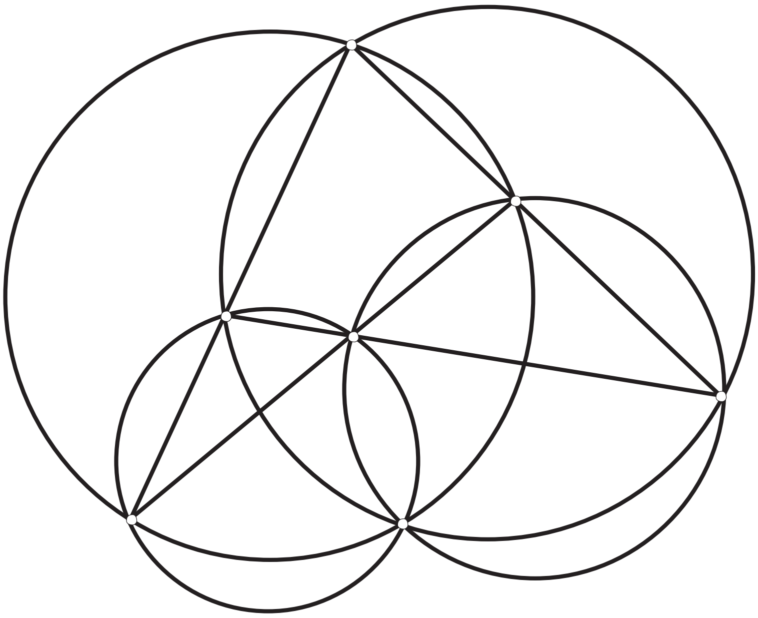
Eberhard M. Schröder

Elemente der Mathematik

für Studierende der mittleren Lehrämter

Ausarbeitung der Vorlesungen
Mathematik I - IV,
gehalten am Fachbereich Mathematik
der Universität Hamburg
vom Wintersemester 2000/2001
bis zum Sommersemester 2002



 Hamburg, 2002

Vorwort

Das vorliegende Skript ist als Begleittext für die Vorlesung „Mathematik I – IV“ gedacht, die an der Universität Hamburg turnusmäßig für Studierende der mittleren Lehrämter gehalten wird.

Das Skript ist kein Ersatz für die Vorlesung. Es ist knapp, aber mathematisch vollständig in einer Weise abgefaßt, wie es bei mathematisch–wissenschaftlichen Texten üblich ist.

Bei der Vorbereitung auf das Examen wird diese Konzentration auf das Wesentliche als Vorteil empfunden werden. Der Anfänger wird sich hingegen erst daran gewöhnen müssen, daß man mathematische Texte nicht „lesen“, sondern nur Symbol für Symbol und Aussage für Aussage „durchbuchstabieren“ kann, wobei immer wieder auf früher erarbeitete Zusammenhänge zurückzugreifen ist (hierzu dienen die Vermerke in der Kopfleiste der Textseiten).

Das Erarbeiten mathematischer Zusammenhänge erfordert höchste Konzentration und sehr viel Geduld, wenn es zu wirklichem Verständnis führen soll. Man muß immer wieder damit rechnen, daß man für das Verstehen einer Textseite länger braucht als erwartet, und so mancher Abschnitt muß mehrfach durchgearbeitet werden.

Deshalb kann auf den Besuch der Vorlesung auch nicht verzichtet werden, weil die mathematischen Zusammenhänge im Vortrag mit einer anderen Eigendynamik geboten werden als im Text. So wird der Verständnisprozess in der Vorlesung z.B. auch durch das Setzen besonderer Schwerpunkte und das Aufzeigen von Querverbindungen wie durch das Beantworten von Fragen vorangebracht.

Da in der Mathematik alles aufeinander aufbaut, wird eine gründliche Nacharbeit jeder Vorlesungsstunde dringend empfohlen. Überdies gilt für die vorlesungsfreie Zeit ein nochmaliges intensives Durcharbeiten der gesamten Vorlesung als unverzichtbar.

Durch die gesetzlich verankerte Prüfungsordnung für Studierende der Lehrämter ist der Vorlesungsstoff recht deutlich festgelegt:
Es ist in der Vorlesung Mathematik I – IV möglichst weitgehend der mathematisch–wissenschaftliche Hintergrund für die Schulmathematik bis hin zur zehnten Klasse des Gymnasiums zu entwickeln.

Die Diskrepanz zwischen Schulmathematik und wissenschaftlicher Mathematik wird von Studienanfängern oft schmerzlich wahrgenommen. Gleichwohl wird empfohlen, sich auf die Anforderungen positiv einzustellen.

Schließlich darf man sich von diesem Studium der Mathematik erhoffen, im Umgang mit Mathematik ein solches Niveau zu erreichen, daß man die fachliche Seite des Lehrerdaseins mit Leichtigkeit bewältigt. Es macht Sinn, von einem Lehrer zu erwarten, daß er sein Fachgebiet aus der Vogelperspektive beherrscht.

In der Mathematik begegnet man einer der großartigsten und beständigsten aller menschlichen Kulturleistungen, die ihren Anfang vor mehr als fünftausend Jahren nahm und die heute lebendiger denn je gerade aufgrund ihrer fortschreitenden Abstraktheit in den verschiedensten Bereichen unseres Daseins eine erhebliche Rolle spielt.

Zugleich hat die Mathematik auch eine sehr ausgeprägte ästhetische Komponente, die sich aber erst im direkten Umgang mit ihr erschließt.

Weil man die Mathematik nur durch Üben erlernen kann, wie die Erfahrung zeigt, ist es außerordentlich wichtig, alle parallel zur Vorlesung angebotenen Übungen mit Intensität, Einsatzfreudigkeit, Geduld und Beharrlichkeit gewissenhaft zu bearbeiten.

Das Skript wurde mit dem mathematikbezogenen Textsetzsystem LaTeX auf Computerbasis erstellt. Die mühevolle Arbeit des Setzens hat Frau D. Glasenapp mit bewundernswerter Geduld hervorragend ausgeführt. Ihr gebührt mein besonderer Dank.

Hamburg, im Früjahr 2002 *E. M. S.*

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Bartsch, H.-J.: Taschenbuch mathematischer Formeln. Leipzig 1999.
Benz, W.: Ebene Geometrie. Heidelberg 1997.
Beutelspacher, A.: Lineare Algebra. Braunschweig 1994.
Bröcker, Th.: Analysis I. Heidelberg 1995.
Colerus, E.: Von Pythagoras bis Hilbert. Hamburg 1969.
Courant, R., Robbins, H.: Was ist Mathematik? Berlin 1973.
Coxeter, H.S.M.: Unvergängliche Geometrie. Basel 1963.
dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1/2. München 1974.
Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 1-6. Berlin 1969.
Euklid: Die Elemente. Darmstadt 1971.
Fischer, G., Sacher, R.: Einführung in die Algebra. Stuttgart 1974.
Griffith, H.B., Hilton, P.J.:
Klassische Mathematik in zeitgemäßer Darstellung 1-3. Göttingen 1976.
Halder, H.-R., Heise, W.: Einführung in die Kombinatorik. München 1976.
Halmos, P.R.: Naive Mengenlehre. Göttingen 1968.
Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis 1,2. Stuttgart 1988.
Indlekofer, K.H.: Zahlentheorie. Stuttgart 1978.
Karlson, P.: Du und der Zauber der Zahlen. Berlin 1954.
Königsberger, K.: Analysis 1. Berlin 1990.
Kütting, H.: Einführung in Grundbegriffe der Analysis 1,2. Freiburg 1973/77.
Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. Berlin 1961.
Mangoldt, H.v., Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik 1-4. Stuttgart 1963.
Meyberg, K.: Algebra 1,2. München 1975.
Mitschka, A., Strehl, R.: Einführung in die Geometrie. Freiburg 1979.
Mönnig, P.: Grundkurs der Mathematik. Frankfurt 1969.
Padberg, F.: Einführung in die lineare Algebra. Freiburg 1976.
Padberg, F.: Elementare Zahlentheorie. Mannheim 1991.
Quaisser, E., Sprengel, H.J.: Räumliche Geometrie. Berlin 1981.
Rademacher, R., Toeplitz, O.: Von Zahlen und Figuren. Berlin 1933.
Rudin, W.: Analysis. Weinheim 1980.
Scheid, H., Warlich, L., Powarzynski, R., Endl, K.:
Mathematik für Lehramtskandidaten 1-4. Frankfurt 1974.
Schröder, E.M.: Geometrie euklidischer Ebenen. Paderborn 1985.
Schupp, H.: Elementargeometrie. Paderborn 1977.
Scriba, C.J., Schreiber, P.: 5000 Jahre Geometrie. Berlin 2000.
Tietze, H.: Gelöste und ungelöste mathematische Probleme. München 1959.
Zahlen. Grundwissen Mathematik I. Berlin 1983.

1. Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen sind wohlbestimmte Objekte unseres Denkens. Ihre Gesamtheit werde mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. In der Schule haben wir gelernt, daß man sich $\mathbb{R}$ als „x–Achse“ oder „Zahlengerade“ in der Ebene gegeben denken kann, wobei jede einzelne Zahl einen Punkt repräsentiert. Im folgenden werden Eigenschaften von $\mathbb{R}$ angegeben, die für alles weitere als grundlegend zu betrachten sind:

A. Grundgesetze des Rechnens

Sind a, b reelle Zahlen – wir schreiben dafür kurz „$a, b \in \mathbb{R}$“, gelesen: „a, b aus $\mathbb{R}$“ –, so ist die **Summe** $a + b$ und das **Produkt** $a \cdot b$ jeweils eine wohlbestimmte reelle Zahl.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

(R1) **Kommutativgesetze:** $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$

(R2) **Assoziativgesetze:** $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

(R3) **Distributivgesetz:** $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$

(R4) **Existenz neutraler Elemente:** *Es gibt zwei verschiedene Zahlen* $0, 1 \in \mathbb{R}$ *mit* $0 + x = x$ *und* $1 \cdot x = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(R5) **Existenz negativer Elemente:** *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $y \in \mathbb{R}$ *mit* $x + y = 0$.

(R6) **Existenz inverser Elemente:** *Zu jedem* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq 0$ *gibt es ein* $z \in \mathbb{R}$ *mit* $x \cdot z = 1$.

Hierbei erfüllt das *Gleichheitszeichen* „=“ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

(Rf) **Reflexivität:** *Es gilt* $a = a$,

(Sy) **Symmetrie:** *Aus* $a = b$ *folgt* $b = a$,

(Tr) **Transitivität:** *Aus* $a = b$ *und* $b = c$ *folgt* $a = c$,

und die **„Wohlbestimmtheit“** von „+“ und „·“ beinhaltet die Gültigkeit von

(W) Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *mit* $a = b$ *und* $c = d$, *so ist* $a + c = b + d$ *und* $a \cdot c = b \cdot d$.

B. Weitere Rechenregeln

1. Statt „für alle“ schreiben wir im weiteren auch kurz „$\forall$“. Statt „es gibt“ oder „es existiert“ schreiben wir auch kurz „$\exists$“. Das Zeichen „:=“ wird gelesen als „ist definiert durch“, und „ $\Leftrightarrow$ “ steht für „ genau dann, wenn“.

2. Die Zahlen $0, 1$ sind durch *(R1)* und *(R4)* eindeutig festgelegt, denn ist $0' \in \mathbb{R}$ mit $0' + x = x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist $0' = 0 + 0' \overset{(R1)}{=} 0' + 0 = 0$, und ist $1' \in \mathbb{R}$ mit $1' \cdot x = x \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, so ist $1' = 1 \cdot 1' \overset{(R1)}{=} 1' \cdot 1 = 1$. Wir bezeichnen 0 als **Null** und 1 als **Eins**.

3. Wir setzen $a + b + c := (a + b) + c$ und $ab := a \cdot b$ sowie $abc := (a \cdot b) \cdot c$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$, verfahren mit Notationen also „wie üblich“.

4. Sind $x, y, y' \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0 = x + y'$, so ist $y' = y' + 0 = y' + (x + y) \overset{(R2)}{=} (y' + x) + y = 0 + y = y$. Demnach gibt es zu $x \in \mathbb{R}$ *genau ein* $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$. Man notiert y als

$-x$ und nennt $-x$ **das Negative** von x. Wegen $(-x)+x=0$ ist x das Negative von $-x$, d.h. es ist

$$-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Wegen $(a+b)+((-b)+(-a))=0$ ist

$$-(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (-\mathbf{a})+(-\mathbf{b}) \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}.$$

Man setzt $\mathbf{z}-\mathbf{x} := \mathbf{z}+(-\mathbf{x}) \quad \forall\, x,z \in \mathbb{R}$ und nennt $z-x$ **die Differenz** von z und x.

5. *Zu $a,b \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a+x=b$, nämlich $x := b-a$.*

Tatsächlich ist $a+(b-a) = a+(b+(-a)) = a+(-a)+b = 0+b = b$, und aus $a+x = a+y$ mit $y \in \mathbb{R}$ folgt $-a+(a+x) = -a+(a+y)$ und daraus $x=y$.

6. *Es ist* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Denn wir haben $x\cdot 0+0 = x\cdot 0 = x\cdot(0+0) \overset{(R3)}{=} x\cdot 0+x\cdot 0$ und damit $0 = x\cdot 0$ gemäß 5. Insbesondere gibt es kein $y \in \mathbb{R}$ mit $0\cdot y = 1$.

7. *Es ist* $(-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ *und* $(-\mathbf{a})\cdot(-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$.

Denn aus $0 = 0\cdot b = (a+(-a))\cdot b \overset{(R3)}{=} a\cdot b+(-a)\cdot b$ folgt die erste Gleichung und daraus mit *(R1)* und 4. auch die zweite.

8. *Es ist* $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \quad \forall\, a,b,c \in \mathbb{R}$

wegen $ac+[a\cdot(b+(-c))] = ac+ab-ac = ab$.

9. Sind $x,y,y' \in \mathbb{R}$ mit $xy = 1 = xy'$, so folgt $x,y,y' \neq 0$ gemäß 6) sowie $y' = y'\cdot 1 = y'\cdot(x\cdot y) \overset{(R2)}{=} (y'\cdot x)\cdot y = 1\cdot y = y$. Nach *(R6)* gibt es deshalb zu $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ stets *genau ein* $y \in \mathbb{R}$ mit $x\cdot y = 1$. Man notiert y als x^{-1} und nennt x^{-1} **das Inverse** von x. Wegen $x^{-1}\cdot x = 1$ ist

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{-1})^{-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*,$$

wobei $\mathbb{R}^*$ die *Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen* bezeichnet.

Sind $x,y \in \mathbb{R}^*$, so ist $(x\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot x^{-1}) \overset{(R2)}{=} ((xy)\cdot y^{-1})\cdot x^{-1} \overset{(R2)}{=} (x\cdot(yy^{-1}))\cdot x^{-1} = (x\cdot 1)\cdot x^{-1} = x\cdot x^{-1} = 1 \neq 0$, d.h. es gilt:

Sind $x,y \in \mathbb{R}^*$, so ist $x\cdot y \in \mathbb{R}^*$ mit

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^{-1} = \mathbf{y}^{-1}\cdot\mathbf{x}^{-1}.$$

Man setzt $z/x := \dfrac{z}{x} := z\cdot x^{-1}$ für $z \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^*$ und nennt z/x **den Quotienten** von z und x oder auch den **Bruch** mit z als **Zähler** und mit x als **Nenner**.

Es ist $x^{-1} = 1/x \;\forall x \in \mathbb{R}^*$.

Mit $+,-,\cdot,/$ haben wir nun die sogenannten **vier Grundrechnungsarten** *Addition, Subtraktion, Multiplikation* und *Division* vor Augen.

10. Zu $a \in \mathbb{R}^*$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a\cdot x = b$, nämlich $x = b/a = a^{-1}\cdot b$.

Tatsächlich ist $a\cdot(a^{-1}b) = b$, und aus $a\cdot x = a\cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$ folgt $a^{-1}\cdot a\cdot x = a^{-1}\cdot a\cdot y$ und damit $x=y$.

11. Für $a,c \in \mathbb{R}$ und $b,d \in \mathbb{R}^*$ gelten die Regeln

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; ad = bc$,

(ii) $\frac{a}{1} = a, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{b}{d}\right)^{-1} = \frac{d}{b},$

(iii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$

denn es gilt ($a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1} \Leftrightarrow bd \cdot ab^{-1} = bd \cdot cd^{-1} \Leftrightarrow ad = bc$) sowie $1^{-1} = 1,\ ab^{-1} \cdot cd^{-1} = ac \cdot (bd)^{-1},\ adb = bda,\ (b/d) \cdot (d/b) = 1,\ a \cdot b^{-1} + c \cdot b^{-1} = (a+c) \cdot b^{-1},\ a/b + c/d = ad/bd + bc/bd = (ad+bc)/bd.$

12. Wir sehen, daß die Regeln *(R1) – (R6)* eine ganze Reihe weiterer Konsequenzen haben, die sich allein durch logische Deduktion beweisen lassen, ohne weitere Voraussetzungen zu benutzen. Diese Art des Vorgehens ist typisch für Mathematik.

Die Frage, ob man aus *(R1) – (R6)* alles beweisen kann, was man über $\mathbb{R}$ weiß, ist allerdings zu verneinen. Wir werden nämlich abstrakte Rechenbereiche, sogenannte „Zahlenkörper" oder kurz „*Körper*" (im Sinne von „Körperschaft", *nicht* im Sinne von „räumliches Gebilde") kennenlernen, wo die Regeln *(R1) – (R6)* gelten, ohne daß es sich um reelle Zahlen handelt.

Was noch fehlt, um alle Eigenschaften der reellen Zahlen beweisen zu können, sind Aussagen über **Anordnung** und **Vollständigkeit**. Dabei bezieht sich der Begriff „Anordnung" auf die Kleiner–Gleich–Relation „$\leq$", während die „Vollständigkeit" sicherstellt, daß die Zahlengerade keine „Lücken" hat, wie wir sehen werden

C. Grundgesetze der Anordnung

Es gibt gewisse reelle Zahlen, die als „**positiv**" bezeichnet werden. Die Gesamtheit dieser positiven reellen Zahlen werde mit $\mathbb{R}_+^*$ bezeichnet. Es gelten die Regeln

(A1) Ist $a \in \mathbb{R}$, so ist entweder $a = 0$ oder $a \in \mathbb{R}_+^*$ oder $-a \in \mathbb{R}_+^*$.

(A2) Sind $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, so sind auch $a + b,\ a \cdot b \in \mathbb{R}_+^*$.

D. Weitere Anordnungsregeln

13. Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\begin{array}{llcl}
a < b & (\text{„}a \textit{ kleiner } b\text{"}) & , & \text{falls } \ b - a \in \mathbb{R}_+^*, \\
a \leq b & (\text{„}a \textit{ kleinergleich } b\text{"}) & , & \text{falls } \ a < b \text{ oder } a = b, \\
a > b & (\text{„}a \textit{ größer } b\text{"}) & , & \text{falls } \ b < a, \\
a \geq b & (\text{„}a \textit{ größergleich } b\text{"}) & , & \text{falls } \ b \leq a, \\
|a| & (\text{„}\textit{Betrag von } a\text{"}) & := & \begin{cases} a & , \text{ falls } \ 0 \leq a, \\ -a & , \text{ falls } \ a < 0. \end{cases}
\end{array}$$

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\quad a \in \mathbb{R}_+^* \ \Leftrightarrow \ 0 < a.$

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt **negativ**, falls $a < 0$ und damit $-a \in \mathbb{R}_+^*$ ist.

Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$, so bedeute $a < b < c$, daß $a < b$ und $b < c$ gilt. Entsprechend verfahren wir mit den Symbolen $=, \leq, >, \geq$ und analog auch für mehr als drei Zahlen.

14. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $a < b$*

Denn wegen (A1) haben wir entweder $0 < a - b$ oder $0 = a - b$ oder $0 < -(a - b) = b - a$.

15. *Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $b < c$, so ist $a < c$.*

Denn aus $0 < b - a$ und $0 < c - b$ folgt $0 < (b - a) + (c - b) = c - a$ gemäß (A2).

16. *Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist $a + c < b + c$.*

Denn aus $a < b$ folgt $0 < b - a = (b + c) - (a + c)$.

17. *Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $0 < c$, so ist $a \cdot c < b \cdot c$.*

Denn aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $0 < b - a$ und $0 < (b - a) \cdot c = bc - ac$ gemäß (A2).

18. *Sind $a, b, \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und ist $c < 0$, so ist $a \cdot c > b \cdot c$.*

Denn aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $0 < b - a$ und $0 < (b - a) \cdot (-c) = -bc + ac$ gemäß (A2).

19. *Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, so ist $x^2 := x \cdot x \in \mathbb{R}_+^*$. Insbesondere ist $1 = 1 \cdot 1 \in \mathbb{R}_+^*$.*

Denn mit (A2) folgt: Ist $0 < x$, so gilt $0 < x \cdot x$, und ist $0 < -x$, so gilt $0 < (-x) \cdot (-x) = x \cdot x$.

20. *Sind $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ mit $a < b$, so gilt $0 < b^{-1} < a^{-1}$.*

Denn wäre $b^{-1} \geq a^{-1}$, so ergäbe sich $a = b^{-1} \cdot ab \overset{17.}{\geq} a^{-1} \cdot ab = b$, und im Falle $b^{-1} \leq 0$ hätten wir $1 = b \cdot b^{-1} \overset{17.}{\leq} b \cdot 0 = 0$ im Widerspruch zu 19.

21. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a < b \;\Leftrightarrow\; -a > -b$.*

Denn es ist $0 < b - a = (-a) - (-b) \;\Leftrightarrow\; 0 < (-a) - (-b)$.

22. *Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c \leq d$, so ist $a + c < b + d$.*

Denn mit 16. folgt $a + c < b + c \leq b + d$.

23. *Sind $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ mit $a < x \leq b$ und $a < y \leq b$, so ist $|x - y| < |a - b|$.*

Denn mit 16. und 21. folgt $x - y \leq b - y < b - a$ sowie $y - x \leq b - x < b - a$.

24. *Sind $a, b \in \mathbb{R}^*$ mit $a < 0$, so ist $(a \cdot b > 0 \;\Leftrightarrow\; b < 0.)$*

Denn gemäß 18. führt $b > 0$ bzw. $b < 0$ auf $a \cdot b < a \cdot 0 = 0$ bzw. $a \cdot b > a \cdot 0 = 0$.

25. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq |a| = |-a|$ und $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$.*

Denn für $x, y \geq 0$ ist $|x| = x = -(-x) = |-x|$ und $|x| \cdot |y| = x \cdot y = |x \cdot y|$, also auch $|-x| \cdot |y| = x \cdot y = |(-x) \cdot y|$ und $|-x| \cdot |-y| = x \cdot y = |(-x) \cdot (-y)|$.

26. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$ sowie $|a + b| \leq |a| + |b|$.*

Denn definitionsgemäß ist $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$, also $a + b \overset{22.}{\leq} |a| + |b|$ und $-(a + b) = (-a) + (-b) \overset{22.}{\leq} |a| + |b|$.

27. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $||a| - |b|| \leq |a - b|$.*

Denn nach 26. ist $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$, also $|a| - |b| \leq |a - b|$ und damit auch $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$.

28. Wenn wir uns $\mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden vorstellen, so bedeutet $a < b$, daß a *links* von b liegt, und $|a - b|$ beschreibt den **Abstand** von a und b.

Wir setzen $2 := 1 + 1,\ 3 := 2 + 1,\ 4 := 3 + 1,\ 5 := 4 + 1,\ 6 := 5 + 1,\ 7 := 6 + 1,\ 8 := 7 + 1,\ 9 := 8 + 1,\ 10 := 9 + 1$ und lesen diese Symbole wie üblich. Gemäß 16. gilt dann

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10.$$

29. Für $a \in \mathbb{R}$ ist $2 \cdot a = (1+1) \cdot a = a + a$ und $(-1) \cdot a = -a$.

30. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gilt $2a = a + a < a + b < b + b = 2b$. Für $\mathbf{m} := \frac{1}{2}(a+b)$ impliziert dies

$$a < \mathbf{m} < b \quad \text{und} \quad |a - \mathbf{m}| = \tfrac{1}{2}|a - b| = |\mathbf{m} - b|.$$

Man nennt $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(a+b)$ die **Mitte** von a und b.

Wie wir sehen, gibt es zwischen je zwei reellen Zahlen immer noch eine weitere reelle Zahl, d.h. keine zwei reellen Zahlen sind „benachbart“.

E. Teilmengen von $\mathbb{R}$

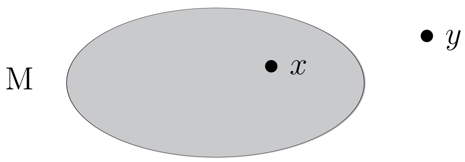
31. Ganz allgemein verstehen wir unter einer **Menge** eine *Zusammenfassung* von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung *zu einem Ganzen.* Dabei bedeutet „wohlbestimmt“, daß für jedes Objekt feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Unsere Sprache kennt Mengenbildungen. Z.B. redet man von einer Schafsherde, von einem Taubenschwarm, von einem Wolfsrudel, von einer Menschenmenge.

Die zu einer Menge zusammengefaßten Objekte werden **Elemente** der Menge genannt. Statt „*x ist Element der Menge M*“ schreiben wir „$x \in M$“ oder „$M \ni x$“ und sagen „*x (ist) aus M*“ „*M enthält x*“, oder ähnliches.

Statt „*y ist kein Element der Menge M*“ schreiben wir „$y \notin M$“ oder „$M \not\ni y$“ und sagen „*y (ist) nicht aus M*“, „*M enthält y nicht*“, oder ähnliches.

Wir veranschaulichen Mengen gern als Flächenstücke der Ebene und sprechen dann von einem „Mengendiagramm“:



$x \in M, \quad y \notin M.$

Eine Menge läßt sich angeben durch Aufzählen der Elemente (falls es nicht zu viele sind). So ist $\{2,3,5\}$ die Menge aus den Elementen $2,3,5$; es ist $5 \in \{2,3,5\}$ und $4 \notin \{2,3,5\}$. Man kann auch einelementige Mengen bilden, etwa $\{3\}$; allgemein geht man hierbei von $x \neq \{x\}$ aus (was x auch sein mag); jedoch ist $x \in \{x\}$.

Meistens wird eine Menge mit Hilfe einer definierenden Aussage in der Form $\{x|B(x)\}$ notiert, gelesen „*Menge aller Objekte x, für welche die Aussage $B(x)$ erfüllt ist*“ oder kurz „*Menge aller x mit $B(x)$*“. Ist $B(x)$ die Aussage: „x ist ein Mensch, der sich z.Zt. in diesem Hörsaal befindet“, so ist $\{x|B(x)\}$ die Menge der hier z.Zt. anwesenden Personen.

