D_{\pm}$  abgeschlossen und gleich  $H$  sind. Wir beschränken uns hierbei auf den Fall des Operators  $r := (f - i \operatorname{id}_H)^{-1}$  und setzen  $D := D_+ \subset H$ .

Um zu sehen, dass  $D$  abgeschlossen ist, sei  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $D$ , die gegen ein  $z \in H$  konvergiert. Sei

$$y_n := (f - i \operatorname{id}_H)^{-1}(z_n) \in D(f),$$

dann ist wegen der Ungleichungen

$$\|y_n - y_m\| = \|(f - i \operatorname{id}_H)^{-1}(z_n - z_m)\| \leq \|z_n - z_m\|$$

die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $H$ ; es existiert also für jede solche Folge  $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in H$ . Als selbstadjungierter Operator ist  $f$  nach Satz 3.4.8 abgeschlossen; somit ist auch  $f - i \operatorname{id}_H$  abgeschlossen. Daher folgt aus

$$(f - i \operatorname{id}_H)(y_n) = z_n \rightarrow z \quad \text{und} \quad y_n \rightarrow y$$

dass  $y \in D(f - i \operatorname{id}_H) = D(f)$  und  $z = (f - i \operatorname{id}_H)(y) \in D$  gilt. Wegen  $z \in D$  ist  $D \subset H$  abgeschlossen.

4. Angenommen, es wäre  $D \neq H$ ; da  $D$  abgeschlossen ist, hätten wir dann eine orthogonale Zerlegung

$$H = D \oplus D^\perp$$

und es gäbe ein  $y \in D^\perp$  mit  $y \neq 0$ . Für dieses  $y \in H$  gilt dann

$$\langle (f - i \operatorname{id}_H)(x), y \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle \quad \text{für alle} \quad x \in D(f - i \operatorname{id}_H) = D(f).$$

Also gilt

$$0 = (f - i \operatorname{id}_H)^*(y) = (f + i \operatorname{id}_H)(y),$$

im Widerspruch zur Injektivität des Operators  $f + i \operatorname{id}_H$ .

□

Wir fassen zusammen und ergänzen:

### Korollar 3.4.12.

Sei  $T$  ein dicht definierter symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum  $H$ .

1. Dann sind äquivalent:

- (a) Der Operator ist selbstadjungiert.
- (b)  $T$  ist abgeschlossen und  $\ker(T^* \pm i \operatorname{id}_H) = \{0\}$ .
- (c)  $\operatorname{Im}(T \pm i \operatorname{id}_H) = H$

2. Ebenfalls sind äquivalent.

- (a) Der Operator ist wesentlich selbstadjungiert.
- (b)  $\ker(T^* \pm i \operatorname{id}_H) = \{0\}$ .
- (c)  $\operatorname{Im}(T \pm i \operatorname{id}_H)$  ist dicht in  $H$ .

### Beweis.

Wir zeigen nur die Aussagen über selbstadjungierte Operatoren.

(a)  $\Rightarrow$  (b) folgt aus Satz 3.4.8 und der Ungleichung in Lemma 3.4.11.

(b)  $\Rightarrow$  (c) folgt aus Teil 4. des Beweises von Lemma 3.4.11.

(c)  $\Rightarrow$  (a) Sei  $v \in D(T^*)$ . Wegen der Voraussetzung  $\operatorname{Im}(T - i \operatorname{id}_H) = H$  finde  $\eta \in D(T)$  mit  $(T - i \operatorname{id}_H)\eta = (T^* - i \operatorname{id}_H)v$ . Da  $T$  symmetrisch ist, gilt  $D(T) \subset D(T^*)$  und somit  $v - \eta \in D(T^*)$ . Somit ist  $(T^* - i \operatorname{id}_H)(v - \eta) = 0$ .

Allgemein gilt nun  $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp$ , denn  $x \in \ker T^*$  gilt genau dann, wenn  $0 = \langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  für alle  $y \in D(T)$  gilt.

Aus der anderen Voraussetzung  $\operatorname{Im}(T + i \operatorname{id}_H) = H$  folgt daher  $\ker(T^* - i \operatorname{id}_H) = \{0\}$ , und somit  $v = \eta \in D(T)$ . Also ist  $D(T) = D(T^*)$ , und  $T$  ist selbstadjungiert.

□

Für die spätere Verwendung halten wir fest, dass der Beweis sich leicht so verallgemeinern lässt, dass folgt

**Korollar 3.4.13.**

Sei  $T$  ein dicht definierter symmetrischer Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann ist  $T$  genau dann selbstadjungiert, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gibt, so dass  $\text{Im}(T - \lambda \text{id}_H) = H$  und  $\text{Im}(T - \bar{\lambda} \text{id}_H) = H$  gilt.

**Beispiel 3.4.14** (Differentiationsoperator auf dem Intervall).

- Eine Funktion auf einem kompakten Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  heißt absolut stetig, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für jede endliche Familie disjunkter Intervalle  $[x_i - x'_i]$  von Gesamtlänge

$$\sum_{i=1}^N |x'_i - x_i| < \delta$$

gilt

$$\sum_{i=1}^N |f(x'_i) - f(x_i)| < \epsilon .$$

Es gilt: ist  $f$  absolut stetig, so ist  $f$  Lebesgue-fast überall differenzierbar, mit Ableitung  $f' \in L^1([a, b])$  und  $f$  ist Stammfunktion von  $f'$ . Umgekehrt sind Stammfunktionen von  $L^1$ -Funktionen absolut stetig.

- Der Operator  $T = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  mit

$$D(T) = \{\varphi \mid \varphi \text{ absolut stetig und } \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$$

ist symmetrisch, wie man durch partielle Integration zeigt. Man zeigt, dass sein adjungierter Operator gleich  $T^* = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  auf dem Raum der absolut stetigen Funktionen auf  $[0, 1]$  ohne weitere Randbedingungen ist. Da  $e^{\pm x} \in D(T^*)$  und

$$\frac{1}{i} \frac{d}{dx} e^{\pm x} = \mp i e^{\pm x}$$

gilt, ist  $T$  nicht wegen Korollar 3.4.12 nicht wesentlich selbstadjungiert. (Tatsächlich ist  $T$  aber abgeschlossen.)