Wenn $B(x)$ entsprechend gewählt wird, kann es passieren, daß $\{x|B(x)\}$ **kein Element** hat; dann wird $\{x|B(x)\}$ als **leere Menge** bezeichnet, in Zeichen: $\{x|B(x)\} = \emptyset$.

Beispiel: Es ist $\{x|x \neq x\} = \emptyset$.

Wenn A, M Mengen sind und wenn jedes Element von A zugleich auch Element von M ist, dann wird A eine **Teilmenge von** M genannt, in Zeichen: $A \subseteq M$ oder $M \supseteq A$, auch gelesen: „*A ist enthalten in M*“ oder „*M enthält A*“.

Z.B. ist $\{2,3\} \subseteq \{2,3,5\}$ und $\{5\} \subseteq \{2,3,5\}$.

Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$.

Zwei Mengen L, M heißen **gleich**, in Zeichen: $L = M$, wenn $L \subseteq M$ *und* $M \subseteq L$ gilt. Aufgrund dieses Gleichheitsbegriffes gibt es nur *eine* leere Menge: $\emptyset$, und für beliebige Mengen L, M, N gilt:

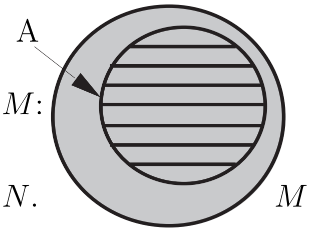
$\emptyset \subseteq M$.

$M = M$.

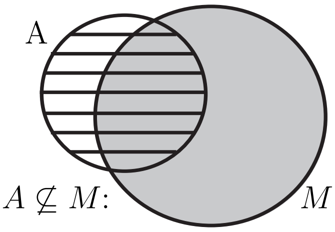
Aus $L = M$ folgt $M = L$.

Aus $L = M$ und $M = N$ folgt $L = N$.

$A \subseteq M$:



$A \not\subseteq M$:



Eine Menge M heißt **nichtleer**, wenn sie wenigstens ein Element enthält.

Wenn A, M Mengen sind, dann gilt: A ist genau dann **keine Teilmenge** von M, in Zeichen: $A \not\subseteq M$ oder $M \not\supseteq A$, wenn A wenigstens ein Element enthält, das nicht zu M gehört.

Sind A, M Mengen mit $A \subseteq M$ und $A \neq M$, so schreiben wir $A \subset M$ oder $M \supset A$ und nennen A eine **echte Teilmenge** von M.

Z.B. ist $\{1,2\} \not\subseteq \{2,3,5\}$ und $\{2,3\} \subset \{2,3,5\}$.

Aus einer gegebenen Menge M wird eine Teilmenge oft durch Angabe einer einschränkenden Aussage festgelegt. So ist $\{x \in M | B(x)\}$ die Menge aller derjenigen Elemente von M, die die Bedingung $B(x)$ erfüllen, gelesen auch als „*Menge aller x aus M mit $B(x)$*“.

Z.B. ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ die Menge $\mathbb{R}^*$, und $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist die Menge $\mathbb{R}^*_+$.

32. Wir setzen fest: Es sei

$$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}^*_- := \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}.$$

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so heißt

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall,*

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *(nach rechts) halboffenes Intervall,*

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *(nach links) halboffenes Intervall,*

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *offenes Intervall,*

jeweils mit den *Randpunkten* a, b und der *Länge* $b - a$. Wir setzen außerdem

$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$,

$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$,

$]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

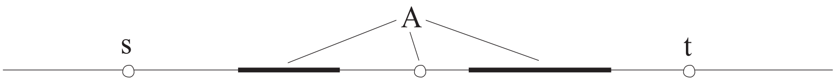
für $a \in \mathbb{R}$ und bezeichnen diese Mengen als *uneigentliche Intervalle.* Hierbei wird das Symbol „∞“ als „*Unendlich*“ gelesen.

Eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$ kann aus Einzelpunkten und vielen Intervallen bestehen, d.h. ein einzelnes Intervall von $\mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von einem sehr speziellen Typ.

F. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

33. Sind A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$, so bedeute $A < B$, daß *jedes* Element von A kleiner ist als *jedes* Element von B. Auf dem Zahlenstrahl bedeutet dies, daß A links von B liegt und daß die Elemente von A und B sich nicht „durchmischen".

Ist A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und ist $t \in \mathbb{R}$, so bedeute $A \leq t$, daß $x \leq t$ für *jedes* $x \in A$ ist, und $s \leq A$, daß $s \leq x$ für *jedes* $x \in A$ gilt.



Zu vorgegebenem A existieren solche Zahlen s, t nicht unbedingt. Denn gäbe es zu $\mathbb{R}_+$ ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}_+ \leq t$, so wäre $1 \leq t$, also $t \in \mathbb{R}_+$ und damit $t + 1 \in \mathbb{R}_+$. Dann müßte $t + 1 \leq t$ sein, was offenbar falsch ist. Da die Annahme $R_+ \leq t$ zu einer falschen Aussage führt, kann sie nicht gültig sein. Ebenso findet man zu $\mathbb{R}_-$ kein $s \in \mathbb{R}$ mit $s \leq \mathbb{R}_-$.

Wenn es zu einer nichtleeren Teilmenge A von $\mathbb{R}$ eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit $A \leq t$ gibt, dann sagt man, A **ist nach oben beschränkt**, und nennt t eine **obere Schranke von** A. Ebenso sagt man, A **ist nach unten beschränkt**, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $s \leq A$ gibt, und dann heißt s eine **untere Schranke von** A.

Ist z.B. $A = [3, 5]$, so sind $5, 6, 7$ obere Schranken von A, und $1, 2$ sind untere Schranken von A. Natürlich kann man noch viel mehr Schranken angeben, denn offenbar ist $[5, \infty[$ bzw. $]-\infty, 3]$ die Menge aller oberen bzw. unteren Schranken von A.

34. Die *Vollständigkeit von* $\mathbb{R}$ besteht in der Gültigkeit der Aussage

(V) Sind A, B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $A < B$, so gibt es eine „Trennzahl" $t \in \mathbb{R}$ mit $A \leq t$ und $t \leq B$.

Einfache Beispiele: Für $A := [1, 2]$ und $B := [4, 5]$ kann man $t := 3$ wählen. Für $A := [1, 2]$ und $B :=]2, 3]$ ist nur $t := 2$ möglich, und für $A := \mathbb{R}_-^*$ und $B = \mathbb{R}_+^*$ ist nur $t := 0$ möglich.

G. Konsequenzen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

35. **Satz**. *Ist A eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so hat A eine* **kleinste obere Schranke**. *Diese wird das* **Supremum von** A *genannt und mit* $\sup A$ *bezeichnet.*

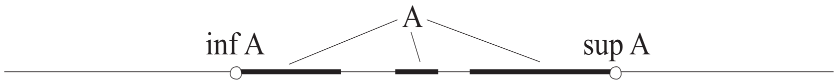
Beweis: 1) Wenn es ein $t_1 \in A$ gibt mit $A \leq t_1$, dann ist $t_1 \leq t_2$ für jede obere Schranke t_2 von A wegen $t_1 \in A$. Also ist t_1 die kleinste obere Schranke von A.

2) Es sei B die Menge aller oberen Schranken von A, und es gelte $A < B$. Wegen (V) gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $A \leq t$ und $t \leq B$, und wegen $A \leq t$ ist $t \in B$. Wegen $t \leq B$ ist t dann die kleinste obere Schranke von A. $\square$

36. **Satz**. *Ist A eine nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so hat A eine* **größte untere Schranke**. *Diese wird das* **Infimum von** A *genannt und mit* $\inf A$ *bezeichnet.* Der *Beweis* verläuft analog zum Beweis von 35.

37. Ist A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und existiert $\sup A$, so wird $\sup A$ im Falle $\sup A \in A$ auch das **Maximum** oder das **größte Element** von A genannt, und man schreibt auch $\max A$ statt $\sup A$.

Ebenso wird $\inf A$, falls vorhanden, im Falle $\inf A \in A$ das **Minimum** oder das **kleinste Element** von A genannt, und man schreibt dann auch $\min A$ statt $\inf A$.



Beispiele: $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$, $\sup \mathbb{R}_-^* = 0$, $\sup\,]2,3] = \max\,]2,3] = 3$, $\inf\,]2,3] = 2$,
$\min\,]2,3]$ existiert nicht, $\min\, [2,3[= 2$, $\max\ R_- = 0$, $\inf\,]a,\infty[= a$.

38. **Satz**. *M sei eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ derart, daß für $x, y \in M$ mit $x > y$ stets $x - y \geq 1$ ist. Dann gilt:*
a) Hat M eine obere Schranke in $\mathbb{R}$, so hat jede nichtleere Teilmenge von M ein größtes Element.
b) Hat M eine untere Schranke in $\mathbb{R}$, so hat jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes Element.

Beweis: Es sei $A \subseteq M$ mit $A \neq \emptyset$, und M habe eine obere Schranke in $\mathbb{R}$. Dann hat auch A eine obere Schranke in $\mathbb{R}$, und nach 35. existiert $t := \sup A$. Es gibt ein $u \in A$ mit $t - 1 < u$, denn sonst wäre $A \leq t - 1$ und damit $t \neq \sup A$. Für jedes $v \in A$ gilt $v \leq t$ und damit auch $v \leq u$, denn sonst wäre $t - 1 < u < v \leq t$ und damit $v - u < 1$ gemäß 23. im Widerspruch zur Definition von M. Dies bedeutet nun $t = u \in A$. Damit ist a) gezeigt, und b) ergibt sich analog. □

2. Natürliche Zahlen

Im Bereich der reellen Zahlen sollen jetzt die natürlichen Zahlen mit ihren grundlegenden Eigenschaften bestimmt werden.

A. Zählabschnitte

1. Eine nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt *Zählabschnitt*, wenn gilt:

(Z1) M hat ein kleinstes und ein größtes Element. Es ist $\min M = 1$.

(Z2) Sind $x, y \in M$ mit $x > y$, so ist $x - y \in M$.

Man verifiziert sofort, daß $\hat{1} := \{1\}$, $\hat{2} := \{1,2\}$, $\hat{3} := \{1,2,3\}$, $\hat{4} := \{1,2,3,4\}$,..., $\hat{9} := \{1,2,\ldots,9\}$ Beispiele für Zählabschnitte sind. Als Konsequenz aus (Z2) und 1.38. notieren wir außerdem:

Jede nichtleere Teilmenge eines Zählabschnitts hat ein kleinstes und ein größtes Element.

2. Ist M ein Zählabschnitt mit $n = \max M$, so gilt:
(i) Ist $x \in M$, so ist $(n+1) - x \in M$.
(ii) Ist $x \in M$ mit $x < n$, so ist $x + 1 \in M$.

Beweis: (i): Es ist $(n+1) - 1 \in M$. Ist $x \in M$ mit $x > 1$, so ist $x - 1 \overset{(Z2)}{\in} M$ und $n \geq x > x - 1$, also $(n+1) - x = n - (x-1) \in M$ gemäß $(Z2)$.

(ii): Wegen $x < n$ ist $n - x \overset{(Z2)}{\in}$ M, also $x + 1 = (n+1) - (n-x) \overset{(i)}{\in} M$. $\square$

3. Ist M ein Zählabschnitt mit $n = \max M$ und wird M^+ aus M durch Hinzunahme der Zahl $n+1$ gebildet, so ist M^+ ein Zählabschnitt mit $M \subseteq M^+$ und mit $n+1 = \max M^+$. Demnach gibt es zu jedem Zählabschnitt einen weiteren Zählabschnitt.

Beweis: Für $x \in M$ ist $1 \leq x \leq n < n+1$, d.h. es ist $1 = \min M^+$ und $n+1 = \max M^+$. Wegen 2.(i) und (Z2) gilt außerdem $x - y \in M^+$ für $x, y \in M^+$ mit $x > y$. $\square$

4. Sind L, M Zählabschnitte mit $\max L \leq \max M$, *so ist $L \subseteq M$.*

Beweis: Es sei $R := \{x \in L | x \notin M\}$. Wäre $R \neq \emptyset$, so hätte R als Teilmenge von L ein kleinstes Element r. Wegen $1 \notin R$ wäre $1 < r$, also $r - 1 \in L$ und $r - 1 \in M$ (denn im Falle $r - 1 \notin M$ wäre r in R nicht minimal). Mit $r - 1 < \max L \leq \max M$ und 2.(ii) ergäbe sich nun $r = (r-1) + 1 \in M$ im Widerspruch zu $r \in R$. Demnach ist $R = \emptyset$ und damit $L \subseteq M$. $\square$

5. Sind L, M Zählabschnitte mit $\max L = \max M$, *so ist $L = M$.*

Denn mit 4. folgt $L \subseteq M$ und $M \subseteq L$.

Demnach ist jeder Zählabschnitt durch sein Maximum festgelegt.

B. Grundeigenschaften natürlicher Zahlen

6. Eine reelle Zahl heißt **natürliche Zahl**, wenn sie wenigstens einem Zählabschnitt angehört. Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

7. Es gilt $1 \in \mathbb{N}$ und $1 \leq x$ für jedes $x \in \mathbb{N}$.

Denn $\{1\}$ ist ein Zählabschnitt, und zu $x \in \mathbb{N}$ existiert ein Zählabschnitt M mit $1, x \in M$ und $1 \leq x$.

8. Ist $x \in \mathbb{N}$, so ist auch $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Denn zu x existiert ein Zählabschnitt M mit $x \in M$, und dann ist $x + 1 \in M^+$ wegen 2(ii) und 3., also $x + 1 \in \mathbb{N}$ gemäß 3. .

9. Sind $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x > y$, so ist $x - y \in \mathbb{N}$.

Denn es gibt Zählabschnitte L, M mit $x \in L$ und $y \in M$, und nach 4. gilt $L \subseteq M$ oder $M \subseteq L$, also $x, y \in M$ oder $x, y \in L$. Mit (Z2) führt dies auf die Behauptung.

10. **Minimumprinzip**. *Es ist* $1 = \min \mathbb{N}$. *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.*

Dies folgt aus 7., 9. und 1.38.b).

11. **Maximumprinzip**. *Ist $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \neq \emptyset$ und existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $A \leq t$, so hat A ein größtes Element.*

Dies folgt aus 9. und 1.38.a). Da $\mathbb{N}$ nach 8. kein größtes Element hat, führt 11. auf

12. **Prinzip des Archimedes**. $\mathbb{N}$ *besitzt keine obere Schranke in* $\mathbb{R}$.

13. Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $\widehat{m} := \{x \in \mathbb{N} | x \leq m\}$ ein Zählabschnitt. Ist M ein Zählabschnitt mit $\max M = m$, *so ist $M = \widehat{m}$.*

Denn nach 7. und 9. ist $\widehat{m}$ ein Zählabschnitt mit $\max \widehat{m} = m$, und mit 5. ergibt sich dann

$M = \widehat{m}$.

14. Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $\{x \in \mathbb{N} \mid m < x < m+1\} = \emptyset$.

Denn gäbe es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $m < x < u$ für $u := m+1$, so hätten wir $u - x < 1$ gemäß 1.23 entgegen 9.

15. Es sei $m \in \mathbb{N}$. Wegen 8. und 14. wird $m+1$ **der direkte Nachfolger von** m **in** $\mathbb{N}$ genannt, und im Falle $1 < m$ heißt $m-1$ gemäß 9. und 14. **der direkte Vorgänger von** m **in** $\mathbb{N}$.

16. **Prinzip der vollständigen Induktion.**

Gegeben sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $\boxed{\textit{(IA)}\ \ 1 \in M}$ *und* $\boxed{\textit{(IS)}\ \ \textit{Ist } x \in M, \textit{ so ist auch } x+1 \in M.}$
Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis: Wäre $R := \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin M\} \neq \emptyset$, so hätte R nach 10. ein kleinstes Element r, und wegen (IA) wäre $1 < r$. Dann wäre $r - 1 \in \mathbb{N}$ mit $r - 1 \notin R$, also mit $r - 1 \in M$, und mit (IS) ergäbe sich $r = (r-1) + 1 \in M$. Da die Annahme $R \neq \emptyset$ zu einem Widerspruch führt, ist $R = \emptyset$, also $M = \mathbb{N}$. $\square$

17. **Erläuterungen zum Induktionsprinzip.**

Es handelt sich hier um ein sehr wirkungsvolles Beweisinstrument der Mathematik.

Die Aussage (IA) wird **Induktionsanfang** genannt, und (IS) wird als **Induktionsschluß** bezeichnet.

Über die Teilmenge M von $\mathbb{N}$ weiß man zunächst möglicherweise nur sehr wenig. Wenn es aber gelingt, die Gültigkeit von (IA) und von (IS) nachzuweisen, hat man sofort $M = \mathbb{N}$.

In der Regel ist (IA) leicht einzusehen, während der Beweis von (IS) oftmals Mühe bereitet.

Deshalb zerlegt man (IS) in die drei Teile

(IV) **Induktionsvoraussetzung** : $x \in M$,

(IB) **Induktionsbehauptung** : $x + 1 \in M$,

(DB) **Durchführung des Beweises** von (IB) mit Hilfe von (IV).

Der Induktionsschluß (IS) besteht also aus der Aufgabe, unter Voraussetzung von (IV) durch eine geeignete Argumentationskette (DB) einen Beweis für (IB) zu erbringen.

C. Beispiele zum Induktionsprinzip

18. Es gilt $a + x \in \mathbb{N}$ für alle $a, x \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion:
Es sei $a \in \mathbb{N}$ fest gewählt, und es sei $M := \{x \in \mathbb{N} \mid a+x \in \mathbb{N}\}$, d.h. M sei die Menge aller derjenigen Zahlen $x \in \mathbb{N}$, für die $a + x$ tatsächlich in $\mathbb{N}$ liegt. Wenn wir zeigen können, daß $M = \mathbb{N}$ ist, ist 18. bewiesen:
(IA) ist gültig, und zwar wegen 8.
(IV): Es sei $x \in M$, d.h. es gelte $a + x \in \mathbb{N}$.
(IB): Es ist $x + 1 \in M$, also $a + (x+1) \in \mathbb{N}$.
(DB): Wegen (R2), (IV) und 8. ist $a + (x+1) = (a+x) + 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

19. Es gilt $a \cdot x \in \mathbb{N}$ für alle $a, x \in \mathbb{N}$.

Beweis durch Induktion.
Es sei $a \in \mathbb{N}$ fest gewählt, und es sei $M := \{x \in \mathbb{N} \mid a \cdot x \in \mathbb{N}\}$.
(IA): Wegen $a \cdot 1 = a \in \mathbb{N}$ ist $1 \in M$.
(IV): Es sei $x \in M$, also $a \cdot x \in \mathbb{N}$.
(IB): Wir behaupten $x + 1 \in M$, also $a \cdot (x + 1) \in \mathbb{N}$.
(DB): Wegen (R3), (IV) und 18. ist $a \cdot (x + 1) = a \cdot x + a \in \mathbb{N}$. □

20. **Rekursives Definieren**. Wir betrachten die Aufgabe, jeder natürlichen Zahl n ein bestimmtes Element $f(n)$ einer Menge X zuzuordnen. Im Hinblick auf das Induktionsprinzip gilt die Definition von $f(n)$ als mathematisch einwandfrei, wenn folgendes „*rekursiv*" festgelegt wird:

(RD1) $f(1)$ wird vorgegeben.

(RD2) Es gibt eine Vorschrift, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig eine Bestimmung von $f(n+1)$ aus den Objekten $f(1), f(2), \dots, f(n)$ gestattet.

Beispiel 1: Ist $x \in \mathbb{R}$, so sei die **n–te Potenz $\mathbf{x^n}$** für $n \in \mathbb{N}$ erklärt gemäß

$$(RD1) \quad x^1 := x, \quad (RD2) \quad x^{n+1} := x^n \cdot x.$$

Es ist dann $x^1 = x,\ x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x \cdot x \cdot x$, usw. Ergänzend definiert man $\mathbf{x^0 := 1}$.

Bei dem Ausdruck x^n wird x auch als „*Basis*" und n als „*Exponent*" bezeichnet. Es ist $0^1 = 0$ und $1^1 = 1$, und aus $0^n = 0$ bzw. $1^n = 1$ folgt $0^{n+1} = 0$ bzw. $1^{n+1} = 1$. Mithin gilt $0^n = 0$ und $1^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2: Für $n \in \mathbb{N}$ sei **n!**, gelesen „**n Fakultät**", definiert durch

$$\text{(RD1)} \quad 1! := 1, \quad \text{(RD2)} \quad (n+1)! := (n!) \cdot (n+1).$$

Es ist dann $1! = 1,\ 2! = 1 \cdot 2 = 2,\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, usw.. Ergänzend definiert man $\mathbf{0! := 1}$.

Beispiel 3: Wenn jedem $k \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl x_k zugeordnet ist, dann kann man die **Summe** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + ... + x_n$ definieren durch

$$\text{(RD1)} \ \sum_{k=1}^1 x_k := x_1, \quad \text{(RD2)} \ \sum_{k=1}^{n+1} x_k := \Big(\sum_{k=1}^n x_k\Big) + x_{n+1},$$

und ebenso kann man das **Produkt** $\prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ festlegen durch

$$\text{(RD1)} \ \prod_{k=1}^1 x_k := x_1, \quad \text{(RD2)} \ \prod_{k=1}^{n+1} x_k := \Big(\prod_{k=1}^n x_k\Big) \cdot x_{n+1}.$$

Wenn x_0 bekannt ist, kann man diese Definitionen ergänzen durch

$$\sum_{k=0}^n x_k := x_0 + \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{und} \quad \prod_{k=0}^n x_k := x_0 \cdot \prod_{k=1}^n x_k.$$

Man liest $\sum_{k=1}^n x_k$ als „*Summe der x_k für $k = 1$ bis n*". Hierbei wird k der „*laufende Index*" genannt; dieser darf — überall gleichzeitig — durch einen neuen Buchstaben ersetzt werden: $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{\nu=1}^n x_\nu$. Analog verfährt man mit Produkten.

21. Die **Bernoullische Ungleichung**. Es gilt

$$1 + n \cdot x \le (1 + x)^n \qquad \forall\, x \in [-1, \infty[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch Induktion:
Bei festem $x \in [-1, \infty[$ sei M die Menge der natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichung

gültig ist. (IA): Wegen $1+x \le 1+x$ ist $1 \in M$.
(IV): Es gelte $1+n\cdot x \le (1+x)^n$.
(IB): Es ist $1+(n+1)\cdot x \le (1+x)^{n+1}$.
(DB): Wegen $1+x \ge 0$ und $n\cdot x^2 \ge 0$ ist $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{(IV)}{\ge}$
$\ge (1+n\cdot x)\cdot(1+x) = 1+x+n\cdot x+n\cdot x^2 \ge 1+(n+1)\cdot x$. □

22. Es ist $\sum_{k=1}^n k = 1+2+...+n = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.
Beweis durch Induktion:
M sei die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die die Gleichung gilt.
(IA): Es ist $1 \in M$ wegen $1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$.
(IV): Es sei $1+2+...+n = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$.
(IB): Es ist $1+2+...+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)\cdot(n+2)$.
(DB): Es ist $1+2+...+(n+1) = (1+2+...+n)+(n+1) =$
$\overset{(IV)}{=} \frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) \overset{(R3)}{=} \left(\frac{1}{2}n+1\right)(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. □

23. **Die geometrische Summenformel**. Es ist

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1+x+x^2+...+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{mit } x \neq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis durch Induktion:
Bei festem $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ sei M die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die die Gleichung gültig ist.
(IA): Es ist $1 \in M$ wegen $(1+x)\cdot(x-1) = x^2-1$.
(IV): Es sei $(1+x+x^2+...+x^n)\cdot(x-1) = x^{n+1}-1$.
(IB): Es ist $(1+x+x^2+...+x^{n+1})\cdot(x-1) = x^{n+2}-1$.
(DB): Es ist $[(1+x+x^2+...+x^n)+x^{n+1}]\cdot(x-1) =$
$\overset{(IV)}{=} (x^{n+1}-1)+x^{n+1}\cdot(x-1) = x^{n+1}-1+x^{n+2}-x^{n+1} = x^{n+2}-1$. □

24. **Monotoniesatz**. Es gilt $0 \le x < y \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^n < y^n \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beweis. 1) Aus $0 \le x < y$ folgt $0 \le x^n < y^n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Denn es ist $0 \le x^1 < y^1$, und aus $0 \le x^n < y^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich $0 \le x^{n+1} = x^n\cdot x \le x^n\cdot y < y^n\cdot y = y^{n+1}$ (dies ist ein *Induktionsbeweis in Kurzfassung*).
2) Sind $x,y \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n < y^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $x < y$. Denn wäre $x = y$, so wäre $x^n = y^n$, und wäre $y < x$, so wäre $y^n < x^n$ gemäß 1). □

D. Wurzelziehen

Zunächst zeigen wir

25. Für $u \in \mathbb{R}_+$ und $v \in \mathbb{R}_+^*$ gilt $(u/v)^n = u^n/v^n$ sowie

$$u < v \;\Rightarrow\; v^n \le u^n + n\cdot v^{n-1}(v-u) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: 1) Es ist $\left(\frac{u}{v}\right)^1 = \frac{u^1}{v^1}$, und aus $\left(\frac{u}{v}\right)^n = \frac{u^n}{v^n}$ folgt $\left(\frac{u}{v}\right)^{n+1} = \left(\frac{u}{v}\right)^n \cdot \frac{u}{v} = \frac{u^n}{v^n}\cdot\frac{u}{v} = \frac{u^{n+1}}{v^{n+1}}$.
2) Es sei $u < v$. Für $x := \frac{u}{v}-1$ gilt $1+x = \frac{u}{v} \in \mathbb{R}_+$, also $x \in [-1,\infty[$, und mit 21. folgt $1+n\left(\frac{u}{v}-1\right) \le \frac{u^n}{v^n}$. Durch Multiplikation mit v^n ergibt sich $v^n + n\cdot v^{n-1}\cdot(u-v) \le u^n$. □

Unter Verwendung von 25. erhalten wir

26. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $a \in]1,\infty[$, so gibt es ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r^n = a$.

Beweis: Wir gehen von $n \geq 2$ aus, denn es ist $a^1 = a$, und wir betrachten die Menge $M := \{x \in \mathbb{R}_+^* | x^n \leq a\}$.
Wegen $1 \in M$ ist $M \neq \emptyset$, und wegen $(1 < a \overset{24.}{\Rightarrow} 1 = 1^{n-1} < a^{n-1} \Rightarrow a < a^n)$ ist $x^n < a^n \ \forall\, x \in M$, also $x < a \ \forall\, x \in M$ gemäß 24. Nach 1.35 existiert $r := \sup M$, und wir können die Zahl $\varepsilon := \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{|a-r^n|}{2n(r+1)^{n-1}}\right\}$ betrachten. Offenbar ist $1 \leq r$ und $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

1) Angenommen, es ist $r^n < a$ und damit $\varepsilon > 0$. . Dann folgt
$(r+\varepsilon)^n \overset{25.}{\leq} r^n + n \cdot (r+\varepsilon)^{n-1} \cdot \varepsilon \leq r^n + n \cdot (r+1)^{n-1} \cdot \varepsilon \leq r^n + \frac{1}{2}(a - r^n) = \frac{1}{2}(a + r^n) \overset{1.30}{<} a$, also $r + \varepsilon \in M$ im Widerspruch zu $r = \sup M$.

2) Angenommen, es ist $a < r^n$ und damit $\varepsilon > 0$. Dann ist $\frac{1}{2} \leq r - \frac{1}{2} \leq r - \varepsilon$ und
$(r-\varepsilon)^n \overset{25.}{\geq} r^n - n \cdot r^{n-1} \cdot (r - (r-\varepsilon)) \geq r^n - n \cdot (r+1)^{n-1} \cdot \varepsilon \geq r^n - \frac{1}{2}(r^n - a) = \frac{1}{2}(r^n + a) \overset{1.30}{>} a$.
Für $x \in [r - \varepsilon, \infty[$ ergäbe sich nun $x^n \overset{24.}{\geq} (r-\varepsilon)^n > a$, also $x \notin M$, und damit hätten wir den Widerspruch $\sup M \leq r - \varepsilon$.

3) Aus 1) und 2) folgt $r^n = a$. $\square$

27. **Satz**. *Ist $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r^n = a$. Wir nennen r die* **n–te Wurzel aus a** *und notieren r in der Form $a^{1/n}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$, im Falle $n = 2$ auch als $\sqrt{a}$.*

Beweis: 1) Nach 24. gibt es höchstens ein $r \in \mathbb{R}_+$ mit $r^n = a$.

2) Im Falle $a > 1$ folgt die Behauptung aus 26.

3) Es ist $1^n = 1$ und $0^n = 0$.

4) Ist $a \in]0, 1[$, so ist $1/a \in]1, \infty[$, und nach 26. gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+$ mit $s^n = 1/a$. Für $r := 1/s$ folgt $r^n = a$. $\square$

28. *Hinweis.* Für $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$ eindeutig definiert und nichtnegativ. Z.B. ist $\sqrt{4} = 2$ und $-\sqrt{4} = -2$ und $\sqrt{4} \neq -2$. Zugleich ist aber $(\sqrt{4})^2 = 4$ und $(-\sqrt{4})^2 = 4$.

29. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\ (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2.$

Der *Beweis* folgt durch Verifizieren.

30. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow\ (a = 0$ oder $b = 0)$.

Beweis: 1.6., 1.9. $\square$

31. Sind $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p^2 \geq 4q$, so sind

$$x_1 := \frac{1}{2}\Big(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\Big), \quad x_2 := \frac{1}{2}\Big(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\Big)$$

die Lösungen der **quadratischen Gleichung** $x^2 + px + q = 0$. Hierbei gelten die Regeln

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Beweis: Wegen $p^2 - 4q \in \mathbb{R}_+$ ist $\sqrt{p^2 - 4q}$ definiert, und für x_1, x_2 gilt dann $x_1 + x_2 = {}$ $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot (-p) = -p$ sowie $x_1 \cdot x_2 \overset{29.}{=} \frac{1}{4}\Big((-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2\Big) = \frac{1}{4}(p^2 - (p^2 - 4q)) = q$.
Für $x \in \mathbb{R}$ folgt $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 x_2 = x^2 + px + q$, also $x^2 + px + q = {}$ $= 0 \ \Leftrightarrow\ (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \overset{30.}{\Leftrightarrow} x - x_1 = 0$ oder $x - x_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = x_1$ oder $x = x_2$. $\square$

E. Bemerkungen zum Ausführen von Beweisen

Im Beweis von 24. haben wir einen Induktionsbeweis in Kurzfassung notiert; für das Lösen von Aufgaben empfehlen wir allerdings, stets die schematische ausführlichere Fassung zu verwenden.

Im gleichen Beweis haben wir von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Behauptung durch den Beweis zweier Teilaussagen zu bestätigen. Wir analysieren, was hier im Einzelnen geschieht:

32. Unter einer **Aussage** verstehen wir eine Zusammenstellung von Zeichen, die eine (für uns) sinnvolle Behauptung darstellt und die entweden **wahr** (w) oder **falsch** (f), aber nicht beides zugleich ist. (Sprachlich wäre es korrekter, „unwahr“ statt „falsch“ zu sagen; wir halten uns jedoch an den Sprachgebrauch der Logiker.)

Beispiele:

a) Haltet den Dieb!	(keine Aussage)
b) Ist das Essen gut?	(keine Aussage)
c) $\Delta + \nabla = \square$.	(keine Aussage)
d) $2 \cdot 3 = 6$.	(Aussage: (w))
e) $2 \cdot 3 = 7$.	(Aussage: (f))
f) Zahlen sind Objekte unseres Denkens.	(Aussage: (w))
g) $1 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x = x^2\}$.	(Aussage: (w))

33. Die **Negation** einer Aussage A wird mit „non A“ oder „$\neg A$“ bezeichnet.

Die sog. *Wahrheitstafel*

A	$\neg A$
w	f
f	w

gibt Aufschluß darüber, was mit „$\neg$“ gemeint ist: Ist A wahr, so ist $\neg A$ falsch. Ist A falsch, so ist $\neg A$ wahr.

Beispiel: Ist A die Aussage „7 ist kleiner als 3“, so ist $\neg A$ die Aussage „7 ist *nicht* kleiner als 3“. Offenbar kann man $\neg A$ auch als „$7 \geq 3$“ notieren.

Es gilt das *Gesetz der doppelten Verneinung*: $\boxed{\neg(\neg A) = A}$.

34. Aus zwei Aussagen A, B lassen sich neue Aussagen entsprechend der folgenden Wahrheitstafel gewinnen:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \dot{\vee} B$
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

Diese ist zeilenweise zu lesen:

1. Zeile: Ist A wahr und B wahr, so ist $A \wedge B$ wahr, $A \vee B$ wahr, $A \dot{\vee} B$ falsch.

2. Zeile: Ist A wahr und B falsch, so ist $A \wedge B$ falsch, $A \vee B$ wahr, $A \dot{\vee} B$ wahr.

usw. . Hierbei liest man

$A \wedge B$ als „A **und** B“ (Konjunktion),

$A \vee B$ als „A **oder** B“ (Disjunktion, lat. :„**vel**“),

$A \dot\vee B$ als „**entweder** A **oder** B“ (Alternative).

Damit $A \wedge B$ bzw. $A \vee B$ bzw. $A \dot\vee B$ gebildet werden kann, braucht kein innerer Zusammenhang zwischen A und B zu bestehen. Z.B. gilt

„ $2 \cdot 2 = 4 \quad \wedge \quad$ In Hamburg gibt es viele Häuser.“

für Logiker als wahre Aussage.

Weitere Beispiele:

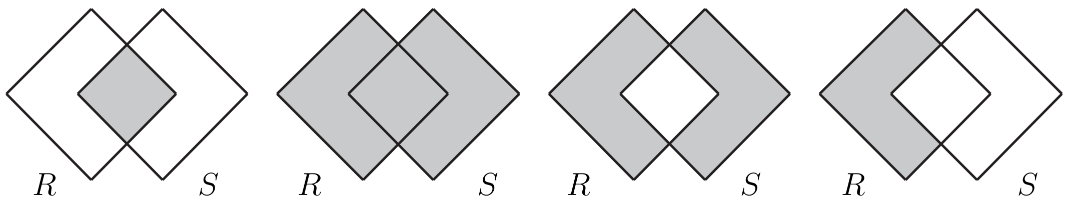
$$\begin{array}{rcll@{\qquad}rcll}
2+2=4 & \wedge & 5 \in \mathbb{N} & (w), & 2 \cdot 2 = 4 & \wedge & 1^2 = 2 & (f), \\
2<1 & \wedge & 1<3 & (f), & 1=2 & \wedge & 1=3 & (f), \\
2+2=4 & \vee & 5 \in \mathbb{N} & (w), & 2 \cdot 2 = 4 & \vee & 1^2 = 2 & (w), \\
2<1 & \vee & 1<3 & (w), & 1=2 & \vee & 1=3 & (f). \\
2+2=4 & \dot\vee & 5 \in \mathbb{N} & (f), & 2 \cdot 2 = 4 & \dot\vee & 1^2 = 2 & (w), \\
2<1 & \dot\vee & 1<3 & (w), & 1=2 & \dot\vee & 1=3 & (f).
\end{array}$$

Das Wort „oder“ gemäß „$\vee$“ wird im *einschließenden* Sinne des lat. „vel“ benutzt („A oder B oder beides“), also *nicht* im Sinne einer Alternative. Bei einer Alternative sagt man „*entweder – oder*“ und nimmt das Zeichen „$\dot\vee$“.

Man beachte, daß die Begriffe „und“, „oder“, „ entweder – oder“ hier genauer festgelegt sind als in der Umgangssprache.

35. Sind R, S Mengen, so setzt man

$$\begin{array}{rcll}
R \cap S & := & \{x \mid x \in R \wedge x \in S\} & : \textbf{Durchschnitt} \text{ von } R \text{ und } S \\
R \cup S & := & \{x \mid x \in R \vee x \in S\} & : \textbf{Vereinigung} \text{ von } R \text{ und } S \\
R \triangle S & := & \{x \mid x \in R \dot\vee x \in S\} & : \textbf{Boolesche Summe} \text{ von } R \text{ und } S \\
R \setminus S & := & \{x \in R \mid x \notin S\} & : \textbf{Differenz} \text{ von } R \text{ von } S
\end{array}$$



getönt: $R \cap S$ $\quad R \cup S$ $\quad R \triangle S$ $\quad R \setminus S$

Man beachte die *Analogie* zwischen $\wedge, \vee, \dot\vee$ einerseits und $\cap, \cup, \triangle$ andererseits. Hierbei stehen $\wedge, \vee, \dot\vee$ stets zwischen Aussagen, während $\cap, \cup, \triangle$ stets zwischen Mengen stehen.

36. Sind A, B Aussagen, so steht $\boxed{A \Rightarrow B}$ abkürzend für

„Falls A wahr ist, dann ist auch B wahr.“

Dies schließt ein: Wenn A *falsch* ist, dann kann B *wahr oder falsch* sein.

Kürzer, wenn auch weniger deutlich, darf man „$A \Rightarrow B$“ notieren als „*Aus A folgt B*“ oder „*Wenn A gilt, dann auch B*“ oder „*A impliziert B*“.

Jeder mathematische Lehrsatz enthält Aussagen der Form „$A \Rightarrow B$“.

Hierbei wird A als **Voraussetzung** (Vor.) und B als **Behauptung** (Beh.) bezeichnet.

Die Arbeit des Mathematikers besteht darin, eine logisch einwandfreie Argumentationskette anzugeben, die die Gültigkeit von B unter Voraussetzung der Gültigkeit von A sicherstellt.

Nach der **Transitivitätsregel** der Logik gilt:

Sind $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ wahre Aussagen, so ist auch $A \Rightarrow C$ eine wahre Aussage.

Die **Abtrennungsregel** der Logik besagt:

Ist A wahr und gilt $A \Rightarrow B$, so ist auch B eine wahre Aussage.

Aufgrund dieser Regeln gewinnt der Mathematiker eine Fülle wahrer Aussagen.

37. Zwei Aussagen A, B heißen *logisch äquivalent*, in Zeichen: $\boxed{A \Leftrightarrow B}$, wenn beide zugleich wahr oder beide zugleich falsch sind. Dies bedeutet:

$\boxed{A \Leftrightarrow B}$ *ist genau dann gültig, wenn* $\boxed{A \Rightarrow B \text{ und } B \Rightarrow A}$ *gültig ist.*

Dieser Zusammenhang wurde im Beweis von 24. ausgenutzt.

Wie schon früher notiert, liest man „$A \Leftrightarrow B$“ als „*A gilt genau dann, wenn B gilt*“, „*A ist notwendig und hinreichend für B*“, „*A ist äquivalent zu B*“.

Statt $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$ schreibt man $\boxed{A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C}$. Um dies zu bestätigen, genügt es, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)$ nachzuweisen, was man als „*Ringschluß*“ $\boxed{A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A}$ notiert.

Entsprechend bestätigt man $\boxed{A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_r}$ durch $\boxed{A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_r \Rightarrow A_1}$ für $r \geq 4$.

38. **Indirekte Beweise**. Sind A, B Aussagen, so ist

$\boxed{A \Rightarrow B}$ *logisch äquivalent zu* $\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$,

d.h. wenn „$A \Rightarrow B$“ bewiesen werden soll, kann man stattdessen auch „$\neg B \Rightarrow \neg A$“ beweisen und nennt dies dann einen *indirekten Beweis* für „$A \Rightarrow B$“.

Beispiel: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x \in]0,3] \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow (x \notin \mathbb{R}_+^* \Rightarrow x \notin]0,3])$.
Verbal: „Jede Zahl aus $]0,3]$ ist positiv“ bedeutet: „Wenn eine Zahl nicht positiv ist, liegt sie nicht in $]0,3]$.“

Wir haben dieses oder ein ähnliches Prinzip bereits mehrfach in sog. **Widerspruchsbeweisen** verwendet (vgl. 1.20., 1.33., 1.38., 3., 14., 16., 23.).

Allgemein kann man den Beweis von „$A \Rightarrow B$“ ersetzen durch den Beweis einer der Aussagen
$(\neg B \Rightarrow \neg A)$,
$(A \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$,
$(A \wedge \neg B \Rightarrow B)$,
$(A \wedge \neg B \Rightarrow C \wedge \neg C)$.

Dies erkennt man durch Vergleich der Spalten der folgenden Wahrheitstafel, in der D für $A \wedge \neg B$ steht:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	D	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$D \Rightarrow \neg A$	$D \Rightarrow B$	$C \wedge \neg C$	$D \Rightarrow C \wedge \neg C$
w	w	w	f	f	f	w	w	w	f	w
f	w	w	f	w	f	w	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	f	w	f	w	f	f	f	f	f

3. Ganze und rationale Zahlen

A. Grundeigenschaften ganzer Zahlen

1. Wir setzen $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und bezeichnen $\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup (\{0\} \cup \mathbb{N})$ als die **Menge der ganzen Zahlen**. Offenbar sind

$$-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

Beispiele ganzer Zahlen.
Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ ist $0 \notin \mathbb{N} \cup -\mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt $x > 0$, also $-x < 0$, und mithin ist $-\mathbb{N} < 0$ und $(-\mathbb{N}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
Wir setzen $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \setminus \{0\} = (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}$, außerdem $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_{\geq r} := \mathbb{Z} \cap [r, \infty[$ für $r \in \mathbb{R}$.

2. *Es gilt*

$$x - y,\ x + y,\ x \cdot y \in \mathbb{Z} \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{Z},$$

d.h. in $\mathbb{Z}$ sind die drei Grundrechnungsarten $+, -, \cdot$ uneingeschränkt ausführbar.

Beweis: Für $u, v \in \mathbb{N}_0$ mit $u \geq v$ haben wir $-((-u) + (-v)) = u + v \overset{2.18}{\in} \mathbb{N}_0$ und $-((-u) + v) = u + (-v) \overset{2.9}{\in} \mathbb{N}_0$, also $(-u) + (-v), u + v, (-u) + v, u + (-v) \in \mathbb{Z}$. Folglich gilt $x + y \in \mathbb{Z}\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$, damit aber auch $x - y = x + (-y) \in \mathbb{Z}\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Weiter ist $u \cdot v \in \mathbb{N}_0\ \forall u, v \in \mathbb{N}$ gemäß 2.19., und mit 1.7. führt dies auf $x \cdot y \in \mathbb{Z}\ \forall x, y \in \mathbb{Z}$. □

3. *Die Menge $\mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{R}$ weder nach oben noch nach unten beschränkt.*
Ist A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$, so gilt:
a) Ist A in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so existiert $\max A$.
b) Ist A in $\mathbb{R}$ nach unten beschränkt, so existiert $\min A$.

Beweis: 1) Da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ gemäß 2.12. nicht nach oben beschränkt ist, ist $-\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ nicht nach unten beschränkt, und mithin gilt die erste Behauptung.
2) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x > y$, so ist $x - y \in \mathbb{N}$, also $x - y \geq 1$. Mit 1.38. führt dies auf a) und b). □

4. *Ist $m \in \mathbb{Z}$, so ist $\{x \in \mathbb{Z} \mid m < x < m + 1\} = \emptyset$. Deshalb heißt m* **der direkte Vorgänger** *von $m + 1$, und zugleich heißt $m + 1$* **der direkte Nachfolger** *von m.*

Beweis: Gäbe es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $m < x < m + 1$, so hätten wir $1 < x + (1 - m) < 2$ mit $x + (1 - m) \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu 2.7. □

Mit Hilfe von 3. erhalten wir

5. **Ergänzung zum Induktionsprinzip (1).** *Gegeben seien $M \subseteq \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit*
$\boxed{\textit{(IA}') \quad a \in M}$ *und* $\boxed{\textit{(IS}') \quad \textit{Ist } x \in M \textit{ mit } x \geq a, \textit{ so ist auch } x + 1 \in M}$.
Dann ist $\mathbb{Z}_{\geq a} \subseteq M$.

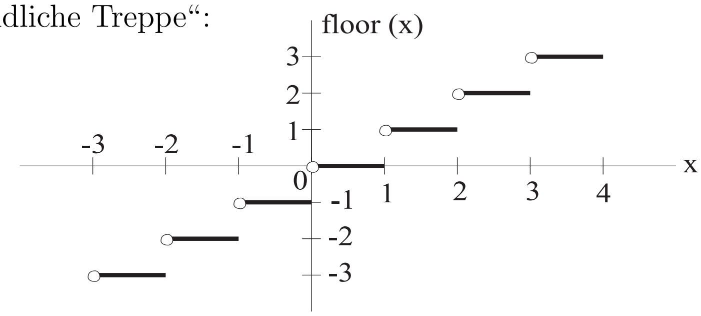
Der *Beweis* verläuft völlig analog zum Beweis von 2.16.

Gemäß 5. können wir die Induktion bei einer anderen „Anfangsmarke" als bei „1" beginnen, z.B. auch bei „0", was häufiger vorkommt.

Bei der folgenden Variante, die ebenfalls analog zu 2.16. bewiesen wird, schließen wir nicht allein vom direkten Vorgänger, sondern von *allen* Vorgängern auf die nächste Zahl (das kann bei bestimmten Beweisen erforderlich sein):

6. **Ergänzung zum Induktionsprinzip (2).** *Gegeben seinen $M \subseteq \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit* $\boxed{(IA')\ \ a{\in}M}$ *und* $\boxed{(IS'')\ \ \text{Ist } x{\in}M \text{ mit } x \geq a \text{ und ist } [a,x] \cap \mathbb{Z} \subseteq M, \text{ so ist } x{+}1 \in M}$.
Dann ist $\mathbb{Z}_{\geq a} \subseteq M$.

7. *Ist $r \in \mathbb{R}$, so gibt es genau eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq r < m+1$, nämlich* $m := \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq r\}$. Wir nennen m den **ganzzahligen Boden** von r, in Zeichen: $\boxed{m = \lfloor r \rfloor}$ oder $\boxed{m = \text{floor}(r)}$. Wenn man „floor" als reelle Funktion interpretiert, ist der Graph eine „unendliche Treppe":



8. **Satz über die Division mit Rest.** *Sind $a \in \mathbb{Z}^*$ und $b \in \mathbb{Z}$ vorgegeben, so gibt es genau ein $q \in \mathbb{Z}$ und genau ein $r \in \mathbb{Z}$ mit* $(*)$ $\boxed{b = q \cdot a + r}$ *und* $\boxed{0 \leq r < \mid a \mid}$.
Aus $(*)$ folgt $b/a = q + r/a$ mit $0 \leq \mid r/a \mid < 1$.
Man sagt: *b durch a ist q (mit dem) Rest r.*

Beweis: 1) Es sei $a > 0$. Für $q := \lfloor b/a \rfloor$ ist $q \leq b/a < q+1$, also $a \cdot q \leq b < a \cdot q + a$ und damit $0 \leq b - a \cdot q < a$. Für $r := b - a \cdot q$ folgt $b = a \cdot q + r \ \wedge\ 0 \leq r < a = \mid a \mid$. Gilt außerdem $b = a \cdot q' + r' \ \wedge\ 0 \leq r' < a$ für $q', r' \in \mathbb{Z}$, so ist $b/a = q' + r'/a$ mit $0 \leq r'/a < 1$, also $q' = \lfloor b/a \rfloor = q$ und damit $r' = b - a \cdot q = r$.
2) Es sei $a < 0$, also $-a > 0$. Nach 1) gibt es $p, r \in \mathbb{Z}$ mit $b = p \cdot (-a) + r \ \wedge\ 0 \leq r < \mid a \mid$, und dann ist $b = q \cdot a + r$ für $q := -p$. Gilt außerdem $b = q'' \cdot a + r'' \ \wedge\ 0 \leq r'' < \mid a \mid$ für $q'', r'' \in \mathbb{Z}$, so ist $b = (-q'') \cdot (-a) + r''$, also $r'' = r$ gemäß 1) und damit $q'' = q$. $\square$

9. *Bemerkungen.* Es ist 7 durch 3 gleich 2 Rest 1, nämlich $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Die schulische Notation „$7 : 3 = 2$ Rest 1" wird vermieden, weil das Gleichheitszeichen hier eine fragwürdige Rolle spielt (die in der Schule aus didaktischen Gründen gerechtfertigt sein kann).
Für negative Zahlen verfährt man so, daß Reste stets positiv sind:
(-7) durch 3 ist -3 Rest 2, denn $-7 = (-3) \cdot 3 + 2$.
Dieser (vielleicht überraschende) Umgang mit Resten ist eine Vereinbarung, die sich bewährt hat.
Mit Blick auf 2. ist nun deutlich, daß man in $\mathbb{Z}$ zwar uneingeschränkt *addieren, subtrahieren* und *multiplizieren* kann, daß aber das *Dividieren* nur mit Einschränkungen möglich ist.

B. Grundeigenschaften rationaler Zahlen

10. Wir bezeichnen $\mathbb{Q} := \{a/b \in \mathbb{R} \mid a{\in}\mathbb{Z} \ \wedge\ b{\in}\mathbb{Z}^*\}$ als die Menge der **rationalen Zahlen** und setzen $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_- := \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_-$, $\mathbb{Q}_+^* := \mathbb{Q}_+ \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q}_-^* := \mathbb{Q}_- \backslash \{0\}$.
Wegen $a/b \overset{1.11(i)}{=} (-a)/(-b)$ für $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}^*$ ist $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \ \wedge\ b \in \mathbb{N}\}$.
Beispiele für Elemente aus $\mathbb{Q}$ sind $\frac{6}{-3}, -\frac{9}{5}, -1, \frac{-8}{8}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{7}, 0, \frac{2}{7}, \frac{9}{10}, 1, \frac{-5}{-3}, \frac{10}{1}$, denn es ist

$a/1 = a \ \forall a \in \mathbb{Z}$. Offenbar gilt $\boxed{\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}}$.

In $\mathbb{Q}$ sind die vier Grundrechnungsarten ebenso wie in $\mathbb{R}$ *uneingeschränkt* (jedoch mit der Maßgabe, daß niemals durch 0 dividiert werden kann) ausführbar, denn es gilt

11. *Sind $x, y \in \mathbb{Q}$, so sind auch $x + y$, $x - y$, $x \cdot y \in \mathbb{Q}$. Sind $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}^*$, so ist auch $x/y \in \mathbb{Q}$.*

Beweis: Es seien $a, c \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b, d \in \mathbb{N}$. Dann ist $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \overset{1.11}{=} \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \overset{1.11}{=} \frac{ad-bc}{bd} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{1.11}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$, und im Falle $c \neq 0$ ist $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \overset{1.11}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \overset{1.11}{=} \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \in \mathbb{Q}$. □

12. *Sind $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r < s$, so gibt es ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $r < x < s$, d.h. zwischen je zwei reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl.*

Beweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{2}{s-r}$ und $m := \lfloor sn \rfloor \in \mathbb{Z}$. Dann ist $m \leq sn < m + 1$ und $sn - rn > 2$, also $rn < sn-2 < (m+1)-2 = m-1 < m \leq sn$ und damit $r < \frac{m-1}{n} < s$. □

C. Potenzregeln und binomischer Lehrsatz

13. Es sei $x \in \mathbb{R}^*$. Dann ist $x^1 = x \in \mathbb{R}^*$, und aus $x^n \in \mathbb{R}^*$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt $x^{n+1} = x^n \cdot x \in \mathbb{R}^*$. Folglich ist $x^n \in \mathbb{R}^* \ \forall n \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun $\boxed{x^{-n} := (x^n)^{-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $(x^{-n})^{-1} = x^n$ sowie $x^{-n} \cdot x = (x^{n-1} \cdot x)^{-1} \cdot x = x^{-n+1} \cdot x^{-1} \cdot x = x^{-n+1}$, und es folgt

14. *Sind $x, y \in \mathbb{R}^*$ und sind $r, s \in \mathbb{Z}$, so gilt* (i) $\boxed{x^r \cdot x^s = x^{r+s}}$, (ii) $\boxed{x^r / x^s = x^{r-s}}$, (iii) $\boxed{x^s \cdot y^s = (x \cdot y)^s}$, (iv) $\boxed{(x^r)^s = x^{r \cdot s}}$, (v) $\boxed{1^r = 1}$.