- Es gibt aber für jedes  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$  eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T$ : dies ist der Operator  $T_\alpha = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  mit Definitionsbereich

$$D(T_\alpha) = \{\varphi \mid \varphi \text{ absolut stetig und } \varphi(0) = \alpha \varphi(1)\} .$$

Es gilt  $T \subset T_\alpha \subset T^*$  für alle  $\alpha$ .

- Schreibe  $\alpha = e^{-i\lambda_0}$  mit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ . Die Eigenfunktionen von  $T_\alpha$  sind  $\psi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$  mit  $\lambda \in \lambda_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ . Somit hängt das Spektrum von  $\alpha$  und damit der mögliche Wertebereich des Impulsoperators von  $\alpha$  ab. Die Wahl der selbstadjungierten Erweiterung hat also beobachtbare Konsequenzen und ist Teil der Spezifizierung eines physikalischen Modells.

Wir wollen Multiplikationsoperatoren als weitere Beispiele unbeschränkter Operatoren diskutieren:

**Satz 3.4.15** (Multiplikationsoperatoren).

Sei  $(M, \mu)$  ein Maßraum mit endlichem Maß  $\mu$ . Sei  $f$  eine meßbare, reellwertige Funktion auf  $M$ , die  $\mu$ -fast überall endlich ist. Der Multiplikationsoperator  $T_f : \varphi \mapsto f\varphi$  auf  $L^2(M, \mu)$  mit Definitionsbereich

$$D(T_f) = \{\varphi \mid f\varphi \in L^2(M, \mu)\}$$

ist selbstadjungiert. Sein Spektrum ist das wesentliche Bild von  $f$ , also die Menge der  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\mu(f^{-1}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) > 0$  für alle  $\epsilon > 0$ .

**Beweis.**

Da  $f$  reellwertig ist, ist klar, dass der Multiplikationsoperator  $T_f$  symmetrisch ist. Sei  $\psi \in D(T_f^*)$ . Für  $N \in \mathbb{R}_+$  setze

$$\chi_N(m) := \begin{cases} 1 & \text{falls } |f(m)| \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \|T_f^* \psi\| &= \lim_{N \rightarrow \infty} \|\chi_N T_f^* \psi\| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|v\|=1} |\langle v, \chi_N T_f^* \psi \rangle| \right) && \text{[Lemma 3.1.28]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|v\|=1} |\langle T_f \chi_N v, \psi \rangle| \right) && \text{[Def. adjungierter Operator]} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sup_{\|v\|=1} |\langle v, \chi_N f \psi \rangle| \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \|\chi_N T_f \psi\| && \text{[Lemma 3.1.28]}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass Lemma 3.1.28 für beschränkte selbstadjungierte Operatoren gilt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist als punktwiser Grenzwert  $f\psi \in L^2(M, \mu)$  und somit  $\psi \in D(T_f)$ . Somit ist  $T_f$  selbstadjungiert. Die Aussage über das Spektrum überlassen wir dem Leser.  $\square$

Den Begriff des Spektrums und der Resolventenmenge hatten wir in Definition 3.2.2 schon für dicht definierte Operatoren eingeführt. Auch die Resolventenformel aus Satz 3.2.3 gilt. Im Falle abschließbarer Operatoren verstehen wir immer unter dem Spektrum das Spektrum des Abschlusses.

**Satz 3.4.16.**

Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators  $T : D(T) \rightarrow H$  ist reell,  $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ .

Für dicht definierte selbstadjungierte Operatoren ist das Spektrum im Allgemeinen *keine* beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Dies ist für die möglichen Messwerte wichtiger Operatoren der Quantenmechanik wie Energie, Ort und Impuls in den meisten Systemen angemessen.

**Beweis.**

Sei  $\mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  nicht-reell, also  $\beta \neq 0$ . Nach Lemma 3.4.11 ist der Operator

$$(T - \mu \text{id}_H)^{-1} = (T - \alpha \text{id}_H - i\beta \text{id}_H)^{-1} = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{\beta} (T - \alpha \text{id}_H) - i \text{id}_H \right)^{-1}$$

auf ganz  $H$  definiert und stetig. Also gilt  $\mu \in \rho(T)$ .  $\square$

Das folgende Lemma ist zentral für den Spektralkalkül unbeschränkter Operatoren:



**Lemma 3.4.17.**

Sei  $f : D(f) \rightarrow H$  ein selbstadjungierter Operator auf  $H$ . Dann ist die Cayley-Transformierte von  $f$

$$v := (f - i \operatorname{id}_H) \circ (f + i \operatorname{id}_H)^{-1}$$

ein auf ganz  $H$  definierter unitärer Operator.

**Beweis.**

Nach Lemma 3.4.11 ist

$$v : H \xrightarrow{(f+i \operatorname{id}_H)^{-1}} D(f) = D(f - i \operatorname{id}_H) \xrightarrow{f-i \operatorname{id}_H} H ,$$

also ist  $v$  eine auf ganz  $H$  definierte lineare Abbildung. Aus Lemma 3.4.11.1 folgt für alle  $x \in D(f)$  die Gleichheit

$$\|(f - i \operatorname{id}_H)(x)\| = \|(f + i \operatorname{id}_H)(x)\| .$$

Setzen wir  $x := (f + i \operatorname{id}_H)^{-1}(y)$  mit  $y \in H$ , so folgt:

$$\|(f - i \operatorname{id}_H) \circ (f + i \operatorname{id}_H)^{-1}(y)\| = \|y\| .$$

Also ist  $v$  eine Isometrie und insbesondere stetig. Da nach Lemma 3.4.11 auch die Umkehrabbildung

$$v^{-1} = (f + i \operatorname{id}_H) \circ (f - i \operatorname{id}_H)^{-1} : H \rightarrow H$$

existiert, ist  $v$  auch surjektiv und somit unitär. □

**Bemerkung 3.4.18.**

Man kann  $f$  aus seiner Cayley-Transformierten  $v = (f - i \operatorname{id}_H) \circ (f + i \operatorname{id}_H)^{-1}$  zurückgewinnen: wie man leicht nachrechnet, gilt

$$f = i (\operatorname{id}_H + v) \circ (\operatorname{id}_H - v)^{-1} .$$

**Theorem 3.4.19** (Spektralsatz - Multiplikationsoperatoren).

Sei  $A$  ein auf einem dichten Unterraum eines Hilbertraums  $H$  definierter selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein Maßraum  $(M, \mu)$  mit endlichem Maß, ein unitärer Operator

$$U : H \rightarrow L^2(M, d\mu)$$

und eine reellwertige Funktion  $f$  auf  $M$ , die  $\mu$ -fast überall endlich ist, so dass gilt

1.  $v \in D(A)$  genau dann, wenn  $f(\cdot)(Uv)(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$ .
2. Für  $\psi \in U[D(A)]$  gilt  $(UAU^{-1}\psi)(m) = f(m)\psi(m)$ .

**Beweis.**

1. Wir wissen aus Satz 3.4.12, dass die Operatoren  $(A \pm i \operatorname{id}_H)^{-1}$  beschränkt sind. Es folgt dann sofort aus der Resolventenformel 3.2.3, dass die beschränkten Operatoren  $r_{-i} = (A + i \operatorname{id}_H)^{-1}$  und  $r_i = (A - i \operatorname{id}_H)^{-1}$  vertauschen.

2. Die Gleichheit für  $v, w \in H$

$$\begin{aligned} & \langle (A - i \operatorname{id}_H)v, (A + i \operatorname{id}_H)^{-1}(A + i \operatorname{id}_H)w \rangle \\ &= \langle (A - i \operatorname{id}_H)v, w \rangle = \langle \psi, (A + i \operatorname{id}_H)w \rangle \quad , \\ &= \langle (A - i \operatorname{id}_H)^{-1}(A - i \operatorname{id}_H)v, (A + i \operatorname{id}_H)w \rangle \end{aligned}$$

zusammen mit der Tatsache, dass  $\operatorname{Im}(A \pm i \operatorname{id}_H) = H$  gilt, zeigt, dass  $((A + i \operatorname{id}_H)^{-1})^* = (A - i \operatorname{id}_H)^{-1}$ . Also sind die beschränkten Operatoren  $(A \pm i \operatorname{id}_H)^{-1}$  normal, d.h. sie vertauschen mit ihrem adjungierten Operator. (Ein selbstadjungierter Operator ist trivialerweise normal.)

3. Man kann das Spektraltheorem auf beschränkte normale Operatoren ausdehnen. Dazu bemerkt man, dass ein normaler beschränkter Operator  $A$  sich schreiben lässt als  $A = B + iC$ , wobei  $B$  und  $C$  kommutierende selbstadjungierte beschränkte Operatoren sind. Dann zeigt man eine Variante des Spektralsatzes in der Formulierung von Korollar 3.3.22 für ein  $N$ -Tupel  $(A_1, A_2, \dots, A_N)$  kommutierender beschränkter selbstadjungierter Operatoren, der die gleichzeitige Diagonalisierbarkeit kommutierender selbstadjungierter Operatoren verallgemeinert: es gibt einen endlichen Maßraum  $(M, \mu)$  und beschränkte, reellwertige Borelfunktionen  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$  auf  $(M, \mu)$  und eine unitäre Abbildung

$$U : H \rightarrow L^2(M, \mu) ,$$

so dass gilt

$$(UA_iU^{-1}\varphi)(m) = f_i(m)\varphi(m) .$$

Wir finden somit einen Maßraum  $(M, \mu)$  mit endlichem Maß, einen unitären Operator  $U : H \rightarrow L^2(M, \mu)$  und eine  $\mu$ -messbare, beschränkte, *komplexwertige* Funktion  $g(m)$ , so dass

$$(*) \quad U(A + i)^{-1}U^{-1}\varphi(m) = g(m)\varphi(m) \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(M, \mu) .$$

4. Weil der Kern  $\ker(A + i \operatorname{id}_H)^{-1}$  trivial ist, gilt  $g(m) \neq 0$   $\mu$ -fast überall. Also ist die Funktion  $f(m) := g(m)^{-1} - i$   $\mu$ -fast überall endlich. Nun sei  $v \in D(A)$ . Dann schreibe  $v = (A + i \operatorname{id}_H)^{-1}w$  mit einem geeigneten  $w \in H$ , so dass wegen (\*) gilt  $Uv = U(A + i \operatorname{id}_H)^{-1}U^{-1}Uw = gUw$ . Weil die Funktion  $f \cdot g$  beschränkt ist, folgt  $f \cdot (Uv) = f \cdot g \cdot Uw \in L^2(M, d\mu)$ .

5. Sei umgekehrt  $f(\cdot)Uv(\cdot) \in L^2(M, d\mu)$ . Finde wegen der Surjektivität von  $U$  ein ein  $w \in H$  mit  $Uw = (f + i)v$ . Dann ist

$$gUw = g(f + i)Uv = Uv ,$$

da  $f + i \operatorname{id}_H = \frac{1}{g}$  gilt. Somit gilt  $v = (A + i)^{-1}w$ . Daher ist  $v \in D(A)$  und die erste Aussage bewiesen.

6. Um die zweiten Aussage zu zeigen, bemerken wir, dass wenn  $v \in D(A)$  gilt, sich  $v$  in der Form  $v = (A + i \operatorname{id}_H)^{-1}\varphi$  mit einem  $\varphi \in H$  schreiben lässt. Es folgt  $Av = \varphi - iv$ . Es folgt

$$v = (A + i \operatorname{id}_H)^{-1}\varphi = U^{-1}(g(m)U\varphi(m))$$

und somit (\*\*)  $Uv(m) = g(m)U\varphi(m)$ . Wir rechnen:

$$\begin{aligned} (UA v)(m) &= (U\varphi)(m) - i(Uv)(m) \\ &= (g(m)^{-1} - i)(Uv)(m) \quad [\text{wegen (**)}] \\ &= f(m)(Uv)(m) . \quad [\text{Definition von } f] \end{aligned}$$

7. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion  $f$ , die im vierten Schritt definiert wurde, auf  $M$  (wesentlich) reellwertig ist. Wir nehmen daher an, es würde  $\text{Im}(f) > 0$  auf einer Menge von positivem Maß gelten. Dann gibt es in der komplexen oberen Halbebene eine Teilmenge  $B$ , so dass  $S := \{x \in M \mid f(x) \in B\}$  positives Maß hat. Dann ist  $f\chi_S \in L^2(M, \mu)$  und  $\text{Im}\langle \chi_S, f\chi_S \rangle = \text{Im} \int_S f > 0$ . Aber der Multiplikationsoperator mit  $f$  ist unitär äquivalent zu  $A$  und daher selbstadjungiert, Widerspruch. Also ist  $f$  reellwertig.