Beweis: 1) Es ist $x^r \cdot x^0 = x^r \cdot 1 = x^r = x^{r+0}$, und aus $x^r \cdot x^n = x^{r+n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt $x^r \cdot x^{n+1} = x^r \cdot x^n \cdot x = x^{r+n} \cdot x = x^{r+n+1}$. Demnach gilt (i) für $s \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $x^r \cdot x^{-n} = (x^{-r})^{-1} \cdot (x^n)^{-1} = (x^{-r} \cdot x^n)^{-1} = (x^{-r+n})^{-1} = x^{r+(-n)} \ \forall n \in \mathbb{N}$, und mithin gilt (i). Es folgt $x^s \cdot x^{r-s} = x^{s+r-s} = x^r$, also (ii).
2) Es ist $x^0 \cdot y^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (x \cdot y)^0$, und aus $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt $x^{n+1} \cdot y^{n+1} = x^n \cdot x \cdot y^n \cdot y = x^n \cdot y^n \cdot xy = (x \cdot y)^n \cdot (x \cdot y) = (x \cdot y)^{n+1}$. Demnach gilt (iii) für $s \in \mathbb{N}_0$. Damit ist $x^{-n} \cdot y^{-n} = (x^n)^{-1} \cdot (y^n)^{-1} = (x^n \cdot y^n)^{-1} = ((x \cdot y)^n)^{-1} = (x \cdot y)^{-n} \ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. (iii) ist gültig.
3) Es ist $(x^r)^0 = 1 = x^0 = x^{r \cdot 0}$, und aus $(x^r)^n = x^{r \cdot n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ folgt $(x^r)^{n+1} = (x^r)^n \cdot x^r = x^{r \cdot n} \cdot x^r \overset{(i)}{=} x^{r \cdot n + r} = x^{r \cdot (n+1)}$. Demnach gilt (iv) für $s \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(x^r)^{-n} = ((x^r)^n)^{-1} = (x^{r \cdot n})^{-1} = x^{-r \cdot n} = x^{r \cdot (-n)} \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, d.h. auch (iv) ist gültig, und insbesondere ist $1^r = (1^0)^r = 1^{0 \cdot r} = 1^0 = 1$. □

Weiter zeigen wir

15. *Es sei $a \in]1, \infty[$ fest vorgegeben. Dann gilt:*
   - *(i) Es ist $0 < a^z < a^{z+r} \ \forall z \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{N}$, also* $0 < ... < a^{-r} < ... < a^{-2} < a^{-1} < 1 < a < a^2 < a^3 < ... < a^r < ...$.
   - *(ii) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < a^n$.*
   - *(iii) $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ hat keine obere Schranke in $\mathbb{R}$.*
   - *(iv) Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < a^{-n} < \varepsilon$.*

Beweis: (i) Aus $[1<a^1$ und $(1<a^r \Rightarrow 1<a<a^r \cdot a = a^{r+1}$ für $r \in \mathbb{N})]$ folgt $1<a^r \ \forall r \in \mathbb{N}$, also auch $0<a^{-r}<1 \ \forall r \in \mathbb{N}$ und damit $a^z < a^z \cdot a^r = a^{z+r} \ \forall z \in \mathbb{Z}, \forall r \in \mathbb{N}$.
(ii) Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{a-1} < n$. Dann ist $x < n \cdot (a-1) < 1 + n \cdot (a-1) \overset{2.21}{\leq} (1+(a-1))^n = a^n$.

(iii) folgt direkt aus (ii).
(iv) Nach (ii) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon^{-1} < a^n$, also mit $0 < a^{-n} < \varepsilon$. $\square$

16. Im folgenden soll eine **Formel für** $\mathbf{(x+y)^n}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ entwickelt werden. Z.B. haben wir für

$$\begin{array}{lrcl} n=2: & (x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2, \\ n=3: & (x+y)^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3, \\ n=4: & (x+y)^4 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4. \end{array}$$

Wie geht es weiter? Nach welchem Gesetz berechnet man die „Koeffizienten“ $1, 2, 3, 4, 6, ...,$ und wie sind sie zu verteilen?

Man nennt $(x+y), (x+y)^2, \ldots, (x+y)^n, \ldots$ **Binome** ($bi \overset{lat.}{=} 2$), und deshalb spricht man von **Binomialkoeffizienten**. Trotz dieses abschreckenden Namens sind sie recht leicht zu berechnen:

In der n–ten Zeile, also bei der Entwicklung von $(x+y)^n$, ist an der k–ten Stelle für $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ die Zahl (∗) $\boxed{\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}}$, gelesen „**n über k**“,

einzusetzen, d.h. wir behaupten für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$:

Es gilt der **binomische Lehrsatz**

$$(\diamond) \quad \boxed{\begin{array}{l} (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k = \\ = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + ... + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n. \end{array}}$$

Um dies einzusehen, zeigen wir zuerst

(i) Es gilt $\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Nach 2.20 ist $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$ und $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$. $\square$

(ii) Es gilt $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ $\forall\, k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$.

Beweis: Es ist $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!}$. $\square$

Es gilt (△) $\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$ $\forall\, k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n$.

Beweis: Nach 2.20 ist $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =$

$$= \frac{n! \cdot k}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{n! \cdot [k+(n-k+1)]}{k! \cdot (n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \square$$

Wegen (i) und (△) läßt sich für $\binom{n}{k}$ fortlaufend, d.h. Zeile für Zeile, die folgende Tabelle erstellen, die auch **Pascalsches Dreieck** genannt wird:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	…	k
0	1	·	·	·	·	·		·
1	1	1	·	·	·	·		·
2	1	2	1	·	·	·		·
3	1	3	3	1	·	·		·
4	1	4	6	4	1	·		·
5	1	5	10	10	5	1		·
6	1	6	15	20	15	6	…	$\binom{6}{k}$
7	1	7	21	35	35	21	…	$\binom{7}{k}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	…	$\binom{n}{k}$

$$(\triangle)\quad \boxed{\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad \text{für } 1 \le k \le n}$$

Der erste und letzte Eintrag jeder Zeile ist 1, und jeder Eintrag $\neq 1$ ergibt sich als Summe der direkt und schräg links darüber stehenden Einträge.

Da durch dieses Vorgehen schließlich jedes Element $\binom{n}{k}$ erfaßt wird, haben wir

(iii) Es gilt $\boxed{\binom{n}{k} \in \mathbb{N}}$ $\quad \forall\, k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$.

Wir zeigen nun

(iv) *Die Aussage* ($\diamond$) *ist gültig.*

Beweis durch Induktion:

(IA): $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot x^0 \cdot y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{0-k} \cdot y^k$.

(IV): ($\diamond$) sei für ein $n \in N_0$ gültig.

(IB): Es gilt $(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \cdot y^k$.

(DB): $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y \overset{(IV)}{=}$

$$\binom{n}{0} x^{n+1}y^0 + \binom{n}{1} x^n y^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n} x y^n$$

$$+ \binom{n}{0} x^n y^1 + \ldots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-1} + \binom{n}{n-1} x y^n + \binom{n}{n} x^0 y^{n+1} \overset{(\triangle)}{=}$$

$$\binom{n+1}{0} x^{n+1}y^0 + \binom{n+1}{1} x^n y^1 + \ldots + \binom{n+1}{n-1} x^2 y^{n-1} + \binom{n+1}{n} x y^n + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} \cdot y^k. \quad \square$$

Bemerkung. Bei dieser Rechnung haben wir das Distributivgesetz für $n+1$ Summanden benutzt — vgl. d. Übungen —, ferner auch die Möglichkeit, Summanden in einer Summe zu vertauschen, was ebenfalls durch Induktion beweisbar ist.

Indem wir ($\diamond$) für $x = y = 1$ betrachten, erhalten wir

(v) *Es gilt* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \overset{!}{=} 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Es sei noch angemerkt, daß $(*)$ auch als

(vi) $\binom{n}{k} = \frac{n!/(n-k)!}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot k}$

geschrieben werden kann, wobei im Zähler **und** im Nenner genau k Faktoren stehen, im Zähler absteigend ab n, d.h. gemäß (vi) gilt z.B.

(vii) $\binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2},\quad \binom{n}{3} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\quad \binom{n}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$.

D. Zifferndarstellungen für Zahlen

17. Im folgenden beziehen wir uns auf eine feste natürliche Zahl $g \geq 2$, auch **Grundzahl** genannt.

Die üblichen Darstellungen von Zahlen gehen von $g = 10$ aus. Z.B. bedeutet 345 nichts anderes als $3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0$; man spricht von einer Darstellung im **dekadischen System** (decem $\overset{lat.}{=}$ 10).

Die gleiche Zahl besitzt aber auch eine **binäre** oder **dyadische Darstellung** von der Form $(101011001)_2$; damit ist $1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^8$ gemeint, und man bezieht sich hier auf die Grundzahl $g = 2$.

Computer arbeiten intern oft mit $g = 2$ oder $g = 16$, die Mayas verwendeten $g = 20$ und die Babylonier $g = 60$ (mit entsprechend vielen Symbolen für die Ziffern).

Tatsächlich kann man $g \geq 2$ beliebig (fest) wählen, wie wir uns nun überlegen wollen. Wir setzen $Z_g := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < g\} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ und nennen Z_g die zu g gehörige Menge der **Ziffern**. Offenbar ist $Z_{10} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $Z_2 = \{0, 1\}$.

18. Bezogen auf die feste Grundzahl $g \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ betrachten wir eine Zahl $r \in \mathbb{N}$. Nach 15. und 2.11. hat die Menge $\{k \in \mathbb{N}_0 \mid g^k \leq r\}$ ein größtes Element n. Die Zahl n ist durch r festgelegt, und es gilt $g^n \leq r < g^{n+1}$.

Nach dem Satz 3.8. über die Division mit Rest können wir nun ausgehend von der Gleichung $\boxed{r_0 := r}$ das folgende Berechnungsschema aufstellen:

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{lllllll} r_0 & = & r_1 & \cdot g & + & z_0 & \text{mit } z_0 \in Z_g, \\ r_1 & = & r_2 & \cdot g & + & z_1 & \text{mit } z_1 \in Z_g \\ r_2 & = & r_3 & \cdot g & + & z_2 & \text{mit } z_2 \in Z_g, \\ & \vdots & & & & & \quad\vdots \\ r_{n-1} & = & r_n & \cdot g & + & z_{n-1} & \text{mit } z_{n-1} \in Z_g, \\ r_n & = & r_{n+1} & \cdot g & + & z_n & \text{mit } z_n \in Z_g. \end{array}\right.$$

Bezogen auf dieses Schema zeigen wir $\boxed{r_{n+1} = 0 \ \wedge\ r_n = z_n > 0}$ sowie

19. **Satz**. *Es sei $g \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ fest gewählt. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $r \in \mathbb{N}$ genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ und genau eine Folge $z_0, ..., z_n$ von Elementen aus Z_g mit*

$$(\diamond)\quad \boxed{z_n > 0 \ \wedge\ r = z_0 g^0 + z_1 g^1 + z_2 g^2 + ... + z_{n-1} g^{n-1} + z_n g^n}\ .$$

Die Zahlen $z_0, ..., z_n$ lassen sich anhand des Schemas 18.$(*)$ berechnen.

Beweis: a) Die Zahlen $n, r_0, ..., r_{n+1}$ und $z_0, ..., z_n$ seien gemäß 18. definiert. Dann gilt

$$(\triangleright)\quad r = r_0 = r_k g^k + \sum_{i=0}^{k-1} z_i g^i \quad \text{für } k = 1, ..., n.$$

Denn dies gilt gemäß $(*)$ für $k=1$, und ist es für $k=m$ mit $1 \leq m < n$ gezeigt, so gilt es wegen $r_0 = r_m \cdot g^m + \sum_{i=0}^{m-1} z_i g^i \overset{(*)}{=} (r_{m+1} \cdot g + z_m) \cdot g^m + \sum_{i=0}^{m-1} z_i g^i = r_{m+1} \cdot g^{m+1} + \sum_{i=0}^{m} z_i g^i$ auch für $k = m+1$.

b) Wäre $r_{n+1} > 0$, so wäre $r_n \geq g$ gemäß $(*)$, und mit $(\triangleright)$ für $k=n$ ergäbe sich $r \geq g^{n+1}$. Deshalb ist $r_{n+1} = 0$. Mit $(*)$ führt dies auf $r_n = z_n$, und mit $(\triangleright)$ für $k=n$ ergibt sich dann $r = r_0 = \sum_{i=0}^{n} z_i g^i$. Wäre $z_n = 0$, so wäre $r \leq \sum_{i=0}^{n-1} (g-1) \cdot g^i \overset{2.23.}{=} g^n - 1 < g^n$.

c) Neben $(\diamond)$ sei noch die Darstellung $r = \sum_{i=0}^{m} x_i g^i$ mit $m \in \mathbb{N}_0 \wedge x_0, ..., x_m \in \mathbb{Z}_g \wedge x_m > 0$ gegeben. Wir setzen $s_k := x_k \cdot g^0 + x_{k+1} \cdot g^1 + x_{k+2} \cdot g^2 + ... + x_m \cdot g^{m-k}$ für $k = 0, ..., m$. Dann ist $s_0 = r$, und mit $s_{m+1} := 0$ folgt $(\#)$ $s_k = s_{k+1} \cdot g + x_k$ für $k = 0, ..., m$. Ein Vergleich von $(\#)$ mit 18.$(*)$ führt gemäß 3.8. nun auf $n \leq m$, auf $s_k = r_k$ für $k = 0, ..., n+1$ und auf $x_k = z_k$ für $k = 0, ..., n$. Überdies erhalten wir $n = m$, denn mit 3.8. ergäbe sich sonst $0 = r_{n+1} = s_{n+1} = ... = s_m$ und damit $x_m = 0$. $\square$

20. Man nennt die nach 19. existierende Darstellung

$$(z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0)_g := \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot g^i = z_0 \cdot g^0 + z_1 \cdot g^1 + ... + z_{n-1} \cdot g^{n-1} + z_n \cdot g^n = r$$

die g–**adische Darstellung** der Zahl $r \in \mathbb{N}$. Außerdem setzt man $(0)_g := 0$.
Der Index g und die Klammern werden weggelassen, wenn $g = 10$ ist.

Man ist jetzt in der Lage, das kleine Einspluseins und das kleine Einmaleins für jede Grundzahl g zu entwickeln, ferner auch Regeln für schriftliches Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren (vgl. d. Übungen). Soweit dies zum Schulstoff gehört, gelte es im weiteren als bekannt.

Berechnungsbeispiele:
Für $g \in \{2, 3, 7, 9\}$ läßt sich die g-adische Darstellung der Zahl $r = 2345$ gemäß 18.$(*)$ wie folgt berechnen:

$$\begin{array}{rl}
2345 = & 1172 \cdot 2 + 1 \\
1172 = & 586 \cdot 2 + 0 \\
586 = & 293 \cdot 2 + 0 \\
293 = & 146 \cdot 2 + 1 \\
146 = & 73 \cdot 2 + 0 \\
73 = & 36 \cdot 2 + 1 \\
36 = & 18 \cdot 2 + 0 \\
18 = & 9 \cdot 2 + 0 \\
9 = & 4 \cdot 2 + 1 \\
4 = & 2 \cdot 2 + 0 \\
2 = & 1 \cdot 2 + 0 \\
1 = & 0 \cdot 2 + 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
2345 = & 781 \cdot 3 + 2 \\
781 = & 260 \cdot 3 + 1 \\
260 = & 86 \cdot 3 + 2 \\
86 = & 28 \cdot 3 + 2 \\
28 = & 9 \cdot 3 + 1 \\
9 = & 3 \cdot 3 + 0 \\
3 = & 1 \cdot 3 + 0 \\
1 = & 0 \cdot 3 + 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
2345 = & 335 \cdot 7 + 0 \\
335 = & 47 \cdot 7 + 6 \\
47 = & 6 \cdot 7 + 5 \\
6 = & 0 \cdot 7 + 6 \\
 & \\
 & \\
 & \\
2345 = & 260 \cdot 9 + 5 \\
260 = & 28 \cdot 9 + 8 \\
28 = & 3 \cdot 9 + 1 \\
3 = & 0 \cdot 9 + 3
\end{array}$$

Ergebnis: Es ist $2345 = (100100101001)_2 = (10012212)_3 = (6560)_7 = (3185)_9$.

Da wir für $g = 2$ nur die Ziffern $0, 1$ haben und da man die Summanden mit der Ziffer 0 offenbar fortlassen kann, erhalten wir aus 19. die Aussage

21. **Corollar.** *Jede natürliche Zahl ist (bei aufsteigender Reihenfolge der Summanden) eindeutig als Summe von 2–Potenzen darstellbar.*

Beispiel: $345 = 1 + 8 + 16 + 64 + 256 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^8$.

22. Ist **r** eine **reelle Zahl** mit $\boxed{0 \le r < 1}$, so ist $r \cdot g \in [0, g[$, d.h. für $z := \lfloor r \cdot g \rfloor$ gilt

$$\boxed{r \cdot g = z + r'} \quad \text{mit} \quad \boxed{z \in Z_g \ \wedge \ 0 \le r' < 1} .$$

Indem man eine derartige Berechnung immer wiederholt, entsteht das Berechnungsschema

$$(*) \quad \begin{cases} r \cdot g &= & z_{-1} &+& r_1 & \text{mit} & z_{-1} \in Z_g & \wedge\ 0 \le r_1 < 1 \\ r_1 \cdot g &= & z_{-2} &+& r_2 & \text{mit} & z_{-2} \in Z_g & \wedge\ 0 \le r_2 < 1 \\ r_2 \cdot g &= & z_{-3} &+& r_3 & \text{mit} & z_{-3} \in Z_g & \wedge\ 0 \le r_3 < 1 \\ & \vdots & & & & \vdots & & \\ r_{n-1} \cdot g &= & z_{-n} &+& r_n & \text{mit} & z_{-n} \in Z_g & \wedge\ 0 \le r_n < 1 \\ r_n \cdot g &= & z_{-(n+1)} &+& r_{n+1} & \text{mit} & z_{-(n+1)} \in Z_g & \wedge\ 0 \le r_{n+1} < 1 \\ & \vdots & & & & \vdots & & \end{cases}$$

welches eine *Ziffernfolge* $z_{-1}, z_{-2}, z_{-3}, \ldots, z_{-n}, z_{-(n+1)}, \ldots$
und eine *Restefolge* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$
derart bereitstellt, daß

$$(\diamond) \quad \boxed{r = \left(\sum_{i=1}^{n} z_{-i} \cdot g^{-i} \right) + r_n \cdot g^{-n}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei $\boxed{z_{-i} \in Z_g}$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$ und $\boxed{0 \le r_n < 1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis durch Induktion:
(IA): Wegen $r \cdot g = z_{-1} + r_1$ ist $r = \left(\sum_{i=1}^{1} z_{-i} \cdot g^{-i} \right) + r_1 \cdot g^{-1}$.
(IV): $(\diamond)$ sei für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig.
(IB): Es ist $r = \left(\sum_{i=1}^{n+1} z_{-i} \cdot g^{-i} \right) + r_{n+1} \cdot g^{-(n+1)}$.
(DB): Wegen $r_n \cdot g^{-n} = (r_n \cdot g) \cdot g^{-(n+1)} = (z_{-(n+1)} + r_{n+1}) \cdot g^{-(n+1)}$ ist
$$r \overset{(IV)}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} z_{-i} \cdot g^{-i} \right) + r_n \cdot g^{-n} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} z_{-i} \cdot g^{-i} \right) + r_{n+1} \cdot g^{-(n+1)}. \quad \square$$

Beispiele für $r = 1/7$:

$g = 10:$	$g = 2:$	$g = 6:$
$10 \cdot 1/7 = 1 + 3/7$	$2 \cdot 1/7 = 0 + 2/7$	$6 \cdot 1/7 = 0 + 6/7$
$10 \cdot 3/7 = 4 + 2/7$	$2 \cdot 2/7 = 0 + 4/7$	$6 \cdot 6/7 = 5 + 1/7$
$10 \cdot 2/7 = 2 + 6/7$	$2 \cdot 4/7 = 1 + 1/7$	
$10 \cdot 6/7 = 8 + 4/7$		
$10 \cdot 4/7 = 5 + 5/7$		
$10 \cdot 5/7 = 7 + 1/7$		
– – – – – – – – –	– – – – – – – – –	– – – – – – – – –
$10 \cdot 1/7 = 1 + 3/7$	$2 \cdot 1/7 = 0 + 2/7$	$6 \cdot 1/7 = 0 + 6/7$
.....	.....	.....
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$1/7 = 0,\overline{142857}\ldots$	$1/7 = (0,\overline{001}\ldots)_2$	$1/7 = (0,\overline{05}\ldots)_6$

An den Beispielen sieht man, wie zu verfahren ist:

Man ordnet der reellen Zahl $r \in [0.1[$ den Ausdruck
$$(0, z_{-1} z_{-2} \ldots z_{-n} z_{-(n+1)} \ldots)_g$$

zu und nennt dies die g**–adische Darstellung von** r. Wenn ein Ziffernblock sich wiederholt — das ist *nicht* bei allen Zahlen der Fall —, dann wird dies (wie üblich) durch Überstreichen angedeutet. Für $g = 10$ ist $1/16 = 0,0625\overline{0}\ldots$, und dafür schreibt man (wie üblich) $0,0625$.

Für $r = 1/7$ und $g = 10$ und $n = 8$ besagt ($\diamond$):

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10^1} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \frac{1}{10^7} + \frac{4}{10^8} + \frac{r_8}{10^8}$$

mit $0 \le r_8 < 1$, also mit $0 \le r_8 \cdot 10^{-8} < 10^{-8} = 0,00000001$, d.h. die ersten 8 Summanden stellen die Zahl $1/7$ bis auf den *Fehler* $r_8 \cdot 10^{-8}$ dar.

Nach 15.(iv) wird $r_n \cdot g^{-n}$ beliebig klein, wenn n genügend groß ist, *d.h.* ($\diamond$) *ist eine ausgezeichnete Formel, um* r *mit jeder gewünschten Genauigkeit zu approximieren!*

Hiermit ist dann insbesondere auch klar, *daß zu verschiedenen Zahlen aus* $[0,1[$ *stets verschiedene* g*–adische Zifferndarstellungen gehören.*

Es bestehen enge Verbindungen zwischen dem Schema ($*$) und der üblichen Art, schriftlich zu dividieren. Im weiteren gelte solches, soweit es zum Schulstoff gehört, als bekannt.

23. Ist $r \in \mathbb{R}_+$, so läßt sich r nach 7. als $r = m + s$ mit $m := \lfloor r \rfloor$ und $0 \le s < 1$ darstellen. Ist nun $(z_n \ldots z_0)_g$ die g–adische Darstellung von m und ist $(0, z_{-1} \ldots z_{-n} \ldots)_g$ die g–adische Darstellung von s, so heißt

$(z_n \ldots z_0, z_{-1} \ldots z_{-n} \ldots)_g$ die g**–adische Darstellung von** r und

$-(z_n \ldots z_0, z_{-1} \ldots z_{-n} \ldots)_g$ die g**–adische Darstellung von** $-r$**.**

4. Elemente der Zahlentheorie

A. Teilbarkeitsregeln in $\mathbb{Z}$

1. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so heißt a **ein Teiler von** b, in Zeichen: $a \mid b$ (gelesen: a *teilt* b), wenn es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot x = b$ gibt. Z.B. gilt $3 \mid 6$ wegen $3 \cdot 2 = 6$, aber nicht $6 \mid 3$, denn $6 \cdot x = 3$ führt auf $x = \frac{3}{6} \notin \mathbb{Z}$. Wenn a kein Teiler von b ist, notieren wir dies als $a \nmid b$ (gelesen: a *teilt nicht* b).

2. *Für* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *gelten die folgenden Aussagen:*
   - (*i*) $a \mid 0 \ \wedge\ 1 \mid a \ \wedge\ -1 \mid a \ \wedge\ a \mid a \ \wedge\ -a \mid a$,
   - (*ii*) $a \mid b \ \wedge\ b \mid c \ \Rightarrow\ a \mid c$ (*Transitivität*),
   - (*iii*) $a \mid b \ \wedge\ b \neq 0 \ \Rightarrow\ 0 < |a| \le |b| \ \wedge\ |a| \ \big|\ |b|$,
   - (*iv*) $a \mid b \ \wedge\ b \mid a \ \Rightarrow\ a = b \ \vee\ a = -b$,
   - (*v*) $c \mid a \ \wedge\ c \mid b \ \Rightarrow\ c \mid (xa + yb) \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (i) Es ist $a \cdot 0 = 0 \ \wedge\ 1 \cdot a = a \ \wedge\ (-1) \cdot (-a) = a$.
(ii) $d, e \in \mathbb{Z} \ \wedge\ a \cdot d = b \ \wedge\ b \cdot e = c \ \Rightarrow\ a \cdot de = be = c$.
(iii) Aus $a \cdot c = b \neq 0$ folgt $0 < |a| \ \wedge\ 1 \le |c| \ \wedge\ |a| \le |a| \cdot |c| = |a \cdot c| = |b|$.
(iv) $(a = 0 \ \wedge\ a \mid b \ \Rightarrow\ b = 0 = a) \ \wedge\ (b = 0 \ \wedge\ b \mid a \ \Rightarrow\ a = 0 = b)$
$\wedge\ (a, b \neq 0 \wedge a \mid b \wedge b \mid a \overset{(iii)}{\Rightarrow} |a| \le |b| \wedge |b| \le |a| \ \Rightarrow\ |a| = |b| \ \Rightarrow\ a = b \vee a = -b)$.
(v) $d, e \in \mathbb{Z} \ \wedge\ c \cdot d = a \ \wedge\ c \cdot e = b \ \Rightarrow\ c \cdot (xd + ye) = xa + yb$. $\square$

B. Der größte gemeinsame Teiler

3. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^*$, so wird

$$T(a_1, \ldots, a_n) := \{x \in \mathbb{Z} \mid \quad x \bigm| a_i \ \ \forall\, i \in \hat{n} := \{1, \ldots, n\}\}$$

die **Menge der gemeinsamen Teiler von** $a_1, \ldots, a_n$ genannt. Mit 2. folgt

$$1, -1 \in T(a_1, \ldots, a_n) = T(|a_1|, \ldots, |a_n|) \ \text{ sowie}$$
$$x \in T(a_1, \ldots, a_n) \ \Rightarrow \ |x| \in T(|a_1|, \ldots, |a_u|) \ \wedge \ 1 \leq |x| \leq \min\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Demnach besitzt $T(a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathbb{N}$ ein größtes Element, genannt **größter gemeinsamer Teiler von** $a_1, \ldots, a_n$ und notiert als $ggT(a_1, \ldots, a_n)$.

Im Falle $ggT(a_1, \ldots, a_n) = 1$ werden $a_1, \ldots, a_n$ **teilerfremd** genannt (gemeint ist, daß kein „echter" gemeinsamer Teiler > 1 existiert).