□

Wir können nun Funktionen eines selbstadjungierten Operators definieren: für eine beschränkte Borel-Funktion  $h$  auf  $\mathbb{R}$  setzen wir  $h(A) := U^{-1}T_{h(f)}U$ . Hierbei ist  $T_{h(f)}$  der Operator auf  $L^2(M, d\mu)$ , der durch Multiplikation mit der komplexwertigen Funktion  $m \mapsto h(f(m))$  wirkt. Es folgt nun:

**Theorem 3.4.20** (Spektralsatz - Funktionalkalkül).

Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es eine eindeutige Abbildung von den beschränkten Borelfunktionen

$$\hat{\Phi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(H)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $\hat{\Phi}$  ist ein unitärer  $*$ -Algebra Morphismus.
2.  $\hat{\Phi}$  ist stetig:  $\|\hat{\Phi}(f)\|_{L(H)} \leq \|f\|_\infty$ .
3. Sei  $h_n(x)$  eine Folge beschränkter Borel Funktionen, für die punktweise gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = x$  und  $|h_n(x)| \leq |x|$  für alle  $x$  und  $n$ . Dann gilt für alle  $\psi \in D(A)$ , dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(h_n)\psi = A\psi$ .
4. Es gelte  $h_n(x) \rightarrow h(x)$  fast überall und  $\|h_n\|_\infty$  sei beschränkt. Dann gilt  $\hat{\Phi}(h_n) \rightarrow \hat{\Phi}(h)$  bezüglich der Norm.

$\hat{\Phi}$  hat die weiteren Eigenschaften:

5. Aus  $A\psi = \lambda\psi$  folgt  $\hat{\Phi}(h)\psi = h(\lambda)\psi$ .
6. Aus  $h \geq 0$  folgt  $\hat{\Phi}(h) \geq 0$ .

Man konstruiert dann auch wieder Spektralmaße, wobei man einen Vektor  $\psi \in H$  zyklisch für  $A$  nennt, wenn der Unterraum  $\{g(A)\psi \mid g \in C^\infty(\mathbb{R})\}$  dicht in  $H$  ist. Gibt es einen zyklischen Vektor, so können wir wieder  $H$  identifizieren mit  $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$ , wobei  $\mu_\psi$  ein Maß ist, für das gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\psi(x) = \langle \psi, g(A)\psi \rangle$$

und  $A$  durch Multiplikation mit  $x$  wirkt. Im allgemeinen Fall erhält man wieder direkte Summen zyklischer Unterräume und disjunkte Vereinigungen von Maßräumen. Schließlich erhält man auch wieder eine Zerlegung des Spektrums.

Wenn  $\Omega \subset \mathbb{R}$  eine  $\mu$ -messbare Menge ist, so können wir wieder Projektoren  $P_\Omega = \chi_\Omega(A)$  betrachten und erhalten:

**Theorem 3.4.21** (Spektralsatz - projektorwertige Maße).

Die Familie  $(P_\Omega)_\Omega$  der Spektralprojektionen eines selbstadjungierten Operators hat die folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Operator  $P_\Omega$  ist eine orthogonale Projektion.
2.  $P_\emptyset = 0$  und  $P_{(-\infty, \infty)} = \text{id}_H$ .
3. Gilt  $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$  mit  $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$  für alle  $n \neq m$ , so gilt  $P_\Omega = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n_1}^N P_{\Omega_n}$  in der Normtopologie.
4. Es gilt  $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$ .

**Bemerkungen 3.4.22.**

1. Eine Familie von Projektoren, die 1. -3. erfüllt, heißt ein projektorwertiges Maß. Wir haben in 2. nicht gefordert, dass  $P_{(-a, a)} = \text{id}_H$  für ein  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Für jeden Vektor  $\psi \in H$  ist  $\langle \psi, P_\Omega \psi \rangle$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}$ . Für eine beschränkte Borel-Funktion können wir daher den Operator  $g(A)$  definieren durch

$$(*) \quad \langle v, g(A)v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\langle v, P_\lambda v \rangle .$$

Man zeigt, dass dies mit der Definition von  $g(A)$  aus Theorem 3.4.19 übereinstimmt.

3. Für eine unbeschränkte Borel-Funktion  $g$  setzen wir

$$D_g := \left\{ v \mid \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\langle v, P_\lambda v \rangle < \infty \right\} .$$

Dann ist  $D_g \subset H$  ein dichter Unterraum, und wir definieren auf  $D_g$  den Operator  $g(A)$  durch (\*). Wir schreiben symbolisch

$$g(A) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dP_\lambda ;$$

ist die Borel-Funktion  $g$  reellwertig, so ist  $g(A)$  ein auf  $D_g$  definierter selbstadjungierter Operator.

**Theorem 3.4.23.**

Es gibt eine Bijektion zwischen selbstadjungierten Operatoren  $A$  und projektorwertigen Maßen auf  $H$ , mit

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda .$$

Für eine reelwertige Borelfunktion  $g(\cdot)$  auf  $\mathbb{R}$  ist

$$g(A) := \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) dP_\lambda$$

ein auf  $D_g$  definierter selbstadjungierter Operator. Für beschränkte Borelfunktionen stimmt  $g(A)$  mit dem Operator  $\hat{\Phi}(A)$  aus Theorem 3.4.19 überein.

Wir bringen nun einige Bemerkungen zur Zeitenwicklung quantenmechanischer Systeme. Sei  $H$  ein Hilbertraum und  $A$  ein selbstadjungierter Operator mit dichtem Definitionsbereich, unter dem wir uns den Hamilton-Operator vorstellen wollen. Nach Bemerkung 3.3.26.5 wird ein (reiner) Zustand des quantenmechanischen Systems beschrieben durch einen Vektor  $\psi \in H$  mit  $\|\psi\| = 1$ . Die Zeitentwicklung des Zustands soll aus dem Hamilton-Operator  $H$  abgeleitet werden, von dem wir annehmen, dass er zeitlich konstant ist.

**Satz 3.4.24.**

Sei  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $H$ . Setzen wir mit Hilfe des Funktionalkalküls  $U(t) := e^{itA}$ , so gilt

1. Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist der Operator  $U(t)$  unitär und es gilt  $U(t+s) = U(t)U(s)$ .
2. Für alle  $\psi \in H$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$  gilt  $\lim_{t \rightarrow t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi$ .
3. Für  $\psi \in D(A)$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} = iA\psi .$$

4. Wenn für  $\psi \in H$  der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$  existiert, dann ist  $\psi \in D(A)$ .

**Beweis.**

- Die Aussagen 1. folgen unmittelbar aus Aussagen über die komplexwertige Funktion  $e^{it}$  und dem Funktionalkalkül in Theorem 3.4.19.
- Nach dem Funktionalkalkül gilt

$$\|e^{itA}v - v\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 d\langle P_\lambda v, v \rangle .$$

Der Integrand  $|e^{it\lambda} - 1|^2$  ist beschränkt durch die Funktion  $g(\lambda) = 4$ , die auf einem endlichen Maßraum integrierbar ist. Es gilt punktweise in  $\lambda$

$$\lim_{t \rightarrow 0} |e^{it\lambda} - 1|^2 = 0 ;$$

nach dem Satz von der dominierten Konvergenz und dem Funktionalkalkül folgt  $\lim_{t \rightarrow 0} U(t)v = Uv$  und somit Stetigkeit für  $t_0 = 0$ . Das Gruppengesetz impliziert, dass die Funktion für beliebige  $t_0 \in \mathbb{R}$  stetig ist.

- Für die dritte Aussage verwendet man die Abschätzung  $|e^{ix} - 1| \leq |x|$  und ähnliche Argumente.
- Setze

$$D := \left\{ \psi \in H \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t} \text{ existiert} \right\}$$

und setze  $iB\psi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\psi - \psi}{t}$ . Man rechnet nach, dass  $B$  ein symmetrischer Operator ist,  $B^* \supset B$ . Nach 3. gilt  $B \supset A$ , also  $A^* \supset B^* \supset B \supset A$ . Da  $A$  nach Voraussetzung selbstadjungiert ist, also  $A^* = A$  gilt, folgt  $A = B$ .

□

Man beachte, dass wir hier wirklich den vollen Spektralkalkül brauchen und nicht nur einen analytischen Spektralkalkül, da  $A$  in realistischen Anwendungen nicht beschränkt ist.

**Bemerkungen 3.4.25.**

1. Eine operatorwertige Funktion, die den Bedingungen 1. und 2. aus Satz 3.4.24 gehorcht, heißt eine (stark) stetige unitäre Einparametergruppe.

2. Stones Theorem besagt, dass es zu jeder (stark) stetigen unitären Einparamtergruppe  $U(t)$  auf einem Hilbertraum  $H$  einen selbstadjungierten Operator  $A$  auf  $H$  gibt, so dass  $U(t) = e^{itA}$  gilt. Für den Beweis verweisen wir auf [RS, Theorem VIII.8]. Der selbstadjungierte Operator  $A$  heißt der infinitesimale Erzeuger von  $U(t)$ .
3. Sehen wir die unitäre Zeitentwicklung eines Zustands als grundlegenden Struktur der Quantenmechanik, so können wir die Theorie selbstadjungierter Operatoren gar nicht vermeiden; es ist dabei in der Regel nicht realistisch, die Operatoren als beschränkt vorauszusetzen.

# A Selbstadjungiertheit des freien Hamilton-Operators

Wir haben genug Hilfsmittel kennen gelernt, um zu zeigen, dass der freie Hamilton-Operator, also der Laplace-Operator, auf  $\mathbb{R}^n$  selbstadjungiert ist. Die Behandlung von anderen Hamilton-Operatoren, etwa dem des Wasserstoffatoms, erfordert weitergehende Hilfsmittel.

## Satz A.1.

1. Der Differentialoperator auf dem Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , der auf dem Sobolev-Raum (cf. Bemerkung 3.1.16)  $W^{2,2} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  durch schwache Ableitungen definiert ist

$$f(\varphi) := -\Delta \varphi = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi \quad \text{mit} \quad D(f) := W^{2,2}(\mathbb{R}^n),,$$

ist selbstadjungiert.

2. Der Abschluss des Operators  $f_0$  mit Definitionsbereich  $D(f_0) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  mit

$$f_0(\varphi) := -\Delta \varphi$$

ist  $\overline{f_0} = f$ .

3. Der Operator  $f$  ist positiv,  $f \geq 0$ .
4. Das Punktspektrum von  $f$  ist leer,  $\sigma_p(f) = \emptyset$ , das kontinuierliche Spektrum ist die abgeschlossene positive Halbachse,  $\sigma_c(f) = [0, \infty)$ .

## Beweis.

1. Wir zeigen zunächst, dass der Operator  $f$  symmetrisch ist: seien  $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann folgt mit partieller Integration, da die Randterme nicht beitragen:

$$\begin{aligned} \langle f_0(\varphi), \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{(-\Delta \varphi(x))} \psi(x) \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \overline{\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} \, d^n x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \cdot (-\Delta \psi(x)) \, d^n x = \langle \varphi, f_0(\psi) \rangle. \end{aligned}$$

Da  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht im Sobolev-Raum  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  liegt, folgt durch Grenzübergang für  $\varphi, \psi \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\langle f(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, f(\psi) \rangle ;$$

also sind die Operatoren  $f$  und  $f_0$  symmetrisch. Außerdem gilt

$$(A1) \quad \langle f(\varphi), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} \right|^2 \, d^n x \geq 0$$

also ist  $f$  (und  $f_0$ ) positiv und 3. ist gezeigt.

2. Selbstadjungiertheit von  $f$  zeigen wir mit Hilfe von Korollar 3.4.13: wir zeigen, dass für beliebiges negatives  $\lambda < 0$  gilt  $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_H) = H$ .

Sei dazu  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  beliebig; wir konstruieren ein Urbild. Man kann zeigen, dass mit  $\psi$  auch die Fouriertransformierte  $\widehat{\psi}$  und die Funktion

$$\frac{1}{\|k\|^2 - \lambda} \widehat{\psi}(k)$$

mit  $\|k\|$  der Norm von  $k \in \mathbb{R}^n$  zum Funktionenraum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gehören. Man überlegt sich dann, dass für  $\lambda < 0$  auch die Funktion

$$\sigma(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-i\langle k, x \rangle} \frac{1}{\|k\|^2 - \lambda} \widehat{\psi}(k)$$

im Sobolev-Raum  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  liegt und findet

$$(-\Delta - \lambda)\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{-i\langle k, x \rangle} \frac{\|k\|^2 - \lambda}{\|k\|^2 - \lambda} \widehat{\psi}(k) = \psi(x) ;$$

also ist  $\sigma$  ein Urbild von  $\psi$  unter  $(f - \lambda \text{id}_H)$  und es folgt  $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_H) = H$ .