Als wichtig erweist sich

4. **Satz.** *Sind* $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *und ist* $\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b := \{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, *so gilt*
   (*i*) $(\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$,
   (*ii*) $\min[(\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b) \cap \mathbb{N}] = ggT(a, b)$.
   (*iii*) *Es gibt* $x, y \in \mathbb{Z}$ *mit* $xa + yb = ggT(a, b)$.
   (*iv*) *Es gilt* $ggT(a, b) = 1$ *genau dann, wenn es* $x, y \in \mathbb{Z}$ *mit* $xa + yb = 1$ *gibt.*

Beweis: Wegen $a^2 + b^2 \in (\mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b) \cap \mathbb{N}$ ist (i) gültig, und mithin besitzt $(\mathbb{Z}a \cap \mathbb{Z}b) \cap \mathbb{N}$ ein kleinstes Element d mit $d \in \mathbb{N}$ und $d = xa + yb$ für gewisse $x, y \in \mathbb{Z}$. Wegen 3.8. gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = q \cdot d + r$ und $0 \leq r < d$, und es folgt $r = a - q \cdot d = a - qxa - qyb = (1 - qx) \cdot a + (-qy) \cdot b \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Dann ist $r \notin \mathbb{N}$ wegen der Minimalität von d, also $r = 0$, und wir haben $d \mid a$. Analog ergibt sich $d \mid b$ und damit $d \leq ggT(a, b)$. Nach 2.(v) gilt aber $ggT(a, b) \mid d$ und nach 2.(iii) dann $d = ggT(a, b)$. Damit ist (ii) gezeigt, und dies impliziert (iii),(iv). □

Bemerkung. Definitionsgemäß ist $ggT(a, b)$ *größtes* Element einer Zahlenmenge. Das Besondere des obigen Satzes ist die Beobachtung, daß $ggT(a, b)$ zugleich *kleinstes* Element einer anderen großen Zahlenmenge ist.

Beispiele: $ggT(3, 5) = 1 = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 = 7 \cdot 3 + (-4) \cdot 5 = (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 5$,
$ggT(8, 12) = 4 = (-1) \cdot 8 + 1 \cdot 12 = 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 12 = 5 \cdot 8 + (-3) \cdot 12$,
$ggT(-6, 9) = 3 = 1 \cdot (-6) + 1 \cdot 9 = (-2) \cdot (-6) + (-1) \cdot 9 = (-5) \cdot (-6) + (-3) \cdot 9$.

5. *Sind* $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *und ist* t *ein gemeinsamer Teiler von* a, b, *so ist* t *sogar ein Teiler von* $ggT(a, b)$.

Beweis: 4.(iii), 2.(v). □

6. *Sind* $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *und ist* $c := ggT(a, b)$, $r := a/c$, $s := b/c$, *so gilt:*
(*i*) *Es sind* $r, s \in \mathbb{Z}^*$ *mit* $ggT(r, s) = 1$, *und es ist* $a/b = r/s$.
(*ii*) *Es ist* $\mathbb{Q}^* = \{r/s \mid r, s \in \mathbb{Z}^* \ \wedge \ ggT(r, s) = 1\}$, *d.h. jede rationale Zahl* $\neq 0$ *ist als Bruch aus teilerfremden ganzen Zahlen darstellbar.*

Beweis: Wegen $c \mid a \ \wedge \ c \mid b$ gibt es $r, s \in \mathbb{Z}^*$ mit $c \cdot r = a \ \wedge \ c \cdot s = b$, also mit $r = a/c \ \wedge \ s = b/c$. Zu $d := ggT(r, s)$ gibt es $e, f \in \mathbb{Z}^*$ mit $de = r \ \wedge \ df = s$, also mit $cde = a \ \wedge \ cdf = b$. Mit 5. folgt $cd \mid c$. Dann ist $cd \leq c$ und somit $d = 1$ sowie $a/b = (cde)/(cdf) = de/df = r/s$. Demnach gilt (i), und aus (i) folgt (ii). □

7. *Sind $a, b, t \in \mathbb{Z}^*$ mit $t \mid a \cdot b \ \wedge \ ggT(t, a) = 1$, so folgt $t \mid b$.*

Beweis: Es gibt ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $t \cdot c = a \cdot b$, und nach 4.(iv) gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $xt + ya = 1$. Dann ist $b = b \cdot 1 = bxt + bya = (bx + yc) \cdot t$, d.h. es gilt $t \mid b$. □

Aus der folgenden Aussage ergibt sich ein *praktisches Verfahren zu Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers*:

8. *Es seien $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$ mit $r_0 \geq r_1$. Ist $\boxed{d = ggT(r_0, r_1)}$ und ist $r_0 = q \cdot r_1 + r_2$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $r_1 > r_2 \geq 0$ (vgl. 3.8.), so gilt $\boxed{r_2 = 0 \ \wedge \ d = r_1}$ oder $\boxed{r_2 > 0 \ \wedge \ d = ggT(r_1, r_2)}$.*

Beweis: Ist $r_2 = 0$, so ist $r_1 \mid r_0$, also $d = r_1$. Ist $r_2 > 0$, so gilt für $t \in \mathbb{Z}$:
$(t| \, r_0 \wedge t| \, r_1 \overset{2.}{\Rightarrow} t| \, r_1 \wedge t| \, r_0 + (-q)r_1 = r_2)$ sowie $(t| \, r_1 \wedge t| \, r_2 \overset{2.}{\Rightarrow} t| \, q \cdot r_1 + r_2 = r_0 \wedge t| \, r_1)$.
Demnach ist $T(r_0, r_1) = T(r_1, r_2)$, also $ggT(r_0, r_1) = ggT(r_1, r_2)$. □

9. Nach 8. kann man den größten gemeinsamen Teiler d zweier natürlicher Zahlen r_0, r_1 mit $r_0 \geq r_1$ wie folgt durch *Division mit Rest* bestimmen:

$$(*) \left\{ \begin{array}{lrcllcl} & r_0 &=& q_1 \cdot r_1 + r_2 & \text{mit} & r_1 > r_2 \geq 0 & \Rightarrow \ d = r_1 \ \dot{\vee} \ r_2 > 0; \\ \text{falls } r_2 > 0: & r_1 &=& q_2 \cdot r_2 + r_3 & \text{mit} & r_2 > r_3 \geq 0 & \Rightarrow \ d = r_2 \ \dot{\vee} \ r_3 > 0; \\ \text{falls } r_3 > 0: & r_2 &=& q_3 \cdot r_3 + r_4 & \text{mit} & r_3 > r_4 \geq 0 & \Rightarrow \ d = r_3 \ \dot{\vee} \ r_4 > 0; \\ \text{falls } r_4 > 0: & r_3 &=& q_4 \cdot r_4 + r_5 & \text{mit} & r_4 > r_5 \geq 0 & \Rightarrow \ d = r_4 \ \dot{\vee} \ r_5 > 0; \\ & & \vdots & & \vdots & & \end{array} \right.$$

Dieses Verfahren wird als **euklidischer Algorithmus** bezeichnet; es bricht nach endlich vielen Schritten ab, da die Reste immer kleiner werden, und ist somit ein *sicheres* Verfahren zur Bestimmung von d.

Beispiele: Es ist $ggT(84565, 46767) = 1$ und $ggT(92235060, 26999355) = 345$ wegen

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{84565} &=& 1 &\cdot& \boxed{46767} &+& 37798 \\ 46767 &=& 1 &\cdot& 37798 &+& 8969 \\ 37798 &=& 4 &\cdot& 8969 &+& 1922 \\ 8969 &=& 4 &\cdot& 1922 &+& 1281 \\ 1922 &=& 1 &\cdot& 1281 &+& 641 \\ 1281 &=& 1 &\cdot& 641 &+& 640 \\ 641 &=& 1 &\cdot& 640 &+& 1 \\ 640 &=& 640 &\cdot& \boxed{1} &+& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} \boxed{92235060} &=& 3 &\cdot& \boxed{26999355} &+& 11236995 \\ 26999355 &=& 2 &\cdot& 11236995 &+& 4525365 \\ 11236995 &=& 2 &\cdot& 4525365 &+& 2186265 \\ 4525365 &=& 2 &\cdot& 2186265 &+& 152835 \\ 2186265 &=& 14 &\cdot& 152835 &+& 46575 \\ 152835 &=& 3 &\cdot& 46575 &+& 13110 \\ 46575 &=& 3 &\cdot& 13110 &+& 7245 \\ 13110 &=& 1 &\cdot& 7245 &+& 5865 \\ 7245 &=& 1 &\cdot& 5865 &+& 1380 \\ 5865 &=& 4 &\cdot& 1380 &+& 345 \\ 1380 &=& 4 &\cdot& \boxed{345} &+& 0 \end{array}$$

10. Sind $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ mit $r \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, so folgt aus 2. und 5., daß

$$ggT(a_1, \ldots, a_r) = ggT(ggT(a_1, a_2), a_3, \ldots, a_r)$$

ist. Indem wir dies wiederholt verwenden, können wir die Bestimmung von $ggT(a_1, \ldots, a_r)$ auf 9. zurückführen.

11. *Sind $a, b \in \mathbb{N}$, so ist $v := \dfrac{a \cdot b}{ggT(a, b)}$ die kleinste natürliche Zahl mit $a \mid v \ \wedge \ b \mid v$.*

Man nennt v auch das **kleinste gemeinsame Vielfache** *von a und b, im Zeichen: $v = kgV(a, b)$.*

Beweis: Es sei $c := ggT(a,b)$, $a/c = r$ und $b/c = s$. Aus $a \cdot s = v = r \cdot b$ folgt $a \mid v \wedge b \mid v$. Ist $w \in \mathbb{N}$ mit $a \mid w \wedge b \mid w$, so gibt es $x, y \in \mathbb{N}$ mit $ax = w = by$. Dann ist $crx = w = csy$ und damit $rx = sy$. Dies impliziert $s \mid r \cdot x$, und mit 6.(i) und 7. folgt $s \mid x$. Für $e := x/s \in \mathbb{N}$ folgt nun $w = cr \cdot se = e \cdot cr \cdot cs/c = e \cdot ab/c = e \cdot v \geq v$, wie behauptet. □

C. Primzahlen

12. Ist $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$, so wird p eine **Primzahl** genannt, wenn $T(p) = \{1, -1, p, -p\}$ ist, wenn also p *nur* die Teiler $1, -1, p, -p$ hat. Es sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$ die kleinsten zehn Primzahlen, und es sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen.

Für $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}^*$ gilt definitionsgemäß:

(1) $p \mid a \;\Leftrightarrow\; ggT(p,a) = p$,
(2) $p \nmid a \;\Leftrightarrow\; ggT(p,a) = 1$.

Weiter zeigen wir

13. *Sind $a, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}^*$ mit $r \in \mathbb{N}$ und ist $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_r$, so gibt es ein $i \in \hat{r}$ mit $p \mid a_i$. Insbesondere gilt: $p \mid a^r \;\Rightarrow\; p \mid a$.*

Beweis: Im Falle $r = 1$ ist dies klar. Wenn die Behauptung für $r < k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt sie auch für $r = k$, denn im Falle $ggT(p, a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1}) = 1$ führt 7. auf $p \mid a_k$, und im Falle $ggT(p, a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1}) > 1$ gilt $p \mid a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1}$ gemäß 12., also $p \mid a_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, und dies impliziert die zweite für $a = a_1 = \cdots = a_r$. □

14. *Zu jedem $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ gibt es ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$.*

Beweis: Wegen $n \mid n$ ist $n \in T(n) \cap (\mathbb{N} \backslash \{1\})$, d.h. die Teilmenge $T(n) \cap (\mathbb{N} \backslash \{1\})$ von $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element p. Ist $t \in \mathbb{Z}$ mit $t \mid p$, so folgt $0 < |t| \leq p \;\wedge\; |t| \in T(n)$ gemäß 2.(ii),(iii), also $|t| = 1$ oder $|t| = p$ wegen der Minimalität von p in $T(n) \cap (\mathbb{N} \backslash \{1\})$. Mithin ist $p \in \mathbb{P}$ mit $p \in T(n)$. □

15. *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis nach einer 2300 Jahre alten Idee, die in dem Werk „Die Elemente“ (IX §20) von Euklid aufgezeichnet ist:

Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so könnte man ihr Produkt m bilden, und zu $m+1$ gäbe es nach 14. ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid (m+1)$. Nach der Definition von m gilt aber auch $p \mid m$, und nach 2.(v) hätten wir dann $p \mid 1 \cdot (m+1) + (-1) \cdot m = 1$ im Widerspruch zu $p \geq 2$. □

Eine Folge $x_1, \ldots, x_r$ reeller Zahlen mit $r \in \mathbb{N}$ heißt **steigend** bzw. **streng steigend**, falls $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r$ bzw. $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ gilt. Mit dieser Bezeichnung folgt

16. **Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie.**
Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ gibt es genau eine steigende Folge $p_1, \ldots, p_r$ von Primzahlen mit $\boxed{n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r}$.

Man nennt diese Gleichung die **Primfaktorzerlegung von** n und bezeichnet $p_1, \ldots, p_r$ als die **Primfaktoren von** n.

Beispiele: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Beweis durch Induktion: Für $n = 2$ gilt die Behauptung. Ist $n>2$ und ist die Behauptung für alle $x \in [2, n[\cap \mathbb{Z}$ gültig, so auch für n (vgl. 3.6.):
Nach 14. gibt es eine Primzahl, die n teilt, und nach 2.10. existiert dann eine kleinste Primzahl p mit $p \mid n$. Damit gibt es auch ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot m = n$. Ist $m = 1$, so ist $n = p$, und dann ist die Behauptung gemäß 12. für n gültig. Im weiteren gelte deshalb $m > 1$. Wegen $m = n/p < n$ hat m nun eine Primfaktorzerlegung $m = q_1 \cdot ... \cdot q_r$ mit $r \in \mathbb{N}$ und mit $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_r$. Wegen $q_1 \mid m \ \wedge \ m \mid n$ gilt $q_1 \mid n$ (vgl. 2.), also $p \leq q_1$ gemäß der Definition von p. Setzen wir nun $p_{i+1} := q_i$ für $i = 1, ..., r$ und $p_1 := p$, so ist $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r+1}$ eine Primfaktorzerlegung von n mit $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_{r+1}$.
Diese Zerlegung ist eindeutig, denn ist $n = p'_1 \cdot p'_2 \cdot ... \cdot p'_s$ eine weitere Primfaktorzerlegung von n mit $p'_1 \leq p'_2 \leq ... \leq p'_s$, so haben wir $p_1 \in \{p'_1, ..., p'_s\}$ und $p'_1 \in \{p_1, ..., p_{r+1}\}$ gemäß 13., also $p'_1 \leq p_1$ sowie $p_1 \leq p'_1$ und damit $p_1 = p'_1$. Es folgt $p_2 \cdot ... \cdot p_{r+1} = m = p'_2 \cdot ... \cdot p'_s$ und mit $m < n$ dann $s = r + 1$ sowie $p_i = p'_i$ für $i = 2, ..., s$. □

17. Das Auffinden von Primfaktorzerlegungen für größere Zahlen überläßt man heute den Computern. Z.B. liefert das Programm „Mathematica“ mit der Befehlszeile

$$A = \{100, 101, 102\}; \ \text{FactorInteger}[1 + 2\,\hat{}\,A]$$

die Primfaktorzerlegungen

$$\begin{aligned} 1 + 2^{100} &= 17 \cdot 401 \cdot 61681 \cdot 340801 \cdot 2787601 \cdot 3173389601, \\ 1 + 2^{101} &= 3 \cdot 845100400152152934331135470251, \\ 1 + 2^{102} &= 5 \cdot 13 \cdot 137 \cdot 409 \cdot 953 \cdot 3061 \cdot 13669 \cdot 26317 \cdot 1326700741 \end{aligned}$$

und damit ein Beispiel einer 30–stelligen Primzahl.

Wenn die gleiche Primzahl mehrfach auftritt, kann man zur Potenzschreibweise übergehen wie z.B. bei $1176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 7^2$.

Allgemein läßt sich dies wie folgt formulieren:

18. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ gibt es genau eine streng steigende Folge $p_1, ..., p_r$ von Primzahlen und genau eine Folge $k_1, ..., k_r$ natürlicher Zahlen mit $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}$.*

Wenn man die Primfaktorzerlegungen zweier Zahlen a, b kennt, kann man sofort ihren größten gemeinsamen Teiler und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches bestimmen, indem man für jeden auftretenden Primfaktor — ggf. ergänzt mit dem Exponenten 0 — den kleineren Exponenten für den ggT und den größeren für das kgV nimmt.

Beispiel:

$$\begin{array}{llcl} \text{Für} & a & = & 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 13^1 \cdot 17^4 \cdot 29^6 \\ \text{und} & b & = & 2^0 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^9 \cdot 13^0 \cdot 17^1 \cdot 29^2 \\ \text{ist} & ggT(a,b) & = & 2^0 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7^0 \cdot 13^0 \cdot 17^1 \cdot 29^2 \\ \text{und} & kgV(a,b) & = & 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^9 \cdot 13^1 \cdot 17^4 \cdot 29^6. \end{array}$$

Schließlich zeigen wir

19. **Satz.** *Sind $z, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{Q}$, so ist $\sqrt[n]{z} \in \mathbb{N}$, d.h. dann gibt es ein $a \in \mathbb{N}$ mit $a^n = z$.*

Beweis: Es sei $\sqrt[n]{z} = r/s$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ und $ggT(r, s) = 1$ (vgl. 6.). Dann ist $z = (r/s)^n = r^n/s^n$ gemäß 3.14., also $s^n \cdot z = r^n$. Gäbe es ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid s$, so hätten wir $p \mid r^n$, also $p \mid r$ gemäß 13. und damit $p \mid ggT(r, s)$. Deshalb ist $s = 1$, also $\sqrt[n]{z} = r \in \mathbb{N}$. □

20. **Corollar.** *Sind* $p \in \mathbb{P}$ *und* $k, n \in \mathbb{N}$ *mit* $p \nmid k \ \wedge \ n > 1$*, so ist* $\sqrt[n]{p \cdot k} \ \notin \ \mathbb{Q}$*.*
Insbesondere ist $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$*.*

Man bezeichnet die Elemente von $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ als **irrationale Zahlen.**

Z.B. sind $\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{5}, \sqrt[n]{6}, \sqrt[n]{7}, \sqrt[n]{10}, \sqrt[n]{11}, \sqrt[n]{12} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \ \ \forall \, n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

Beweis: Wäre $\sqrt[n]{p \cdot k} \in \mathbb{Q}$, so gäbe es nach 19. ein $a \in \mathbb{N}$ mit $p \cdot k = a^n$. Gemäß 13. hätten wir $p \mid a$, d.h. p^n käme in der Primfaktorzerlegung von $a^n = p \cdot k$ vor. Mit 16. ergäbe sich dann aber $n = 1$. □

D. Kongruenzen in $\mathbb{Z}$

Bei Gradzahlen unterscheidet man nicht zwischen 240° und 600°, und man rechnet $340° + 80° = 60°$. Bei Uhrzeiten rechnet man 23^h+5 Stunden $= 4^h$. Hier wird das übliche Rechnen also abgewandelt, moduliert, und der Mathematiker spricht vom Rechnen „modulo 360“ bzw. „modulo 24“.

Wir wollen uns mit dieser *andersartigen Art des Rechnens* genauer befassen und werden dabei auch Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen kennenlernen.

Im folgenden sei $a \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ fest gewählt.

21. Ist $x \in \mathbb{Z}$, so entsteht bei der Division von x durch a mit Rest gemäß 3.8. ein wohlbestimmter Divisionsrest, der jetzt mit $\boxed{x_{\sim a}}$ bezeichnet werden soll, gelesen

„*x–Rest modulo a*“ oder „*x Tilde a*“:

Wir gehen also von $\boxed{x = q \cdot a + x_{\sim a}}$ mit $\boxed{q \in \mathbb{Z}}$ und $\boxed{x_{\sim a} \in Z_a}$ aus, wobei $Z_a := \{0, 1, 2, ..., a-1\} = [0, a[\, \cap \, \mathbb{Z}$ und $q = \lfloor \frac{x}{a} \rfloor$ ist.

Sind $x, y \in \mathbb{Z}$, so wollen wir x, y **kongruent modulo** a nennen, in Zeichen:

$$\boxed{x \equiv y \pmod a} \quad \text{oder auch} \quad \boxed{x \equiv_a y},$$

wenn die Reste $x_{\sim a}$ und $y_{\sim a}$ identisch sind, d.h. wir gehen von

$$\boxed{x \equiv_a y \ \Leftrightarrow \ x_{\sim a} = y_{\sim a}}$$

aus. Mit den Grundeigenschaften des Gleichheitszeichens aus 1.A erkennen wir für $x, y, z \in \mathbb{Z}$:
$(Rf_{\equiv})$ *Reflexivität*: $x \equiv_a x$,
$(Sy_{\equiv})$ *Symmetrie*: $x \equiv_a y \ \Rightarrow \ y \equiv_a x$,
$(Tr_{\equiv})$ *Transitivität*: $x \equiv_a y \ \wedge \ y \equiv_a z \ \Rightarrow \ x \equiv_a z$.

Ist $x = q \cdot a + x_{\sim a}$ und $y = r \cdot a + y_{\sim a}$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$, so haben wir

$$x_{\sim a} = y_{\sim a} \ \Rightarrow \ x - y = (q - r) \cdot a \in a\mathbb{Z} := a \cdot \mathbb{Z} := \{a \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Umgekehrt folgt aus $x - y \in a\mathbb{Z}$, daß es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = a \cdot n$ gibt, und dann ist $x = n \cdot a + y = (n + r) \cdot a + y_{\sim a}$, also $x_{\sim a} = y_{\sim a}$ gemäß 3.8. Damit ist gezeigt:

$$\boxed{x \equiv_a y \ \Leftrightarrow \ x_{\sim a} = y_{\sim a} \ \Leftrightarrow \ x - y \in a\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{Z} : x - y = a \cdot n \ \Leftrightarrow \ a \mid (x - y).}$$

Beispiele: $0 \cdot \mathbb{Z} = \{0\}, \ 1 \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;
$2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} =:$ Menge der **geraden** Zahlen,
$2\mathbb{Z} + 1 := \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} \overset{3.8}{=} \mathbb{Z} \backslash 2\mathbb{Z} =:$ Menge der **ungeraden** Zahlen,

$3\mathbb{Z} = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\} =$ Menge der durch 3 teilbaren ganzen Zahlen,
$a\mathbb{Z} = \{a \cdot n \mid n \in \mathbb{Z}\} =$ Menge der durch a teilbaren ganzen Zahlen.
$23 \equiv_9 5,\ 23 \equiv_2 -1,\ 23 \equiv_7 30,\ 23 \equiv_{23} 0,\ 23 \equiv_{24} 23.$

22. *Es gilt*
(i) $x = x_{\sim a} \ \Leftrightarrow \ x \in Z_a \ \ \forall\, x \in \mathbb{Z}$,
(ii) $x \equiv_a y \ \Leftrightarrow \ x = y \ \ \forall\, x, y \in Z_a$.

Denn aus $(x \in Z_a \ \Leftrightarrow \ x = 0 \cdot a + x_{\sim a})$ folgt (i), und mithin gilt $(x \equiv_a y \overset{21.}{\Leftrightarrow} x_{\sim a} = y_{\sim a} \ \Leftrightarrow \ x = y)$ für $x, y \in Z_a$, also (ii).

Weiter erhalten wir

23. *Sind* $x, u, y, v \in \mathbb{Z}$ *mit* $x \equiv_a u \ \wedge \ y \equiv_a v$, *so gilt*
(i) $x \equiv_a y \ \Leftrightarrow \ u \equiv_a v$, *(ii)* $(x + y) \equiv_a (u + v)$,
(iii) $(x - y) \equiv_a (u - v)$, *(iv)* $(x \cdot y) \equiv_a (u \cdot v)$.

Beweis: Es gibt $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $x = u + am \ \wedge \ y = v + an$.
Wegen $(x - y) = (u - v) + a(m - n)$ gilt (iii) sowie $[\,a \,|\, (x - y) \ \Leftrightarrow \ a \,|\, (u - v)\,]$, also (i).
Aus $(x + y) = (u + v) + a(m + n)$ folgt (ii),
und aus $x \cdot y = (u + am) \cdot (v + an) = u \cdot v + a \cdot (mv + nu + amn)$ folgt (iv). □

Als Anwendung von 23. erhalten wir

24. **Teilbarkeitsregeln.** *Ist die Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *gemäß 3.19. in der dekadischen Darstellung* $n = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot 10^i$ *mit* $a_i \in Z_{10}$ *für* $i = 0, ..., r$ *vorgegeben, so gilt:*

(i)	*Ist* $x \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ *und ist* $n \equiv_x k$, *so gilt:* $(x \,|\, n \ \Leftrightarrow \ x \,|\, k)$.			
(ii)	$2 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$2 \mid a_0$.	
(iii)	$4 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$.	
(iv)	$8 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$8 \mid a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$.	
(v)	$5 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$5 \mid a_0$.	
(vi)	$3 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$3 \mid \sum_{i=0}^{r} a_i =$	*„Quersumme“*
(vii)	$9 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$9 \mid \sum_{i=0}^{r} a_i =$	*„Quersumme“*
(viii)	$11 \mid n$	$\Leftrightarrow$	$11 \mid \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i =$	*„alternierende Quersumme“.*

Beweis:
(i) $x \,|\, n \ \Leftrightarrow \ x|(0-n) \overset{21.}{\Leftrightarrow} 0 \equiv_x n \overset{Vor.}{\Leftrightarrow} 0 \equiv_x k \overset{21.}{\Leftrightarrow} x|(0-k) \ \Leftrightarrow \ x \,|\, k$.
(ii) $10 \equiv_2 0 \ \Rightarrow \ a_i \cdot 10^i \equiv_2 0 \ \forall i \geq 1 \ \Rightarrow \ n \equiv_2 a_0$.
(iii) $10^2 \equiv_4 0 \ \Rightarrow \ a_i \cdot 10^i \equiv_4 0 \ \forall i \geq 2 \ \Leftrightarrow \ n \equiv_4 a_1 \cdot 10 + a_0$.
(iv) $10^3 \equiv_8 0 \ \Rightarrow \ a_i \cdot 10^i \equiv_8 0 \ \forall i \geq 3 \ \Rightarrow \ n \equiv_8 a_2 \cdot 100 + a_i 10 + a_0$.
(v) $10 \equiv_5 0 \ \Rightarrow \ a_i \cdot 10^i \equiv_5 0 \ \forall i \geq 1 \ \Rightarrow \ n \equiv_5 a_0$.
(vi) $10 \equiv_3 1 \ \Rightarrow \ 10^i \equiv_3 1^i = 1 \ \forall i \geq 0 \ \Rightarrow \ n \equiv_3 \sum_{i=0}^{r} a_i$.
(vii) $10 \equiv_9 1 \ \Rightarrow \ 10^i \equiv_9 1^i = 1 \ \forall i \geq 0 \ \Rightarrow \ n \equiv_9 \sum_{i=0}^{r} a_i$.
(viii) $10 \equiv_{11} -1 \ \Rightarrow \ 10^i \equiv_{11} (-1)^i \ \forall i \geq 0 \ \Rightarrow \ n \equiv_{11} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i$. □

Bemerkung. Die bekannte Neuner– bzw. Elferprobe für eine Rechnung bedeutet einfach, daß man die Rechnung unter Verwendung von (vii) bzw. (viii) modulo 9 bzw. modulo 11 überprüft.