3. Um zu zeigen, dass  $f$  der Abschluss des Operators  $f_0$  ist, müssen wir nach dem Beweis von Satz 3.4.9 zeigen, dass der Sobolev-Raum  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  der Abschluss von  $D(f_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm

$$\|\varphi\|_f^2 = \|f(\varphi)\|^2 + \|\varphi\|^2$$

ist. Da der Raum glatter Funktionen mit kompaktem Träger  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm von  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  dicht im Sobolev-Raum  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  liegt, reicht es aus, zu zeigen, dass die Sobolev-Norm  $\|\cdot\|_{W^2}$  und die Norm  $\|\cdot\|_f$  äquivalent sind. Wir berechnen die erste Norm für  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_f^2 &= \|\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} \right\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 + \left\langle \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \varphi, \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \varphi \right\rangle \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j^2 \varphi(x)} \partial_k^2 \varphi(x) \, d^n x . \end{aligned}$$

Für  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  erhält man mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_f^2 &= \|\varphi\|^2 - \sum_{j,k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j^2 \partial_k \varphi(x)} \partial_k \varphi(x) \, d^n x \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\partial_j \partial_k \varphi(x)} \partial_j \partial_k \varphi(x) \, d^n x \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{j,k=1}^n \|\partial_j \partial_k \varphi\|^2 \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$(A2) \quad \|\varphi\|_f^2 = \|\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^2 \varphi\|^2 + 2 \sum_{j < k} \|\partial_j \partial_k \varphi\|^2,$$

wobei hier  $\|\cdot\|$  stets die Norm in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet.

Andererseits ist per Definition die Sobolev-Norm

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{W^2}^2 &= \sum_{|\beta| \leq 2} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta \varphi(x)|^2 \, d^n x \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} \|\partial^\beta \varphi\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j^2 \varphi\|^2 + 2 \sum_{j < k} \|\partial_j \partial_k \varphi\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j \varphi\|^2, \end{aligned}$$

Der direkte Vergleich liefert also die erste Abschätzung für die Normen

$$(A3) \quad \|\varphi\|_f^2 \leq \|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 .$$



Andererseits gilt für die Sobolev-Norm

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 &= \|\varphi\|_f^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j \varphi\|^2 \\
&= \|\varphi\|_f^2 + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j \varphi(x)|^2 dx \\
&\stackrel{(A1)}{=} \|\varphi\|_f^2 + \langle f(\varphi), \varphi \rangle \\
&\stackrel{CS}{\leq} \|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2 + \|f(\varphi)\| \cdot \|\varphi\|.
\end{aligned}$$

Da für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  stets  $\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$  gilt, folgt die zweite Abschätzung

$$(A4) \quad \|\varphi\|_{W^{2,2}}^2 \leq 2(\|\varphi\|^2 + \|f(\varphi)\|^2) = 2 \|\varphi\|_f^2.$$

Aus (A3) und (A4) folgt, dass die Normen  $\|\cdot\|_{W^2}$  und  $\|\cdot\|_f$  äquivalent sind. Somit ist der Operator  $f$  der Abschluss von  $f_0$ .

4. Wir wollen nun das Spektrum von  $f$  untersuchen. Da  $f$  selbstadjungiert ist, ist nach Satz 3.4.16 das Spektrum reell,  $\sigma(f) \subset \mathbb{R}$ . Wir betrachten zunächst das Punktspektrum. Ist  $\lambda \in \sigma_p(f)$ , so gibt es eine Eigenfunktion  $\varphi \in D(f)$  mit  $\|\varphi\| = 1$  und  $f(\varphi) = \lambda\varphi$ . Es folgt

$$\langle \varphi, f(\varphi) \rangle = \lambda \|\varphi\|^2 = \lambda.$$

Wegen der Positivität von  $f$  ist die linke Seite nicht-negativ, so dass  $\lambda \geq 0$  gelten muss.

Die Fouriertransformation erhält die  $L^2$ -Norm; daher gilt für eine normierte Eigenfunktion  $\varphi \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\hat{\varphi}\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1.$$

Fouriertransformation führt Differentiation in Multiplikation über; daher folgt aus der Eigenwertgleichung  $f(\varphi) = \lambda\varphi$  die Gleichung

$$\|x\|^2 \hat{\varphi}(x) = \lambda \hat{\varphi}(x),$$

also

$$(\|x\|^2 - \lambda) \hat{\varphi}(x) = 0.$$

Für  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  folgt daraus  $\hat{\varphi} = 0$  fast überall. Dem widerspricht aber  $\|\hat{\varphi}\| = 1$ . Also gibt es kein  $\lambda \geq 0$  mit  $\lambda \in \sigma_p(f)$ .

5. Wir kommen nun zum kontinuierlichen Spektrum: für  $\lambda < 0$  hatten wir schon in 2. gezeigt, dass

$$(A5) \quad \text{Im}(f - \lambda \text{id}_H) = L^2(\mathbb{R}^n) = H$$

gilt.

Gilt  $\lambda \in \sigma_c(f)$ , dann ist der Operator  $f - \lambda \text{id}_H$  injektiv, es existiert also ein Umkehroperator

$$(f - \lambda \text{id}_H)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow D(f).$$

Wir zeigen zunächst, dass der Operator  $(f - \lambda \text{id}_H)^{-1}$  für  $\lambda < 0$  abgeschlossen ist: sei  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus  $D((f - \lambda \text{id}_H)^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} (f - \lambda \text{id})^{-1}(\varphi_k) = \psi.$$

Dann ist wegen  $D((f - \lambda \text{id}_H)^{-1}) = L^2(\mathbb{R}^n)$  ohnehin klar, dass  $\varphi \in D((f - \lambda \text{id}_H)^{-1})$  gilt.

Um

$$(A6) \quad (f - \lambda \text{id}_H)^{-1}(\varphi) = \psi .$$

zu zeigen, setzen wir  $\psi_k := (f - \lambda \text{id}_H)^{-1}(\varphi_k)$ ; dann ist

$$\psi_k \in D(f - \lambda \text{id}_H) = D(f) .$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f - \lambda \text{id}_H)(\psi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$$

und aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \psi$  folgt somit

$$(A8) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(\psi_k) = \varphi + \lambda \psi .$$

Nun ist  $f$  selbstadjungiert, also nach Satz 3.4.8 also abgeschlossen. Aus  $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \psi$  und (A8) folgt daher  $f(\psi) = \varphi + \lambda \psi$ , also  $(f - \lambda \text{id}_H)(\psi) = \varphi$  und damit (A6). Also ist der Operator  $(f - \lambda \text{id}_H)^{-1}$  abgeschlossen.

6. Nun ist  $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$  mit der Maximum-Norm

$$\|(\varphi, \psi)\| := \max\{\|\varphi\|, \|\psi\|\} \quad \text{für } \varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein Banachraum; darin ist der Graph des abgeschlossenen Operators  $(f - \lambda \text{id}_H)^{-1}$  für  $\lambda < 0$

$$G := \{(\varphi, (f - \lambda \text{id}_H)^{-1}(\varphi)) \mid \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)\} ,$$

ein abgeschlossener Untervektorraum, also selbst ein Banachraum.

Die Projektion

$$p_1 : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } p_1(\varphi, (f - \lambda \text{id}_H)^{-1}(\varphi)) := \varphi$$

ist linear, stetig und bijektiv. Nach Korollar 3.1.36 ist

$$p_1^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow G, \varphi \mapsto (\varphi, (f - \lambda \text{id}_H)^{-1}(\varphi))$$

stetig, also ist auch der Operator  $(f - \lambda \text{id}_H)^{-1}$  stetig. Also ist  $\lambda \in \rho(f)$ , und wir haben gezeigt, dass  $\sigma(f) = \sigma_c(f) \subset [0, \infty)$ .

7. Wir müssen zeigen, dass jede positive reelle Zahl  $\lambda \in [0, \infty)$  zum kontinuierlichen Spektrum gehört:  $\sigma_c(f) = [0, \infty)$ . Die Idee ist, für jedes  $\lambda \geq 0$  eine Folge  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Wellenpaketen in  $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  anzugeben, für die gilt

$$(*) (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \text{ besitzt keine konvergente Teilfolge, und } \lim_{j \rightarrow \infty} (f - \lambda \text{id}_H)(\varphi_j) = 0 .$$

Würde nun  $(f - \lambda \text{id}_H)^{-1}$  als stetiger Operator existieren, so würde aus der zweiten Aussage folgen, dass  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$  gilt. Das widerspricht aber der ersten Aussage.

Um eine solche Funktionenfolge zu finden, wähle

- eine Folge positiver reeller Zahlen mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ .
- eine Glättungsfunktion  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  und

- eine Folge  $(z_j)_{j \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathbb{R}^n$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|z_j\| = \infty$ , so dass die Träger der Funktionen

$$\begin{aligned}\psi_j : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \psi_j(x) &:= \psi(\varepsilon_j(x - z_j))\end{aligned}$$

paarweise disjunkt sind.

Wir wählen  $k \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|k\|^2 = \lambda \geq 0$  und setzen

$$\varphi_j(x) := \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \cdot \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \cdot \exp(i\langle k, x \rangle).$$

Dann ist  $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$  und es gilt

$$\|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \varepsilon_j^n \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\varepsilon_j(x - z_j))|^2 d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)|^2 d^n y = \|\psi\|^2 > 0.$$

Da die Funktionen  $\varphi_j$  und  $\varphi_k$  für  $j \neq k$  nach Konstruktion disjunkte Träger haben, ist ihr Skalarprodukt in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gleich 0; es folgt

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|^2 = \|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_k\|^2 = 2\|\psi\|^2 > 0.$$

mit der positiven Konstante  $\|\psi\|^2$ , so dass die Funktionenfolge  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge haben kann.

Ferner ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \cdot \Delta(\exp(i\langle k, x \rangle)) &= \\ &= -\lambda \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) \exp(i\langle k, x \rangle) = -\lambda \varphi_j(x),\end{aligned}$$

wegen  $\sum_{m=1}^n (i k_m)^2 = -\lambda$ . Für  $f = -\Delta$  folgt nach der Leibnizregel für die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}((f - \lambda \text{id})(\varphi_j))(x) &= \\ &= \varepsilon_j^{\frac{n}{2}} \left[ -\Delta \psi(\varepsilon_j(x - z_j)) - 2 \sum_{m=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_m}(\varepsilon_j(x - z_j)) i k_m \right] \cdot \exp(i\langle k, x \rangle).\end{aligned}$$

Wir verwenden nun die Dreiecksungleichung für die Norm in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  und führen anschließend die Substitution  $y := \varepsilon_j(x - z_j)$  aus. Es folgt

$$\|(f - \lambda \text{id})(\varphi_j)\| \leq \varepsilon_j^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_y \psi(y)|^2 d^n y \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\lambda} \varepsilon_j \left( \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left| \frac{\partial \psi(y)}{\partial y_m} \right|^2 d^n y \right)^{\frac{1}{2}};$$

auf der rechten Seite hängt nur noch  $\varepsilon_j$  vom Index  $j$  ab. Diese Folge geht gegen Null, also gilt auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (f - \lambda \text{id}_H)(\varphi_j) = 0,$$

Die Funktionenfolge  $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  hat also die beiden in (\*) geforderten Eigenschaften.

□

## Literatur

- [FL] Wolfgang Fischer und Ingo Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg, Wiesbaden, 2005
- [F3] Otto Forster, *Analysis 3*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011
- [H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [H01] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis 1*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2006
- [Koe] Max Koecher, *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, Springer, Grundwissen Mathematik, Band 2, 1983
- [K2] Konrad Königsberger, *Analysis 2*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2004
- [RS] Michael Reed und Barry Simon, *Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1972
- [R1] Reinhold Remmert, *Funktionentheorie 1*, Springer, Berlin/Heidelberg
- [T] Hans Triebel, *Höhere Analysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.