Die folgenden drei Aussagen beziehen sich auf das Dividieren:

25. **Kürzungsregel.** Sind $r, x, y \in \mathbb{Z}$, so gilt: $\boxed{r{\cdot}x \equiv_a r{\cdot}y \;\wedge\; ggT(r,a){=}\,1 \;\Rightarrow\; x \equiv_a y.}$

Beweis: Aus $r \cdot x \equiv_a r \cdot y$ folgt $a|r \cdot (x-y)$. Nach 7. gilt dann $a|(x{-}y)$, also $x \equiv_a y$. □

Gegenbeispiele: $(3 \cdot 2 \equiv_6 3 \cdot 4 \not\Rightarrow 2 \equiv_6 4)$, $(2 \cdot 3 \equiv_{10} 2 \cdot 8 \not\Rightarrow 3 \equiv_{10} 8)$.

26. *Ist $r \in \mathbb{Z}$, so gilt: Genau im Falle $ggT(a,r) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot x \equiv_a 1$.*

Beweis: 1) Ist $ggT(a,r) = 1$, so gibt es nach 4. $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $rx + ay = 1$, also mit $rx - 1 = a \cdot (-y) \in a\mathbb{Z}$ und deshalb mit $rx \equiv_a 1$. 2) Umgekehrt gilt: Ist $x \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot x \equiv_a 1$, so existiert ein $y \in \mathbb{Z}$ mit $rx - 1 = a \cdot (-y)$, und dann ist $rx + ay = 1$. Nach 4. impliziert dies $ggT(a,r) = 1$. □

Beispiele: Für $a = 3$ und $r = 2$ ist $2 \cdot 2 \equiv_3 1$; für $a = 6$ und $r = 2$ ist $2 \cdot x \not\equiv_6 1 \; \forall x \in \mathbb{Z}$.

27. *Ist $r \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(a,r) = 1$, so gibt es zu jedem $t \in \mathbb{Z}$ ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot x \equiv_a t$.*

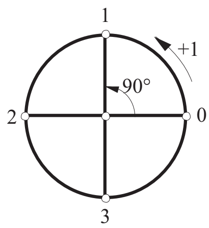
Beweis: Wegen 26. gibt es ein $u \in \mathbb{Z}$ mit $ru \equiv_a 1$, und für $x := ut$ folgt dann $rx \equiv_a t$. □

Für spätere Untersuchungen erweisen sich die folgenden Ausführungen als wichtig, die weitere Eigenschaften des Rechnens „*modulo n*" beinhalten:

28. Für $\boxed{x, y \in Z_a}$ setzen wir $(*)$ $\boxed{\begin{array}{lcll} x +_a y & := & (x+y)_{\sim a} & \in Z_a, \\ x \cdot_a y & := & (x \cdot y)_{\sim a} & \in Z_a \end{array}}$ und nennen diese *neuen Verknüpfungen* „**addieren modulo** a" bzw. „**multiplizieren modulo** a" oder kürzer „plus–a", „mal–a".

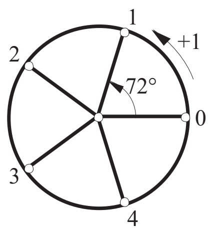
$*$	...	b	...
$\vdots$		$\vdots$	
a	...	$a * b$	...
$\vdots$		$\vdots$	

Wir behaupten, daß die Rechenregeln (R1) bis (R5) der reellen Zahlen für $+_a$ und $\cdot_a$ anstelle von $+$ und $\cdot$ erfüllt sind.
Bevor wir dies ausführen, zeigen wir anhand von Verknüpfungstafeln, die entsprechend dem links stehenden Schema zu lesen sind, wir sich $+_a$ und $\cdot_a$ für $a \in \{4, 5\}$ verhalten:



$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1



$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Hierbei verfährt man wie folgt:
Man rechnet mit den Zahlen aus Z_a zunächst wie gewöhnlich, und nur, wenn das Ergebnis y *nicht* in Z_a liegt, bestimmt man dazu ein $x \in \mathbb{Z}$ derart, daß $z := y - x{\cdot}a$ in Z_a liegt; hier ist dann z das gesuchte Ergebnis.
Übrigens kann man sich das *Addieren* dadurch *veranschaulichen*, daß man die Elemente von Z_a gleichmäßig der Reihe nach auf einem Kreis anordnet und dann *das Hinzuaddieren* von $x \in Z_a$ *als Drehung* um $(x/a) \cdot 360°$ deutet.

Beweis der Regeln (R1) – (R5) für $x, y, z \in Z_a$:
(R1) *Kommutativgesetze:* Es ist $x +_a y = (x + y)_{\sim a} = (y + x)_{\sim a} = y +_a x$ und $x \cdot_a y = (x \cdot y)_{\sim a} = (y \cdot x)_{\sim a} = y \cdot_a x$.

(R2) *Assoziativgesetze:* Es ist $x +_a (y +_a z) \equiv_a x + (y +_a z) \overset{23.}{\equiv_a} x + (y + z) = (x + y) + z \overset{23.}{\equiv_a} (x +_a y) + z \equiv_a (x +_a y) +_a z$, also $x +_a (y +_a z) = (x +_a y) +_a z$ gemäß 22(ii). Entsprechendes gilt, wenn $+$ durch $\cdot$ ersetzt wird.

(R3) *Distributivgesetz:* Es ist $x \cdot_a (y +_a z) \equiv_a x \cdot (y +_a z) \overset{23.}{\equiv_a} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \overset{23.}{\equiv_a} x \cdot_a y + x \cdot_a z \equiv_a x \cdot_a y +_a x \cdot_a z$, also $x \cdot_a (y +_a z) = x \cdot_a y +_a x \cdot_a z$ gemäß 22(ii).

(R4) *Existenz neutraler Elemente:* Es ist $0 +_a x = (0 + x)_{\sim a} = x_{\sim a} \overset{22.}{=} x$ und $1 \cdot_a x = (1 \cdot x)_{\sim a} = x_{\sim a} \overset{22.}{=} x$.

(R5) *Existenz negativer Elemente:* Es ist $0 +_a 0 = 0$, und ist $u \in Z_a \backslash \{0\}$, so ist $0 < u < a$, also $0 = u - u < a - u < a$, d.h. für $v := a - u$ gilt $v \in Z_a$ und $u +_a v = (u + v)_{\sim a} = a_{\sim a} = 0$. □

29. Wenn wir Z_a in Verbindung mit den Verknüpfungen $+_a$ und $\cdot_a$ betrachten, notieren wir dies als $Z_a(+_a, \cdot_a)$ und bezeichnen diese Struktur als **Reste-Ring modulo a**.

Abschließend zeigen wir nun

30. **Satz**. *Für $Z_a(+_a, \cdot_a)$ gelten die Regeln (R1)–(R6) genau dann, wenn a eine Primzahl ist.*

Beweis: Gemäß 28. ist nur zu zeigen, daß (R6) genau dann gilt, wenn a eine Primzahl ist:

1) Es sei $a \in \mathbb{P}$ und $u \in Z_a \backslash \{0\}$. Wegen $u < a$ ist $ggT(u, a) = 1$, und dann gibt es nach 26. ein $w \in \mathbb{Z}$ mit $u \cdot w \equiv_a 1$. Für $v := w_{\sim a}$ erhalten wir nun $v \in Z_a$ und $u \cdot_a v \equiv_a u \cdot v \overset{23.}{\equiv_a} u \cdot w \equiv_a 1$, also $u \cdot_a v = 1$ gemäß 22.(ii), und folglich ist (R6) gültig.

2) Es sei $a \notin \mathbb{P}$, d.h. es gebe $r, s \in Z_a$ mit $1 < r \;\wedge\; 1 < s \;\wedge\; r \cdot s = a$. Dann ist $r \cdot_a s = a_{\sim a} = 0$. Gäbe es nun zu s ein $t \in Z_a$ mit $s \cdot_a t = 1$, so hätten wir $r = r \cdot_a 1 = r \cdot_a (s \cdot_a t) = (r \cdot_a s) \cdot_a t = 0 \cdot_a t \equiv_a 0$, also $r = 0$ gemäß 22(ii). Demnach läßt sich zu s in Z_a kein t mit $s \cdot_a t = 1$ finden, d.h. (R6) ist nicht gültig. □

5. Grundbegriffe der Mengenlehre

Die Mengenlehre ermöglicht es den Mathematikern, für sehr verschiedenartige Konzepte eine einheitliche Sichtweise zu entwickeln.

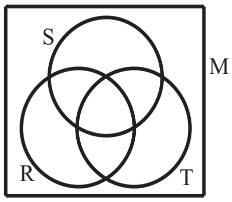
Damit erfährt das Lehrgebäude der Mathematik eine gewaltige Bereicherung, und zugleich wird die Mathematik in vielen Gebieten anwendbar, die ihr früher verschlossen waren.

A. Regeln für den Umgang mit Mengen

Ausgehend von den schon eingeführten Notationen und Begriffen geben wir zunächst einige Zusammenhänge an, die aus Regeln der Logik folgen, welche man ihrerseits durch Wahrheitstafeln bestätigen kann. Soweit es sich hierbei um drei Aussagen A, B, C handelt, müssen alle acht Kombinationen $www, wwf, wfw, wff, fww, fwf, ffw, fff$ in einer entsprechenden Tabelle aufgelistet und verglichen werden (vgl. d. Übungen).

1. Die folgende Gegenüberstellung bezieht sich auf Aussagen A, B, C und auf Mengen R, S, T, M mit $(R \cup S) \cup T \subseteq M$.

Man kann diese Regeln anschaulich bestätigen, indem man im nebenstehenden Diagramm geeignete Schraffuren vergleicht:



(A) Aussagenlogik	(M) Mengenlehre	Bezeichnung
$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ $A \dot\vee B \Leftrightarrow B \dot\vee A$	$R \cap S = S \cap R$ $R \cup S = S \cup R$ $R \triangle S = S \triangle R$	Kommutativgesetze
$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ $(A \dot\vee B) \dot\vee C \Leftrightarrow A \dot\vee (B \dot\vee C)$	$(R \cap S) \cap T = R \cap (S \cap T)$ $(R \cup S) \cup T = R \cup (S \cup T)$ $(R \triangle S) \triangle T = R \triangle (S \triangle T)$	Assoziativgesetze
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \wedge (B \dot\vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \dot\vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$ $R \cap (S \triangle T) = (R \cap S) \triangle (R \cap T)$ $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$	Distributivgesetze
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$	$R \setminus (S \cap T) = (R \setminus S) \cup (R \setminus T)$ $R \setminus (S \cup T) = (R \setminus S) \cap (R \setminus T)$	Regeln von DE MORGAN
$A \vee \neg A$ ist stets wahr	$R \cup (M \setminus R) = M$	(A) Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$A \wedge \neg A$ ist stets falsch	$R \cap (M \setminus R) = \emptyset$	(A) Satz vom Widerspruch
$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	$M \setminus (M \setminus R) = R$	(A) Satz v. d. doppelten Verneinung
$A \vee A \Leftrightarrow A$ $A \wedge A \Leftrightarrow A$	$R \cup R = R$ $R \cap R = R$	(M) Idempotenz
$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$R \cap (R \cup S) = R$ $R \cup (R \cap S) = R$	(M) Adjunktivität
$A \wedge B \Rightarrow A$ $A \Rightarrow A \vee B$	$R \cap S \subseteq R$ $R \subseteq R \cup S$	(M) Subjunktivität
$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$	$R = M \wedge R \subseteq S \Rightarrow S = M$	(A) Abtrennungsregel
$((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$ $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$R = S \wedge S = T \Rightarrow R = T$ $R \subseteq S \wedge S \subseteq T \Rightarrow R \subseteq T$	Transitivität

2. Um wie üblich **Klammern** zu sparen, vereinbart man:
Die Symbole $\cdot$, $:$ binden enger als $+$, $-$;
diese binden enger als $\cap, \cup, \triangle, \setminus$;
diese binden enger als $\subset, \subseteq, =$;
diese binden enger als $\neg$;
diese binden enger als $\wedge, \vee, \dot\vee$;
diese binden enger als $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Beispiele	$3 \cdot 4 + 5 = 17 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 4 = 12$	steht für	$(((3 \cdot 4) + 5) = 17) \;\Rightarrow\; ((3 \cdot 4) = 12)$
	$R \cap S = S \cap R$	steht für	$(R \cap S) = (S \cap R)$
	$A \vee A \;\Leftrightarrow\; A$	steht für	$(A \vee A) \;\Leftrightarrow\; A$

Damit ist insbesondere klar, wie die in 1. angegebenen Gesetze zu verstehen sind.

B. Quantoren

3. Die bereits verwendeten Symbole $\forall$, $\exists$ werden von den Logikern als *Quantoren* bezeichnet.

Statt „$n \leq n^2 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$“, gelesen: „$n$ ist kleinergleich n^2 *für alle* n aus $\mathbb{N}$“, kann man auch „$\forall \ n \in \mathbb{N} : n \leq n^2$“ oder „$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ (n \leq n^2)$“ schreiben; man bezeichnet „$\forall$“ als *Allquantor*. Den sog. *Existenzquantor* „$\exists$“ stellt man dagegen *stets* voran: „$\exists \ n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$“ oder auch „$\exists_{n \in \mathbb{Z}} \ (n^2 = 9)$“ wird gelesen als „**es gibt** wenigstens ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n^2 = 9$“.

Das Wort „wenigstens“ wird oft weggelassen. Demnach bedeutet „es gibt ein“ im mathematischen Sprachgebrauch stets „es gibt wenigstens ein“. Soll zusätzlich festgestellt werden, daß nicht mehr als ein Element existiert, welches die angegebene Bedingung erfüllt, so sagt man: „es gibt *genau ein* x mit ...“, und verwendet das Zeichen „$\exists_1$“ statt „$\exists$“. Z.B. ist „$\exists \ n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$“ wahr und „$\exists_1 \ n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$“ falsch. Ist n eine natürliche Zahl und gibt es in einer Menge M genau n verschiedene Elemente, die die Bedingung $S(x)$ erfüllen, so schreibt man $\exists_n \ x \in M : S(x)$.

4. *Regeln für den Umgang mit Quantoren*

Ist A eine Aussage, ist M eine Menge und ist $S(x)$ eine Bedingung für Elemente x von M, so ist folgendes zu beachten:
(i) Die „Variable“ darf ersetzt werden:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \exists \ x \in M \ : \ S(x) & \Leftrightarrow & \exists \ y \in M \ : \ S(y), \\ \forall \ x \in M \ : \ S(x) & \Leftrightarrow & \forall \ y \in M \ : \ S(y). \end{array}}$$

(ii) Für die *Negation* gelten die erweiterten Regeln von DE MORGAN

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \neg \ (\forall \ x \in M \ : \ S(x)) & \Leftrightarrow & \exists \ x \in M \ : \ (\neg S(x)), \\ \neg \ (\exists \ x \in M \ : \ S(x)) & \Leftrightarrow & \forall \ x \in M \ : \ (\neg S(x)). \end{array}}$$

(iii) Für Konjunktion und Disjunktion gilt

$$\boxed{\begin{array}{lcl} A \genfrac{}{}{0pt}{}{\wedge}{\vee} \forall_{x \in M} \ (S(x)) & \Leftrightarrow & \forall_{x \in M} \ (A \genfrac{}{}{0pt}{}{\wedge}{\vee} S(x)), \\ A \genfrac{}{}{0pt}{}{\wedge}{\vee} \exists_{x \in M} \ (S(x)) & \Leftrightarrow & \exists_{x \in M} \ (A \genfrac{}{}{0pt}{}{\wedge}{\vee} S(x)). \end{array}}$$

Beispiel zu (ii):
M sei die Menge der Studenten in diesem Hörsaal; „$S(x)$“ bedeute: „Der Student x besitzt einen Kugelschreiber.“ Dann folgt:

$$\begin{array}{rcl} \forall_{x \in M}(S(x)) & \Leftrightarrow & \text{Jeder Student in diesem Hörsaal besitzt einen } K. \\ \neg\forall_{x \in M}(S(x)) & \Leftrightarrow & \text{Nicht jeder Student in diesem Hörsaal besitzt einen } K. \\ & \Leftrightarrow & \text{Es gibt (wenigstens) einen Studenten in diesem Hörsaal,} \\ & & \text{der keinen } K. \text{ besitzt} \\ & \Leftrightarrow & \exists_{x \in M}(\neg S(x)). \end{array}$$

Die Regel (ii) lautet also: Beim Vertauschen des Negationszeichens mit einem Quantor ändert sich der Quantor. Dies bedeutet: **Die Negation „zielt“ stets auf den Quantor**, nicht auf die Bedingung $S(x)$. Es wäre also *falsch*, die Negation von „Jeder Student in diesem Hörsaal besitzt einen Kugelschreiber.“ durch „Kein Student in diesem Hörsaal besitzt einen Kugelschreiber.“ oder „Jeder Student außerhalb dieses Hörsaals besitzt einen K.“ oder „Jeder Student in diesem Hörsaal besitzt einen Füllfederhalter.“ anzugeben.

C. Mengen von Mengen

5. Mengen, deren Elemente selbst Mengen sind, werden als Mengen von Mengen oder als **Mengensysteme** bezeichnet.

Beispiel: Ist M eine Menge, so wird das System **aller** Teilmengen von M als die **Potenzmenge** $\mathfrak{P}(M)$ von M bezeichnet.

Beispiele dazu:

$$\begin{array}{lcll} M=\{1,2,3\} & \Rightarrow & \mathfrak{P}(M) &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}, \\ M=\{1,2\} & \Rightarrow & \mathfrak{P}(M) &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}, \\ M=\{1\} & \Rightarrow & \mathfrak{P}(M) &= \{\emptyset,\{1\}\}, \\ M=\emptyset & \Rightarrow & \mathfrak{P}(M) &= \{\emptyset\}, \end{array}$$

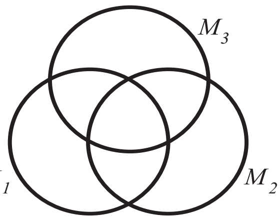
wobei $8,4,2,1$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{P}(M)$ ist. Man beachte: Ist $M=\emptyset$, so hat M kein Element, aber $\mathfrak{P}(M)$ enthält ein Objekt, nämlich $\emptyset$!

Warnung:
Die Zusammenfassung **aller** Mengen liefert keine Menge. (RUSSELsche Antinomie).

6. Es sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem, also eine Menge von Mengen.

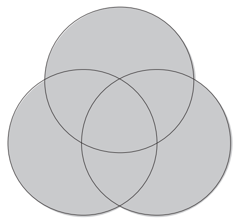
Beispiel:

$$\mathfrak{M}_0 = \{M_1, M_2, M_3\} :$$



Wir setzen

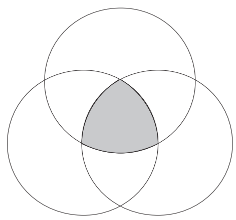
$$\bigcup \mathfrak{M} := \bigcup_{M\in\mathfrak{M}} M := \{x \mid \exists_{M\in\mathfrak{M}}\,(x\in M)\} \qquad \bigcup \mathfrak{M}_0 :$$



und nennen $\bigcup \mathfrak{M}$ die **Vereinigung über $\mathfrak{M}$** oder die **Vereinigung der Elemente von $\mathfrak{M}$**. Diese besteht aus allen Elementen x, die in (wenigstens) einer der Mengen $M\in\mathfrak{M}$ liegen. Im Falle $\mathfrak{M}=\emptyset$ ist auch $\bigcup\mathfrak{M}=\emptyset$. Es entsprechen sich $\bigcup$ und $\exists$.

Im Falle $\mathfrak{M}\neq\emptyset$ setzen wir

$$\bigcap \mathfrak{M} := \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} M := \{x \mid \forall_{M\in\mathfrak{M}}\,(x\in M)\} \qquad \bigcap \mathfrak{M}_0 :$$



und nennen $\bigcap\mathfrak{M}$ den **Durchschnitt über $\mathfrak{M}$** oder den **Durchschnitt der Elemente von $\mathfrak{M}$.** Dieser besteht aus allen Elementen x, die in jeder der Mengen $M\in\mathfrak{M}$ liegen. Es entsprechen sich $\bigcap$ und $\forall$.

Wir gehen davon aus, daß $\mathfrak{P}(M), \bigcup\mathfrak{M}, \bigcap\mathfrak{M}$ stets Mengen sind, wenn M eine Menge und $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem ist.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem und ist R eine weitere Menge, so ergeben sich die Regeln

(i) $x\in\bigcap\mathfrak{M} \;\Leftrightarrow\; \forall\, M\in\mathfrak{M} : x\in M$, (ii) $x\in\bigcup\mathfrak{M} \;\Leftrightarrow\; \exists\, M\in\mathfrak{M} : x\in M$,

(iii) $\left(\bigcap\mathfrak{M}\right) \overset{\cup}{\underset{\setminus}{\cap}} R = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}}\left(M \overset{\cup}{\underset{\setminus}{\cap}} R\right)$, (iv) $\left(\bigcup\mathfrak{M}\right) \overset{\cup}{\underset{\setminus}{\cap}} R = \bigcup_{M\in\mathfrak{M}}\left(M \overset{\cup}{\underset{\setminus}{\cap}} R\right)$.

D. Kartesisches Produkt

7. Sind a, b zwei (nicht notwendig verschiedene) Objekte, so lassen sich diese zu einem **geordneten Paar** $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ zusammenfassen. Bei der Paarbildung kommt es – im Unterschied zur Mengenbildung – auf die Reihenfolge „erst a, dann b“ an.

Deshalb wird a als **erste** und b als **zweite** Komponente von (a, b) bezeichnet:

Zwei Paare sind genau dann **gleich**, wenn sie in beiden Komponenten übereinstimmen:

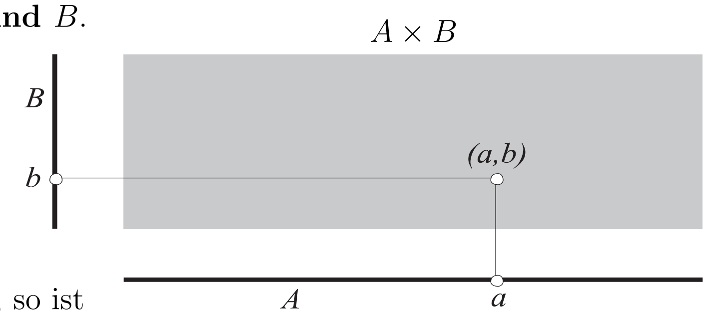
$$\boxed{(a,b) = (c,d) \;\Leftrightarrow\; a = c \;\wedge\; b = d}\,.$$

Sind A, B zwei (nicht unbedingt verschiedene) Mengen, so heißt

$$\boxed{A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \;\wedge\; b \in B\}}$$

das **kartesische Produkt von** A **und** B.

Veranschaulichung:



Ist $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{5, 6, 8, 9\}$, so ist

$A \times B = \{(1,5), (1,6), (1,8), (1,9), (2,5), (2,6), (2,8), (2,9), (3,5), (3,6), (3,8), (3,9)\}$,

d.h. $A \times B$ besteht aus allen Paaren mit der ersten Komponente in A und der zweiten Komponente in B.

Im Allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$. Außerdem ist $A \times B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

Für kartesische Produkte gelten die Regeln (vgl. die Übungen):

(i) $A \subseteq S \;\wedge\; B \subseteq T \;\Rightarrow\; A \times B \subseteq S \times T$, (ii) $(A \overset{\cup}{\cap} B) \times S = (A \times S) \overset{\cup}{\cap} (B \times S)$,

(iii) $(A \cap B) \times (S \cap T) = (A \times S) \cap (B \times T)$, (iv) $(A \cup B) \times (S \cup T) \supseteq (A \times S) \cup (B \times T)$.

Eines der wichtigsten Beispiele ist für uns $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$, denn dieses ist die Menge der Punkte der sog. **Anschauungsebene**.

E. Relationen

8. Gegeben sei eine Menge M. Ist jedem Paar $(x, y) \in M \times M$ eine Aussage $R(x, y)$ zugeordnet, so wird R eine **Relation auf** M genannt.

Ist $R(x, y)$ *wahr*, so schreiben wir xRy und sagen, x **und** y **stehen in Relation**. Ist $R(x, y)$ *falsch*, so schreiben wir $\neg(xRy)$ und sagen, x und y stehen **nicht** in Relation. Die Teilmenge

$$\text{Graph}\,(R) := \{(x,y) \in M \times M \mid xRy\}$$

von $M \times M$ wird der **Graph von** R genannt.

Beispiel: 1) Es sei $M = \mathbb{R}$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x < y$“. Dann besteht Graph(R) aus allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x < y$ (das sind alle Punkte „oberhalb“ der Geraden $\{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$).

2) Es sei $M = \{0, 1, 2, 4\}$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x^2 = y$.“ Dann ist Graph $(R) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$.

9. Für uns sind vor allem diejenigen Relationen von Interesse, die die Grundeigenschaften des Gleichheitszeichens besitzen:

Ist M eine nichtleere Menge und ist R eine Relation auf M mit

(Rf) **Reflexivität**: $xRx \ \forall\ x \in M$,

(Sy) **Symmetrie**: $xRy \ \Rightarrow\ yRx \ \forall\ x, y \in M$,

(Tr) **Transitivität**: $xRy \ \wedge\ yRz \ \Rightarrow\ xRz \ \forall\ x, y, z \in M$,

so wird R eine **Äquivalenzrelation auf** M genannt.

Beispiele für Äquivalenzrelationen:

(i) Es sei $M \neq \emptyset$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x = y$“.

(ii) Es sei $M \neq \emptyset$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x, y \in M$“.

(iii) Es sei $M = \mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x \equiv_a y$“.

(iv) Es sei $M = \mathbb{Q}$, und $R(x, y)$ sei die Aussage „$x^2 = y^2$“.

(v) Es sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und $R((a, b), (c, d))$ sei die Aussage „$a - b = c - d$“.

(vi) Es sei $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, und $R((a, b), (c, d))$ sei die Aussage „$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$“.