# Index

- äußere Ableitung, 10
- äußere Algebra, 8
- äußeres Produkt, 8
  
- Abelsches Lemma, 31
- abgeschlossene Abbildung, 120
- abschließbarer Operator, 120
- absolut stetige Funktion, 124
- adjungierter Operator, 86, 118
- alternierende Multilinearform, 6
- analytische Funktion, 34
- Aneinanderreihung von Kurven, 39
- Anfangspunkt einer Kurve, 39
- Argument einer komplexen Zahl, 23
- Atlas, 16
  
- Baire-Funktion, 111
- Baire-Maß, 111
- Baire-Menge, 111
- Banachalgebra, 97
- Banachraum, 77
- Betrag einer komplexen Zahl, 23
- bilineare Abbildung, 1
- Borelmaß, 109
  
- Cauchy-Hadamard, Formel von, 31
- Cauchy-Riemannsche Dgl., 26
- Cauchysche Integralformel, 52
- Cauchysche Ungleichungen, 55
- Cauchyscher Integralsatz, 46
- Cayley-Transformierte, 126
  
- Dachprodukt, 8
- Darstellungssatz von Riesz, 78
- Dichtematrix, 105
- Differentialform, 10
- Diracmaß, 110
  
- Eigenvektor, 92
- Eigenwert, 92
- Eindeutigkeitsmenge, 38
- einfach zusammenhängendes Gebiet, 48
- Einsteinsche Summationskonvention, 4
- elliptisches Randwertproblem, 103
- Endpunkt einer Kurve, 39
- entgegengesetzte Kurve, 39
- entgegengesetzte Orientierung, 17
- Erweiterung eines Operators, 118
  
- exakte Differentialform, 12
  
- Fortsetzung eines Operators, 118
- Fourierkoeffizient, 79
- Fredholmsche Alternative, 101
- freie Homotopie, 42
- Fundamentalsatz der Algebra, 56
- Funktionalkalkül, 106, 112, 128
  
- ganze Funktion, 34
- Gebiet, 24
- geschlossene Differentialform, 12
- geschlossene Kurve, 39
- Graph einer Funktion, 119
  
- Halbraum, 19
- Hauptteil einer Funktion, 60
- Hauptzweig, 29
- hebbare Singularität, 62
- Hilbert-Schmidt Operator, 106
- Hilbertbasis, 79
- Hilbertraum, 77
- holomorphe Funktion, 25
- Homotopie, 42
  
- Ideal, 97
- Index eines Wegs, 50
- isolierter singulärer Punkt, 60
- Isometrie, 83
- isometrische Abbildung, 83
  
- kompakte Abbildung, 95
- komplex differenzierbare Funktion, 24
- komplexe Differenzierbarkeit, 24
- komplexe Konjugation, 23
- konforme Abbildung, 28
- kontinuierliches Spektrum, 93
- kontravarianter Vektor, 4
- Konturhomotopie, 42
- Konvergenz im quadratischen Mittel, 82
- Konvergenzbereich, 30
- Konvergenzradius, 31
- Kotangentenraum, 9
- kovarianter Vektor, 4
- Kurve, 39
  
- Laurentreihe, 59
- Laurentzerlegung, 59, 60

Lebesgue-Stieltjes Integral, 110  
 Lebesguesche Eigenschaft, 43  
  
 Nebenteil einer Funktion, 60  
 Neumann-Reihe, 94  
 Nullstelle, 60  
  
 Observable, 117  
 offene Abbildung, 91  
 Operator von endlichem Rang, 96  
 Operatornorm, 78  
 Ordnung eines Pols, 60  
 orientierbare Untermannigfaltigkeit, 16  
 orientierte Untermannigfaltigkeit, 16  
 orthogonale Projektion, 77  
 orthogonales Komplement, 77  
 orthonormale Familie, 79  
  
 Parsevalsche Gleichung, 80  
 partielle Isometrie, 105  
 Poincaré'sches Lemma, 13  
 Pol, 60  
 Polarisierung, 83  
 Polarkoordinaten, 24  
 Polstellenordnung, 60  
 positiver Operator, 90  
 positives Funktional, 111  
 Potenzreihe, 30  
 Projektor, 89  
 Pullback, 14  
 Punktspektrum, 93  
  
 Rücktransport, 14  
 Radontransformierte, 86  
 Randwertproblem, 102  
 reine Punkte eines Maßes, 110  
 reines Punktmaß, 110  
 Residuensatz, 65  
 Residuum, 64  
 Resolvente, 93  
 Resolventenformel, 93  
 Resolventenmenge, 93  
 Riemannscher Hebbarkeitssatz, 62  
 Ringgebiet, 56  
  
 Satz von Hellinger-Toeplitz, 119  
 Satz von Hilbert-Schmidt, 103  
 Satz von Liouville, 55  
 Satz von Riesz-Markov, 112  
 Satz von Riesz-Schauder, 103  
 Schattenideale, 106  
  
 schwach konvergente Folge, 95  
 selbstadjungierter Operator, 86, 119  
 separabler metrischer Raum, 77  
 Sobolev-Raum, 82, 116, 131  
 spektrale Realisierung, 115  
 Spektralmaß, 112  
 Spektralprojektion, 116  
 Spektralradius, 94  
 Spektralsatz, 106, 113, 115, 116, 126, 128  
 Spektrum, 93  
 Spurklasse, 105  
 Stammfunktion, 37  
 statistische Matrix, 105  
 sternförmige Teilmenge, 12  
 sternförmiges Gebiet, 48  
 stetiges Maß, 110  
 Stokesscher Integralsatz, 21  
 Stones Theorem, 130  
 symmetrischer Operator, 119  
  
 Tensor, 3  
 Tensoralgebra, 5  
 Tensorprodukt, 1  
 totales Differential, 9  
  
 unitäre Abbildung, 83  
 universelle Eigenschaft, 1  
  
 vektorielle (Hyper-)Flächenelement, 18  
 vektorielles (Hyper-)Flächenelement, 11  
 vektorielles Linienelement, 11  
 Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel,  
 54  
 Verjüngen eines Tensors, 6  
 Volumenelement, 12  
  
 Weg, 39  
 Wegintegral, 40  
 wesentlich selbstadjungierter Operator, 122  
 wesentlich singulärer Punkt, 60  
 wesentliche Singularität, 60  
 wesentliches Bild, 125  
 wesentliches Spektrum, 117  
 Windungszahl, 50  
  
 Zustand eines quantenm. Systems, 117  
 zyklischer Vektor, 114