Man kann den Begriff der Äquivalenzrelation als eine *Erweiterung des Gleichheitsbegriffes* verstehen.

Dies wird deutlicher durch die nachfolgenden Ausführungen:

10. Ist eine nichtleere Menge M vorgegeben und ist $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von M mit

(P1) $X \neq \emptyset \quad \forall\ X \in \mathfrak{M}$,

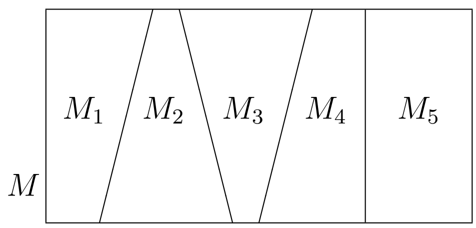
(P2) $\bigcup \mathfrak{M} = M$,

(P3) $X \neq Y \ \Rightarrow\ X \cap Y = \emptyset \qquad \forall\ X, Y \in \mathfrak{M}$,

so wird $\mathfrak{M}$ eine **Zerlegung** oder **Klasseneinteilung** oder **Partition von** M genannt, und die Elemente von $\mathfrak{M}$ heißen auch **Teile** oder **Klassen** der Zerlegung $\mathfrak{M}$.

Anders gesagt: Ein System $\mathfrak{M}$ nichtleerer Teilmengen von M ist eine *Zerlegung von* M, wenn jedes Element von M in genau einem der Teile von $\mathfrak{M}$ vorkommt.

Eine Partition der Menge M ist hier $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$:



Wir nennen zwei Mengen **disjunkt**, wenn ihr Durchschnitt leer ist. Demnach bedeutet (P3), daß je zwei verschiedene Teile von $\mathfrak{M}$ disjunkt sind.

Beispiele: 1) Die Menge der Teile eines Puzzles kann als Zerlegung des Gesamtbildes verstanden werden.

2) Ist $M := \{1,2,3,4\}$, so sind $\mathfrak{M}_1 := \{\{1,3\},\{2,4\}\}, \mathfrak{M}_2 := \{\{1,2,4\},\{3\}\}$, $\mathfrak{M}_3 := \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}, \mathfrak{M}_4 := \{\{1,2,3,4\}\}$ Beispiele für Zerlegungen von M.

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, daß zwischen Zerlegungen und Äquivalenzrelationen ein sehr direkter Zusammenhang besteht:

11. **Satz.** *Ist M eine nichtleere Menge und ist $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung von M, so ist durch*

$$(xR_{\mathfrak{M}}\, y \quad\Leftrightarrow\quad \exists\; A \in \mathfrak{M} : x, y \in A) \qquad \forall\; x, y \in M$$

eine Äquivalenzrelation $R_{\mathfrak{M}}$ auf M definiert.

Man nennt $R_{\mathfrak{M}}$ *die durch $\mathfrak{M}$ bestimmte Äquivalenzrelation* und bezeichnet die Teile von $\mathfrak{M}$ als *die zu $R_{\mathfrak{M}}$ gehörigen Äquivalenzklassen.*

Die Relation $R_{\mathfrak{M}}$ beschreibt tatsächlich ein „Gleichsein im weiteren Sinne“: Zwei Elemente von M stehen genau dann in Relation, wenn sie *zum gleichen Teil der Zerlegung gehören.*

Beweis: (Rf): Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $A \in \mathfrak{M}$ mit $x \in A$, und es gilt $x, x \in A$, also $xR_{\mathfrak{M}}\, x$. (Sy): Sind $x, y \in M$ mit $xR_{\mathfrak{M}}\, y$, so gibt es ein $A \in \mathfrak{M}$ mit $x, y \in A$, also mit $y, x \in A$, und es folgt $yR_{\mathfrak{M}}\, x$. (Tr): Sind $x, y, z \in M$ mit $xR_{\mathfrak{M}}\, y \;\wedge\; yR_{\mathfrak{M}}\, z$, so gibt es $A, B \in \mathfrak{M}$ mit $x, y \in A \;\wedge\; y, z \in B$. Wegen $y \in A \cap B$ ist $A = B$, und es folgt $x, z \in A$, also $xR_{\mathfrak{M}}\, z$. $\square$

Als Gegenstück zu 11. zeigen wir

12. **Satz.** *Ist R eine Äquivalenzrelation auf M, so sei $[x]_R := \{y{\in}M \mid yRx\}$ für $x{\in}M$ die sog. zu x gehörige Äquivalenzklasse bzgl. R. Diese besteht aus den sämtlichen Elementen von M, die zu x bzgl. R in Relation stehen. Es gilt*
(i) $x \in [x]_R \;\forall\; x \in M$.
(ii) $y \in [x]_R \;\Leftrightarrow\; yRx \;\Leftrightarrow\; [y]_R = [x]_R \;\forall\; x, y \in M$.
(iii) $\mathfrak{M}_R := \{[x]_R | x \in M\}$ *ist eine Zerlegung von M, auch die zu R gehörige Klasseneinteilung genannt.*

Beweis: (i) gilt wegen $xRx \;\forall\; x \in M$.
(ii): 1) Definitionsgemäß gilt $y \in [x]_R \;\Leftrightarrow\; yRx$ für $x, y \in M$. 2) Gegeben seien $x, y \in M$ mit yRx. Ist $z \in [y]_R$, so folgt zRy, also zRx und damit $z \in [x]_R$. Demnach ist $[y]_R \subseteq [x]_R$. Da auch xRy gilt, haben wir ebenso $[x]_R \subseteq [y]_R$ und damit schließlich $[y]_R = [x]_R$. 3) Aus $[x]_R = [y]_R$ folgt $y \in [y]_R = [x]_R$.
(iii) Wegen (i) sind (P1) und (P2) für $\mathfrak{M}_R$ gültig. Sind $x, y \in M$ und gibt es ein $z \in [x]_R \cap [y]_R$, so führt (ii) auf $[x]_R = [z]_R = [y]_R$, und mithin ist auch (P3) für $\mathfrak{M}_R$ erfüllt. $\square$

13. *Bemerkung.* Die Sätze 11. und 12. merkt man sich am einfachsten in der Kurzfassung

Jede Klasseneinteilung legt eine Äquivalenzrelation fest, und jede Äquivalenzrelation bewirkt eine Klasseneinteilung.

Das ist hier allgemein ausgeführt und muß dann in speziellen Situationen nicht immer wieder neu bewiesen werden.

14. Als *Anwendungsbeispiel* für 12. betrachten wir die *Kongruenz modulo* a für $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$:

Nach 4.21. Ist $\boxed{\equiv_a}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Für $x \in \mathbb{Z}$ ist $\boxed{x + a\mathbb{Z} := \{x + a{\cdot}z \mid z \in \mathbb{Z}\}}$ die zu x gehörige Äquivalenzklasse bzgl. $\equiv_a$, jetzt auch **Restklasse modulo** a genannt, denn für $x, y \in \mathbb{Z}$ ist

$$y \equiv_a x \overset{4.21.}{\Leftrightarrow} y - x \in a\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; y = x + a{\cdot}z \text{ mit } z \in \mathbb{Z}.$$

Nach 12.(ii) haben wir dann

$$(*) \qquad \boxed{y - x \in a\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; y \equiv_a x \;\Leftrightarrow\; y + a\mathbb{Z} = x + a\mathbb{Z}}$$

für $x, y \in \mathbb{Z}$, d.h. die *Kongruenz modulo a entspricht der Gleichheit der Restklassen modulo a*. Für $a = 4$ haben wir vier Restklassen modulo a, nämlich

$$\begin{aligned}
0 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -12, -8, -4, \boxed{0}, 4, 8, 12, \ldots\},\\
1 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -11, -7, -3, \boxed{1}, 5, 9, 13, \ldots\},\\
2 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -10, -6, -2, \boxed{2}, 6, 10, 14, \ldots\},\\
3 + 4\mathbb{Z} &= \{\ldots, -9, -5, -1, \boxed{3}, 7, 11, 15, \ldots\}
\end{aligned}$$

mit $1 + 4\mathbb{Z} = -11 + 4\mathbb{Z} = 13 + 4\mathbb{Z} \neq 14 + 4\mathbb{Z} = 2 + 4\mathbb{Z}$.

Indem man die Spalten von links nach rechts durchgeht, wird plausibel, daß jede ganze Zahl genau einmal vorkommt.

An den eingerahmten Zahlen erkennt man, daß jede Klasse genau ein Element von $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ enthält; man sagt auch, **jeder Rest repräsentiert genau eine Restklasse.**

Abschließend erwähnen wir

15. Eine Relation R auf einer nichtleeren Menge M heißt **Ordnungsrelation**, wenn gilt:

(Rf) **Reflexivität**: $xRx \quad \forall\, x \in M$,

(An) **Antisymmetrie**: $xRy \;\wedge\; yRx \;\Rightarrow\; x = y \qquad \forall\, x, y \in M$,

(Tr) **Transitivität**: $xRy \;\wedge\; yRz \;\Rightarrow\; xRz \qquad \forall\, x, y, z \in M$.

Standardbeispiele für Ordnungsrelationen sind die Relationen $\leq$ und $\geq$ auf $\mathbb{R}$ sowie die Relation $\mid$ (teilt) auf $\mathbb{N}$.

6. Abbildungen

A. Abbildungstypen

Der Begriff der Abbildung ist eines der wichtigsten Konzepte der Mathematik. Im Rahmen der Mengenlehre wird er wie folgt festgelegt:

1. Es seien A, B zwei nichtleere und nicht notwendig verschiedene Mengen. Eine Vorschrift f, die *jedem* $x \in A$ in eindeutiger Weise ein Element $f(x)$ aus B zuordnet, heißt **Abbildung** oder **Funktion von A in B.**

A heißt **Definitionsbereich** oder **Urbildbereich von f,**
B heißt **Bildbereich von f,**
$f(x)$ heißt **das Bild von** x oder **der Wert von f an der Stelle** x,
x heißt **ein Urbild des Elementes $f(x)$ bzgl. f.**

Die Menge aller Abbildungen von A in B wird mit Abb (A, B) bezeichnet.

Beispiel 1:
$A = \{a, b, c, d\}, B = \{3, 4, 5, 7, 9\}$,
$f(a) = f(b) = 4, f(c) = 5, f(d) = 7$, also

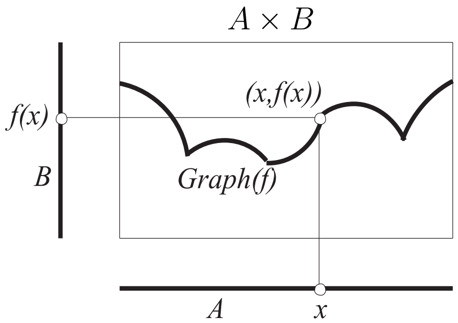
$$\begin{array}{rl} A: & \boxed{a \quad b \quad c \quad d} \\ f: & \quad\searrow\!\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B: & \boxed{3 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 9} \end{array}$$

Beispiel 2: $A = B = \mathbb{R} \ \wedge \ f(x) = x^2 \ \forall \ x \in A$.

Beispiel 3: $A = \mathbb{N} \ \wedge \ B = \{a, b\} \ \wedge \ f(x) = \begin{cases} a & , \text{ falls } \ x \ \text{ gerade,} \\ b & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel 4: $A = B = \mathbb{R} \ \wedge \ f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

2. Durch die Vorschrift f ist eine Teilmenge $\{(x, f(x)) | x \in A\}$ von $A \times B$ festgelegt; diese wird als **Graph von** f, in Zeichen: **Graph** (f), bezeichnet.



Definitionsgemäß gibt es zu jedem x aus A genau ein $f(x)$ aus B, also genau ein y aus B mit $(x, y) \in$ Graph (f). Demnach ist die Vorschrift f genau dann bekannt, wenn Graph (f) bekannt ist.
Eine Teilmenge F von $A \times B$ ist genau dann der Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn die Menge $\{x\} \times B$ für jedes $x \in A$ genau ein Element (x, y) von F enthält; es ist dann $y = f(x)$.

3. Zwei Abbildungen f_1, f_2 von A in B heißen **gleich**, in Zeichen: $f_1 = f_2$, wenn ihre Graphen gleich sind, wenn also

$$(*) \qquad \boxed{f_1(x) = f_2(x) \qquad \forall \ x \in A}$$

gilt. Zum *Nachweis der Gleichheit* von zwei Abbildungen ist es häufig notwendig, die Gültigkeit von $(*)$ nachzuprüfen. Später werden wir allerdings noch andere Möglichkeiten kennenlernen, Gleichheit zu bestätigen.

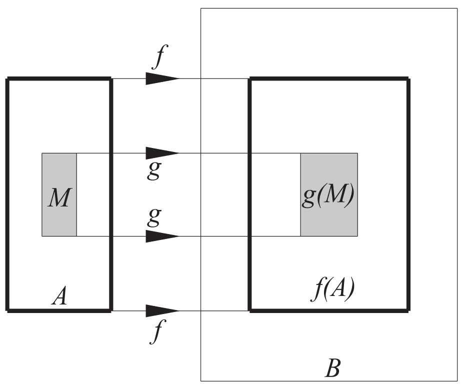
Achtung! Es ist **streng** zu unterscheiden zwischen der Vorschrift f und dem Element $f(x)$. (Dies wird in der Schule oft nicht getan.)

Schreibweisen: Für Abbildungen von A in B schreiben wir

$$f : A \to B \quad \text{oder} \quad A \xrightarrow{f} B \quad \text{oder} \quad f : A \to B : x \to f(x) \quad \text{oder} \quad f : \begin{cases} A & \to & B \\ x & \to & f(x) \end{cases}.$$

4. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und ist M eine nichtleere Teilmenge von A, so wird die Abbildung $g : M \to B : x \to f(x)$ **die Restriktion von** f **auf** M genannt, und man notiert g als $f|_M$. Zugleich wird f auch als **Fortsetzung von** g **auf** A bezeichnet.

Beispiel: Ist $f : \{1, \dots, 5\} \to \mathbb{N} : x \to x^2$
und ist $M = \{1, 2\}$, so ist
$f|_M : \{1, 2\} \to \mathbb{N} : x \to x^2$.



5. **Induzierte Abbildung.** Ist f eine Abbildung von A in B und ist $X \subseteq A$, so heißt $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ das **Bild von X unter f.** Dieses besteht aus allen denjenigen Elementen von B, die Bild (wenigstens) eines Elementes aus X sind. Speziell wird $f(A)$ auch mit **Bild** f bezeichnet und **Bild von** f genannt.

$$\begin{array}{ll} A: & \boxed{\begin{array}{c} X \\ \boxed{a \quad b \quad c} \quad d \end{array}} \\ f: & \quad\searrow\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B: & \boxed{\begin{array}{c} 3 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 7 \quad 9 \\ f(X) \end{array}} \end{array}$$

Es ist $\boxed{y \in f(X) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in X \text{ mit } y = f(x)}$.

Da jeder Teilmenge X von A eine Bildmenge $f(X)$ in B eindeutig zugeordnet ist, ist

$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathfrak{P}(A) & \to & \mathfrak{P}(B) \\ X & \to & f(X) \end{cases}$ eine Abbildung von der Potenzmenge von A in die Potenzmenge von B. Wir sagen, $\mathbf{f}$ ist **die durch f induzierte Potenzmengenabbildung von $\mathfrak{P}(A)$ in $\mathfrak{P}(B)$.** (Oft schreibt man einfach f statt $\mathbf{f}$; es muß dann aus dem Zusammenhang ersehen werden, ob f oder $\mathbf{f}$ gemeint ist.)

Beispiele: floor $([1,3[) = \{1,2\}$, floor $([1,3]) = \{1,2,3\}$.

6. **Umkehrabbildung.** Ist f eine Abbildung von A in B und ist $Y \subseteq B$, so wird $f^{-1}(Y) := \{x{\in}A \mid f(x){\in}Y\}$ das **Urbild von Y bzgl. f** genannt. Dieses besteht aus allen denjenigen Elementen von A, deren Bilder in Y liegen.

$$\begin{array}{ll} A: & \boxed{\begin{array}{c} f^{-1}(Y) \\ \boxed{a \quad b \quad c} \quad d \end{array}} \\ f: & \quad\searrow\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B: & \boxed{\begin{array}{c} \boxed{3 \quad 4 \quad 5} \quad 7 \quad 9 \\ Y \end{array}} \end{array}$$

Es ist $\boxed{x \in f^{-1}(Y) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in Y \quad \forall\, x \in A}$.

Definitionsgemäß ist $f^{-1}(B) = A$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Da jeder Teilmenge Y von B eine Urbildmenge $f^{-1}(Y)$ in A eindeutig zugeordnet ist, ist $\mathbf{f^{-1}} : \begin{cases} \mathfrak{P}(B) & \to & \mathfrak{P}(A) \\ Y & \to & f^{-1}(Y) \end{cases}$ eine Abbildung von der Potenzmenge von B in die Potenzmenge von A. Wir sagen, $\mathbf{f^{-1}}$ ist die zu f gehörige **Umkehrabbildung.** (Oft schreibt man einfach f^{-1} statt $\mathbf{f^{-1}}$.)

Beispiele: $\text{floor}^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{R}$, $\text{floor}^{-1}(\{1, \frac{3}{7}, \frac{17}{3}\}) = [1,2[$.

7. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **injektiv** oder **eineindeutig** oder **Injektion**, in Zeichen: $f : A \overset{1-1}{\to} B$ oder $f : A \overset{\text{inj}}{\to} B$, wenn jedes Element von B höchstens ein Urbild bzgl. f besitzt, wenn also eine der Bedingungen

$$\begin{array}{ll} A: & \boxed{a \quad b \quad c \quad d \quad e} \\ f: & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ B: & \boxed{7 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 9 \quad 1} \end{array}$$

$\boxed{(f(x) = f(u) \;\Rightarrow\; x = u) \quad \forall\, x,u \in A}$ (Test 1)

$\boxed{(x \neq u \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(u)) \quad \forall\, x,u \in A}$ (Test 2)

erfüllt ist.

Beispiele: 1) $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \to x^2$ ist injektiv, nicht aber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$.

2) Die Abbildung floor ist nicht injektiv.

8. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **surjektiv** oder **Abbildung „auf"** oder **Abbildung von A auf B** oder **Surjektion**, in Zeichen: $f : A \overset{\text{auf}}{\to} B$ oder $f : A \overset{\text{surj}}{\to} B$, wenn $f(A) = B$ ist, wenn also zu jedem $y \in B$ (wenigstens) ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.

Beispiele: 1) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \to x^2$ ist surjektiv, nicht aber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$.
2) $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\} : x \to x + 1$ ist surjektiv, nicht aber $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \to x + 1$.
3) Die Abbildung floor (mit Bildbereich $\mathbb{R}$) ist nicht surjektiv.

4) Graphisches Beispiel:

$$\begin{array}{l|ccccccc|}
A: & a & b & c & d & e & x & y \\
f: & \searrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \swarrow \\
B: & & 7 & 4 & 5 & & 3 &
\end{array}$$

9. Um festzustellen, *ob* eine Abbildung $f : A \to B : x \to f(x)$ *surjektiv* ist, geht man oft wie folgt vor:

(i) Man denkt sich im *Bildbereich*, also in B, ein beliebiges Element y gegeben. Man weiß lediglich, daß dieses Element den Namen „y" hat und daß $\boxed{y \in B}$ ist, nichts weiter.

(ii) Durch Untersuchen der Eigenschaften von f muß man herausfinden, ob sich im *Urbildbereich* A irgendwo ein Element x finden läßt, welches durch f auf y abgebildet wird.

Beispiele: 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$ ist nicht surjektiv, weil wir zu dem speziell gewählten Element $y = -1$ kein Urbild in $\mathbb{R}$ finden können (denn es gilt $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$).

2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \to x^2$ ist surjektiv, denn ist $y \in \mathbb{R}_+$ beliebig gewählt, so gibt es in $\mathbb{R}$ ein Element x mit $x^2 = y$, nämlich $x := \sqrt{y}$ (vgl. 2.27.). Man sieht hier, daß der Nachweis der Surjektivität mühsam wäre, wenn nicht schon ein entsprechender Satz vorläge.

3) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to a \cdot x + b$ mit a, b fest aus $\mathbb{R}$ und $a \neq 0$ ist surjektiv, denn ist $y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt, so läßt sich die Gleichung $y = a \cdot x + b$ umformen zu $x = a^{-1} \cdot (y - b)$, d.h. y hat $a^{-1} \cdot (y - b)$ als Urbild. (Beweis durch *Einsetzen*: $f_3(a^{-1} \cdot (y - b)) = y$.)

10. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt **bijektiv** oder **umkehrbar eindeutig** oder auch **Bijektion**, in Zeichen : $f : A \overset{\text{bij}}{\to} B$, wenn f *zugleich surjektiv und injektiv* ist. Die Bijektionen des Typs $f : A \to A$ werden auch **Permutationen von** A genannt.

$$\begin{array}{l|ccccccc|}
A: & a & b & c & d & e & x & y \\
f: & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
B: & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 9 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|ccccccc|}
A: & a & b & c & d & e & x & y \\
g: & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
B: & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 9 & 1
\end{array}$$

Bei einer bijektiven Abbildung $f : A \to B$ gibt es zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Folglich ist $g : B \to A : f(x) \to x$ eine Abbildung von B in A.

Genauer ist g sogar eine Bijektion von B auf A, denn es gilt $\forall_{x,u \in A}(x{=}u \Leftrightarrow f(x){=}f(u))$, und für jedes $x \in A$ ist $g(f(x)){=}x$, also $g(B) = A$. Zugleich haben wir auch $f(g(y)) = y$ $\forall\, y \in B$. Man nennt g **die zu** f **inverse Abbildung** und schreibt meistens f^{-1} statt g. Man sagt auch, durch g werde die Bijektion f **rückgängig** gemacht.

In Verbindung mit 6. muß ggf. aus dem Zusammenhang ersehen werden, ob mit f^{-1} die Umkehrabbildung $\mathbf{f^{-1}}$ oder die inverse Abbildung gemeint ist.

Beispiele:
1) Ist $A \neq \emptyset$, so wird $\mathrm{id}_A : \begin{cases} A & \to & A \\ x & \to & x \end{cases}$ als die **Identität von** A oder als die **identische Abbildung von** A **auf sich** bezeichnet. Offenbar ist id_A eine *Bijektion* mit $\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A^{-1}$.

Der Graph von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist die Gerade $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

2) Die Abbildung $g_b : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : x \to x + b$ mit b fest aus $\mathbb{Z}$ ist eine Bijektion, denn wegen $(x + b = u + b \;\Rightarrow\; x = u \;\forall\; x, u \in \mathbb{Z})$ ist g_b injektiv, und wegen $(\forall y \in \mathbb{Z} : g_b(y - b) = y)$ ist g_b surjektiv.
3) Die Abbildung $h_5 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \to x^5$ ist bijektiv gemäß 2.24. und 2.27.

B. Verketten von Abbildungen

11. Sind A, B, C Mengen und sind Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben, so ist auch

$$\boxed{g \circ f : \begin{cases} A & \to & C \\ x & \to & g(f(x)) \end{cases}} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

gelesen „g nach f" oder „g Kreis f", eine Abbildung.

Beispiele: 1) Ist $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : x \to x - 3$ und $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} : x \to x/7$,
so ist $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} : x \to (x - 3)/7$.

2) Ist $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \to \sqrt{x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^4$, so ist $g \circ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : x \to x^2$.

Man sagt, die Abbildung $g \circ f$ entsteht aus f und g durch **Hintereinanderausführen** oder **Verketten** und spricht von der **Verkettung** g **nach** f. Definitionsgemäß gilt

$$(*) \qquad \boxed{g \circ f(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall\, x \in A.}$$

Wichtig ist, daß wirklich g *nach* f angewendet wird, nämlich *zuerst* f auf x und dann g auf $f(x)$.

Ist $f : A \to B$ eine beliebige Abbildung, so gilt $id_B \circ f = f = f \circ id_A$, d.h. *die identische Abbildung ist neutrales Element hinsichtlich des Verkettens von Abbildungen.*

Auf die folgende Aussage werden wir häufig zurückgreifen:

12. **Satz.** *Sind Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben, so gilt:*
(i) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
(ii) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.
(iii) Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.
(iv) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
(v) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.

Beweis: (i): Es gilt: $g \circ f(x) = g \circ f(u) \;\Rightarrow\; g(f(x))=g(f(u)) \overset{2.Vor.}{\Rightarrow} f(x)=f(u) \overset{1.Vor.}{\Rightarrow} x = u$ $\forall\, x, u \in A$.
(ii) Ist $y \in C$, so gibt es nach der 2. Voraussetzung ein $z \in B$ mit $g(z) = y$ und nach der 1. Voraussetzung ein $x \in A$ mit $f(x) = z$, und dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(z) = y$.
(iii) folgt aus (i) und (ii).
(iv) Sind $x, u \in A$ mit $f(x) = f(u)$, so gilt $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(u)$, also $x = u$.
(v) Ist $y \in C$, so gibt es voraussetzungsgemäß ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = y$. Folglich hat y in B bzgl. g ein Urbild, nämlich $f(x)$. □

Bemerkung. Für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \to x + 1$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \to \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$
ist $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ *bijektiv,* aber f ist *nicht surjektiv* und g ist *nicht injektiv.*

Aufgrund dieses Beispiels erkennt man, daß man die Bijektivität von f **nicht** stets aus der Gleichung „$g \circ f = id$" ableiten kann, falls solch ein g existiert. Jedoch gilt

13. **Satz.** *Ist die Abbildung $f : A \to B$ gegeben und existiert eine Abbildung $g : B \to A$ mit* $\boxed{g \circ f = id_A \ \wedge \ f \circ g = id_B}$*, so sind f* **und** *g* **bijektiv***, und es ist $g = f^{-1}$.*

Beweis: Nach 12. (iv) und 12. (v) sind f und g bijektiv, da id_A und id_B bijektiv sind, und mit 10. folgt $g = f^{-1}$. $\square$

Eine weitere wichtige Aussage erhalten wir mit

14. **Satz.** *Das* **Verketten** *von Abbildungen ist* **stets assoziativ***.*
Genauer: Sind Abbildungen $f : A \to B,\ g : B \to C$ und $h : C \to D$ gegeben, so gilt

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}.$$

Beweis: Für jedes $x \in A$ ist $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) =$ $= ((h \circ g) \circ f)(x)$. $\square$

C. Endliche Mengen

Wir werden die eingeführten Begriffe nun auf Zahlenmengen anwenden. Zunächst zeigen wir

15. **Satz**. *Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und ist $f : \hat{n} \to \hat{m}$ injektiv, so ist $n \leq \max f(\hat{n}) \leq m$, und im Falle $n = m$ ist f bijektiv.*

Beweis durch Induktion:
(IA): Ist $n = 1$, so ist $f(\hat{n}) = \{f(1)\}$ mit $1 \leq f(1) \leq m$.
(IV): Es sei $k \in \mathbb{N}$, und für $n = k$ gelte der Satz.
(IB): Für $n = k + 1$ gilt der Satz ebenfalls.
(DB): Es sei $t = \max f(\hat{n})$, und g sei diejenige Permutation von $\hat{m}$, die t mit $f(n)$ vertauscht und die alle übrigen Elemente von $\hat{m}$ festläßt. Dann ist $h := g \circ f : \hat{n} \to \hat{m}$ injektiv gemäß 12.(i) mit $h(n) = t$ und mit $h(x) < t \ \forall\ x \in \hat{k}$. Da $h|_{\hat{k}}$ injektiv ist, führt (IV) nun auf $k \leq \max h(\hat{k}) < t$, und es folgt $n = k + 1 \leq t \leq m$. Ist jetzt $n = m$, so ist $n = k + 1 = t = m$, also $h(n) = n$. Weiter ist $h|_{\hat{k}} : \hat{k} \to \hat{k}$ nun injektiv und gemäß (IV) auch bijektiv. Demnach ist $h : \hat{n} \to \hat{n}$ bijektiv, und damit ist gemäß 12.(iii) auch die Abbildung $g^{-1} \circ h = g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = id_{\hat{m}} \circ f = f$ bijektiv. $\square$

Als Gegenstück ergibt sich

16. **Satz.** *Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und ist $f : \hat{n} \to \hat{m}$ surjektiv, so ist $n \geq m$, und im Falle $n = m$ ist f bijektiv.*

Beweis: Die Abbildung $g : \hat{m} \to \hat{n} : x \to \min f^{-1}(\{x\})$ ist injektiv, denn für $x, u \in \hat{m}$ mit $x \neq u$ gilt $(\diamond) : f^{-1}(\{x\}) \cap f^{-1}(\{u\}) = \emptyset$, also $g(x) \neq g(u)$. Nach 15. ist dann $n \geq m$. Ist jetzt $n = m$, so ist g nach 15. surjektiv. Wegen $(\diamond)$ ist dann $f^{-1}(\{x\}) = \{g(x)\} \ \ \forall\ x \in \hat{m}$, d.h. f ist injektiv und damit auch bijektiv. $\square$

Als einfache Folgerung notieren wir

17. **Corollar.** *Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und ist $f : \hat{n} \to \hat{m}$ eine Bijektion, so folgt $n = m$.*

Beweis: Nach 15. und 16. gilt $n \leq m$ und $n \geq m$. $\square$

18. Eine Menge A heißt **endlich**, wenn sie leer ist oder wenn eine Bijektion von A auf $\hat{m}$ für ein $m \in \mathbb{N}$ existiert.

Ist A eine Menge und gibt es Bijektionen $f : A \to \hat{m}$ und $g : A \to \hat{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, so ist $g \circ f^{-1}$ nach 12.(iii) eine Bijektion von $\hat{m}$ auf $\hat{n}$, und mit 17. folgt $m = n$. Dies bedeutet:

Zu jeder **endlichen** Menge A mit $A \neq \emptyset$ gibt es *genau* ein $m \in \mathbb{N}$ derart, daß eine Bijektion von A auf $\hat{m}$ existiert. Wir schreiben $|A| = m$ und sagen, **A hat m Elemente**.

Ist $A = \emptyset$, so schreiben wir $|A| = 0$ und sagen, **A hat Null Elemente**. Ist A keine endliche Menge, so schreiben wir $|A|=\infty$ oder $|A| \notin \mathbb{N}_0$ und bezeichnen A als **unendliche Menge**.

Allgemein werden zwei nichtleere Mengen A, B als **gleichmächtig** bezeichnet, in Zeichen: $A \simeq B$, wenn eine Bijektion f von A auf B existiert.

Nach 10. und 12.(iii) gilt

$$A \simeq A \ \wedge\ (A \simeq B \ \Rightarrow\ B \simeq A) \ \wedge\ (A \simeq B \ \wedge\ B \simeq C \ \Rightarrow\ A \simeq C)$$

für nichtleere Mengen A, B, C.

Definitionsgemäß ist keine endliche Menge gleichmächtig zu einer unendlichen Menge.

Wir zeigen nun

19. **Satz.** *Sind A, B nichtleere endliche Mengen, so gilt:*
    (i) Ist $|A| \leq |B|$, so existiert eine Injektion $f : A \to B$.
    (ii) Ist $|A| \geq |B|$, so existiert eine Surjektion $g : A \to B$.
    (iii) Ist $|A| = |B|$, so ist $A \simeq B$.

Beweis: Wegen $|A|, |B| \in \mathbb{N}$ gibt es Bijektionen $\alpha : A \to \hat{k}$, $\beta : B \to \hat{m}$ mit $k, m \in \mathbb{N}$. Ist $k \leq m$, so ist $\hat{k} \subseteq \hat{m}$ (vgl. 2.4.), und dann ist $\gamma : \hat{k} \to \hat{m} : x \to x$ injektiv, also gemäß 12. auch $f := \beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha : A \to B$. Ist $k \geq m$, also $\hat{k} \supseteq \hat{m}$, so ist $\delta : \hat{k} \to \hat{m} :$ $\begin{cases} x \to x & , \text{ falls } x \in \hat{m} \\ x \to 1 & \text{ sonst} \end{cases}$ surjektiv, damit aber gemäß 12. auch $g := \beta^{-1} \circ \delta \circ \alpha : A \to B$. Ist $k = m$, also $\hat{k} = \hat{m}$, so ist $h := \beta^{-1} \circ \alpha : A \to B$ nach 12. bijektiv. □

Umgekehrt erhalten wir

20. **Satz.** *Sind A, B nichtleere endliche Mengen und ist f eine Abbildung von A in B, so gilt:*
    (i) Ist f injektiv, so ist $|A| \leq |B|$.
    (ii) Ist f surjektiv, so ist $|A| \geq |B|$.
    (iii) Ist f bijektiv, so ist $|A| = |B|$.
    (iv) Ist $|A| > |B|$, so ist f nicht injektiv.

Beweis: Wegen $|A|, |B| \in \mathbb{N}$ gibt es Bijektionen $\alpha : A \to \hat{k}, \beta : B \to \hat{m}$ mit $k, m \in \mathbb{N}$. Ist f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, so gemäß 12. auch $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \hat{k} \to \hat{m}$, und mit 15.–17. folgt $k \leq m$ bzw. $k \geq m$ bzw. $k = m$. Damit sind (i), (ii), (iii) bewiesen, und (iv) folgt aus (i) durch logische Kontraposition. □

Bemerkung. Die Aussage 20.(iv) wird auch *Dirichletsches Taubenschlagprinzip* genannt entsprechend dem folgenden Beispiel: Wenn 12 Tauben in 9 Taubenschläge geflogen sind, dann enthält wenigstens einer der Taubenschläge mehr als eine Taube.

Weiter zeigen wir:

21. **Satz.** *Sind A, B nichtleere* **endliche** *Mengen mit $|A| = |B|$ und ist f eine Abbildung von A in B, so gilt:* $\quad$ *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv .*

Ferner gilt: Aus $|A| = |B| \in \mathbb{N}$ *und* $A \subseteq B$ *folgt* $A = B$.

Beweis: 1) Es sei $|A| = |B| = n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es Bijektionen $\alpha : A \to \hat{n}$ und $\beta : B \to \hat{n}$, und für $\gamma := \beta \circ f \circ \alpha^{-1} : \hat{n} \to \hat{n}$ gilt: Ist f injektiv oder surjektiv, so gemäß 12. auch γ. Nach 15. und 16. ist γ dann aber bijektiv und damit nach 12. auch $f = \beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha$.
2) Ist $A \subseteq B$, so ist $g : A \to B : x \to x$ injektiv, und allein im Falle $A = B$ ist g surjektiv. Mit 1) führt dies auf die Behauptung. □

D. Abzählbare Mengen

22. Wir bezeichnen eine Menge M als **abzählbar**, wenn M gleichmächtig mit $\mathbb{N}$ ist, wenn also eine Bijektion von M auf $\mathbb{N}$ und damit auch eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf M existiert. Demnach ist M abzählbar, wenn sich M mit natürlichen Zahlen „durchnumerieren" läßt.

Ist $a \in \mathbb{Z}^*$ und $b \in \mathbb{Z}$, so sind $\alpha : \mathbb{N} \to a \cdot \mathbb{N} := \{a \cdot x | x \in \mathbb{N}\}$ und $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\geq b} : x \to x - 1 + b$ Bijektionen, und mithin sind $a \cdot \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}_{\geq b}$ abzählbar.

Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

23. In 3.22. und 4.16 kamen bereits die Begriffe „Ziffernfolge" und „Folge" vor.
Allgemein setzen wir fest:

Ist A eine beliebige nichtleere Menge und ist I eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{Z}$, so wird jede Abbildung $\boxed{f : \ I \to A : \ i \to x_i}$ als eine **Folge** von Elementen aus A bzgl. der **Indexmenge** I bezeichnet. Statt f schreibt man in diesem Zusammenhang auch $\boxed{(x_i)_{i \in I}}$ oder kurz (x_i) und nennt x_i die i–te **Komponente** oder das i–te **Folgenglied** der Folge $(x_i)_{i \in I}$.

Wenn $I = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a < b$ ist, so schreibt man auch $(x_a, x_{a+1}, \ldots, , x_b)$ statt $(x_i)_{i \in I}$. Im Falle $I := \mathbb{Z}_{\geq a}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ schreibt man auch $(x_a, x_{a+1}, \ldots, x_{a+n}, \ldots)$ statt $(x_i)_{i \in I}$.

Beispiele. 1) Zu $A := \mathbb{R}, I := \{-2, 5\}$ und $f : x \to x^2$ gehört die Folge $(x_{-2}, x_5) = (4, 25)$.

2) Zu $A := \mathbb{Z}, I := \mathbb{N}_0$ und $f : x \to x^2$ gehört die *Folge der Quadratzahlen* $(0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$; hier ist $x_i = i^2 \ \forall \ i \in \mathbb{N}_0$.

3) Zu $A := \mathbb{R}, I := \mathbb{N}$ und $f : x \to \dfrac{1}{x}$ gehört die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$.

In den meisten Fällen ist $I = \mathbb{N}$ oder $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \hat{n} := \{1, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Ist eine Folge $(x_i)_{i \in I}$ gegeben, so wird, falls $i, i + 1 \in I$ sind, x_{i+1} *der direkte Nachfolger von* x_i genannt.

Zwei Folgen $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_j)_{j \in J}$ sind gemäß 3. genau dann **gleich**, wenn

$$\boxed{I = J \ \wedge \ x_i = y_i \quad \forall i \in I}$$

gilt, wenn also alle entsprechenden Komponenten übereinstimmen.
Demnach sind $(1), (1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$ paarweise verschiedene Folgen.

Zwischen Folgen und Mengen ist **streng** zu **unterscheiden**, denn hier liegen verschiedene Gleichheitsdefinitionen zugrunde. In der Symbolik werden *runde Klammern für Folgen* und *geschweifte Klammern für Mengen* verwendet.

Bei Mengen spielt die *Reihenfolge* der Elemente keine Rolle, während sie bei Folgen wesentlich ist. *Beispiele:*
1) $(1) \neq (1,1) \neq (1,1,1)$, aber $\{1\} = \{1,1\} = \{1,1,1\}$.
2) $(1,2,3) \neq (1,3,2)$, aber $\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$.
3) $(1,1,1,2) \neq (1,1,2,1)$, aber $\{1,1,1,2\} = \{1,2\} = \{1,1,2,1\}$.

Ist $I = \hat{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, ..., x_n \in A$, so nennt man

$$(x_1, \ldots, x_n) = (x_i)_{i \in I} \qquad (x_i \in A)$$

ein n–**tupel** von Elementen aus A, im Falle $n = 3$ bzw. $= 4$ bzw. $= 5$ auch **Tripel** bzw. **Quadrupel** bzw. **Quintupel** von Elementen aus A.

Zwei 2–*tupel* $(a,b), (c,d)$ mit $a,b,c,d \in A$ sind genau im Falle $a = c \ \wedge \ b = d$ gleich. Hier haben wir also denselben Gleichheitsbegriff wie bei *Paaren*, und deshalb geht man davon aus, daß $\boxed{A^2 := A \times A}$ *zugleich* die Menge der *Paare* und die Menge der 2–*tupel* aus Elementen von A ist: $A^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}$. Man setzt $A^1 := A$, und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ setzt man $\boxed{A^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in A\}}$. Man bezeichnet A^n (gelesen: „A hoch n“) als das **n–fache kartesische Produkt von A**.

Wir zeigen nun, daß unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{N}$ als spezielle Folgen darstellbar sind:

24. **Satz.** *Ist M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$, die keine obere Schranke in $\mathbb{N}$ besitzt, so existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M : k \to a_k$ mit*

$$(*) \qquad k < m \ \Rightarrow \ k \leq a_k < a_m \qquad \forall\, k, m \in \mathbb{N}.$$

Beweis: 1) Wir definieren rekursiv: (RD1) Es sei $a_1 := \min M$. (RD2) Sind $a_1, \ldots, a_k$ für $k \in \mathbb{N}$ definiert, so ist $M \backslash \{a_1, \ldots, a_k\} \neq \emptyset$, da M keine obere Schranke hat, und dann sei $a_{k+1} := \min M \backslash \{a_1, \ldots, a_k\}$. Mit (RD1) und (RD2) ist $f : \mathbb{N} \to M : k \to a_k$ festgelegt, und es ist $L := f(\mathbb{N}) \subseteq M$.
2) Es gilt $(k < m \ \Rightarrow \ a_k < a_m) \ \forall\, k, m \in \mathbb{N}$. Denn für $k = 1$ ist dies klar, und sind $k, m \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k < m$, so ist $a_m \in M \backslash \{a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{m-1}\} \subseteq M \backslash \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$, also $a_m \neq a_k \ \wedge \ a_k := \min(M \backslash \{a_1, \ldots, a_{k-1}\}) \leq a_m$.
3) Es gilt $k \leq a_k \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, denn es ist $1 \leq a_1$, und aus $k \leq a_k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und 2) folgt $k + 1 \leq a_k + 1 \leq a_{k+1}$.
4) Es ist $L = M$. Um dies einzusehen, denken wir uns ein $m \in M \backslash \{a_1\}$ vorgegeben. Wegen $a_1 < m \leq a_m$ gibt es in $\{1, \ldots, m\}$ eine größte Zahl r mit $a_r < m$, und dann ist $r < m \ \wedge \ m \leq a_{r+1}$. Nach 2. gilt $\{a_1, \ldots, a_r\} \leq a_r < m$. Wäre nun $m < a_{r+1}$, so wäre $a_{r+1} \neq \min(M \backslash \{a_1, \ldots, a_r\})$. Folglich ist $m = a_{r+1} \in L$.
5) Aus 2), 3) und 4) folgt die Behauptung. $\square$

Als Konsequenz von 24. erhalten wir

25. **Corollar 1.** *Ist R eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $g : \hat{n} \to R : k \to a_k$ mit*

$$(\diamond) \qquad k < m \ \Rightarrow \ k \leq a_k < a_m \quad \forall\, k, m \in \hat{n}.$$

Beweis: Es sei $t := \max R$ und $M := R \cup \{x \in \mathbb{N} \mid t < x\}$. Dann hat M keine obere Schranke in $\mathbb{N}$, und nach 24. existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M : k \to a_k$ mit $(*)$. Für $n := f^{-1}(t)$ führt $(*)$ auf $k \in \hat{n} \ \Leftrightarrow \ k \leq n \ \Leftrightarrow \ a_k \leq a_n = t \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, d.h. für $g : \hat{n} \to R : k \to a_k$ gilt die Behauptung. $\square$

26. **Corollar 2.** *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist entweder endlich oder abzählbar.*

Beweis: Ist $A \subseteq M$ mit $A \neq \emptyset$ und existiert eine Bijektion $f : M \to \mathbb{N}$, so ist die Abbildung $g : A \to f(A) : x \to f(x)$ eine Bijektion. Da $g(A) = f(A)$ nach 24. und 25. endlich oder abzählbar ist, gilt dies auch für A. $\square$

Wir gelangen nun zu einigen eindrucksvollen Erkenntnissen der Mengenlehre:

27. **Satz.** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *ist abzählbar.*

Beweis: Wir betrachten $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \to x + (x + y)^2$:
Sind $(x, y), (u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so gilt $(x+y < u+v \;\Rightarrow\; f(x, y) < (x+y)^2 + 2(x+y)+1 = (x+y+1)^2 \leq (u+v)^2 < f(u, v))$, und entsprechend gilt $(u+v < x+y \;\Rightarrow\; f(u, v) < f(x, y))$, d.h. aus $f(x, y) = f(u, v)$ folgt $x+y = u+v$, also $x = u$ und damit auch $y = v$. Demnach ist f injektiv, und gemäß 26. haben wir dann $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq \mathbb{N}$. $\square$

28. **Satz.** *Sind* A, B *abzählbar, so auch* $A \times B$ *und* $A \cup B$.

Beweis: Gegeben seien Bijektionen $\alpha : A \to \mathbb{N}$ und $\beta : B \to \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $f : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a, b) \to (\alpha(a), \beta(b))$ bijektiv, und mit 27. folgt $A \times B \simeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq \mathbb{N}$.
Da die Abbildung $g : A \cup B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; x \to \begin{cases} (\alpha(x), 1) & , \text{ falls } x \in A \\ (\beta(x), 2) & , \text{ falls } x \in B \backslash A \end{cases}$ injektiv ist, haben wir $A \cup B \simeq g(A \cup B) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und nach 26. ist $A \cup B$ dann abzählbar. $\square$

29. **Satz.** *Es gilt:*
   (i) Sind $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ *mit* $r/s = u/v \wedge ggT(r, s)=1=ggT(u, v)$, *so ist* $r=u \wedge s=v$.
   (ii) $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis: (i) Aus $rv=su$ folgt $r|u \wedge u|r \wedge s|v \wedge v|s$ mit 4.7. und daraus $r=u \wedge s=v$ mit 4.2.
(ii) Nach (i) und 4.6. ist die Abbildung $h : \mathbb{Q}^*_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \; r/s \to (r, s)$ mit $r, s \in \mathbb{N}$ und $ggT(r, s) = 1$ injektiv, und mit 26. und 27. folgt $\mathbb{Q}^*_- \simeq \mathbb{Q}^*_+ \simeq h(\mathbb{Q}^*_+) \simeq \mathbb{N}$. Nach 28. ist $\mathbb{Q}^*$ dann abzählbar, und mit 22. folgt $\mathbb{Q} \simeq \mathbb{N}_0 \simeq \mathbb{N}$. $\square$

30. **Satz.** *Sind* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$, *so gibt es im Intervall* $]a, b[$ **überabzählbar** *viele irrationale Zahlen.*

Beweis: 1) Wir zeigen: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge von reellen Zahlen aus $I :=]a, b[$, so ist $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\} \neq I$.
Um dies einzusehen, definieren wir rekursiv zur Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Intervallen:
(RD1) Es sei $I_0 := I, a_0 := a, b_0 := b$.
(RD2) Ist I_k für $k \in \mathbb{N}_0$ bestimmt, so sei $I_{k+1} := [a_{k+1}, b_{k+1}] \subset I_k$ mit $x_{k+1} \notin I_{k+1}$.
Nach 1.30. ist klar, daß man I_{k+1} festlegen kann, wenn I_k bekannt ist, und es gilt
(i) $I_{k+1} \subset I_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ sowie $x_k \notin I_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Durch Induktion folgt
(ii) $I_{k+m} \subset I_k \;\wedge\; a_k \leq a_{k+m} < b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$,
und nach 1.35. existiert $t := \sup\, \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit
(iii) $t \in [a_k, b_k] = I_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Wegen (iii) ist $t \neq x_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, wie behauptet.
2) Wegen 1) ist $]a, b[$ nicht abzählbar. Da $\mathbb{Q} \cap]a, b[$ nach 26., 29. und 3.12. abzählbar ist, kann $]a, b[\backslash \mathbb{Q}$ nach 28. nicht abzählbar sein. $\square$

31. **Satz.** *Es ist* $\mathbb{R} \simeq]-1,1[$*. Insbesondere ist* $\mathbb{R}$ *überabzählbar.*

Beweis: $f : \mathbb{R}_+ \to [0,1[: x \to \dfrac{x}{1+x}$ ist bijektiv mit $f^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}_+ : y \to \dfrac{y}{1-y}$. Folglich ist auch $g : \mathbb{R} \to]-1,1[: x \to \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } \quad x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{ sonst} \end{cases}$ eine Bijektion. Mit 30. folgt die verbleibende Behauptung. $\square$

Bemerkung. Ohne Beweis sei mitgeteilt, daß $\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist, während das System *aller* Teilmengen von $\mathbb{R}$ *nicht* gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ ist. Man findet also im Bereich der unendlichen Mengen jenseits der abzählbaren Mengen immer noch Mengen verschiedener Mächtigkeit.

32. **Die Unvollständigkeit von $\mathbb{Q}$.**
Wäre das Axiom (V) aus 1.34. für $\mathbb{Q}$ anstelle von $\mathbb{R}$ gültig, so würde man mit der im Beweis von 30. verwendeten Argumentation zeigen können, daß $\mathbb{Q}$ überabzählbar ist. Da $\mathbb{Q}$ nach 28. aber abzählbar ist, kann (V) für $\mathbb{Q}$ nicht gültig sein. Man sagt, $\mathbb{Q}$ *ist unvollständig.*

Dies läßt sich auch *direkt* mit dem folgenden **Beispiel** beweisen:

Nach 4.20. ist $\sqrt{2}$ irrational. Für $A := [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ und $B := [\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q}$ gilt $A, B \neq \emptyset \ \wedge \ A < B \ \wedge \ A \leq \sqrt{2} \ \wedge \ \sqrt{2} \leq B$. Zu $x \in [1, \sqrt{2}[$ bzw. $y \in]\sqrt{2}, 2]$ gibt es nach 3.12. stets ein $r \in A$ bzw. ein $s \in B$ mit $x < r$ bzw. $s < y$. Deshalb ist $\sqrt{2}$ die einzige reelle Trennzahl zwischen A und B. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gibt es dann **keine rationale Trennzahl** zwischen A und B.

Anmerkung. Die dekadische Darstellung $a_0, a_{-1}a_{-2} \ldots a_{-n} \ldots$ für $\sqrt{2}$, die mit
1,4142135623 7309504880 1688724209 6980785696 7187537694 8073176679 7379907324 ...
beginnt, liefert nach 3.22. ($\diamond$) mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_{-i} \cdot 10^{-i}$ und $d_n := c_n + 10^{-n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, die sich der Zahl $\sqrt{2}$ von unten bzw. von oben „nähern“; man erhält $\sup\, \{c_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \sqrt{2} = \min\{d_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

E. Anzahlsätze und kombinatorische Anwendungen

Die nachfolgend notierten Sätze finden vielerlei Anwendung bei Fragen des Abzählens und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

33. **Satz.** *Sind* A, B *disjunkte endliche Mengen, so ist* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Beweis: Ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, so gilt die Behauptung.
Sind $A, B \neq \emptyset$, so betrachten wir Bijektionen $\alpha : A \to \hat{m}, \ \beta : B \to \hat{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\gamma : A \cup B \to (m+n)^\wedge \ : x \to \begin{cases} \alpha(x) & , \text{ falls } \ x \in A \\ m + \beta(x) & , \text{ falls } \ x \in B \end{cases}$ offenbar injektiv.
Weiter ist $\gamma(\alpha^{-1}(r)) = \alpha(\alpha^{-1}(r)) = r$ für $r \in \hat{m}$, und für $s \in (m+n)^\wedge$ mit $m<s\leq m+n$ ist $0<s-m\leq n$ und $\gamma(\beta^{-1}(s-m)) = m+\beta(\beta^{-1}(s-m)) = s$. Mithin ist γ bijektiv. $\square$

34. **Satz.** *Ist* M *eine endliche Menge und ist* $\{A_1, \ldots, A_r\}$ *mit* $r \in \mathbb{N}$ *eine Zerlegung von* M *in* r *verschiedene Teile, so ist* $|M| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|$*. Überdies führt* $|A_1| = \cdots = |A_r|$ *auf* $|M| = r \cdot |A_1|$.

Beweis: Für $r = 2$ folgt der Satz aus 33. Ist er für $r = k$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ bewiesen, so gilt er auch für $r = k+1$ wegen $|M| \overset{33.}{=} |M \backslash A_r| + |A_r| = \left(\sum_{i=1}^{k} |A_i|\right) + |A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|$ und ebenso im Falle $|A_1| = \cdots = |A_r|$ wegen $|M| \overset{33.}{=} |M \backslash A_r| + |A_r| = k \cdot |A_1| + |A_1| = r \cdot |A_1|$. $\square$

Bemerkung. Mögen die Aussagen 33. und 34. auch sehr einfach sein – sie genau sind es, die das Rechnen mit Klötzchen im Anfangsunterricht mathematisch rechtfertigen.

35. **Satz.** *Sind A, B endliche Mengen, so ist $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

Beweis: Ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, so gilt die Behauptung. Sind $A, B \neq \emptyset$, so ist $|A \times \{b\}| = |A| \quad \forall\, b \in B$, und mit 34. folgt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. $\square$

36. **Satz.** *Ist A eine Menge mit $|A| = r \in \mathbb{N}$, so ist $|A^n| = r^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung gültig. Ist sie für $n = k$ mit $k \in \mathbb{N}$ bewiesen, so gilt sie auch für $n = k + 1$, denn $f : A^n \to A^k \times A : (a_1, \dots, a_n) \to ((a_1, \dots, a_k), a_n)$ ist offenbar bijektiv, und mithin ist $|A^n| \overset{20.}{=} |A^k \times A| \overset{35.}{=} |A^k| \cdot |A| = r^k \cdot r = r^n$. $\square$

Beispiel. Wieviele Bücher kann eine Bibliothek katalogisieren, wenn jedes Buch durch 3 Buchstaben (aus 26) und durch 3 nachfolgende Ziffern (aus 10) gekennzeichnet wird?
Antwort: Nach 36. gibt es 26^3 Buchstabentripel und 10^3 Zifferntripel, und nach 35. kann man dann $26^3 \cdot 10^3 = 260^3 = 17.576.000$ Bücher katalogisieren.

37. **Satz.** *Sind A, E Mengen mit $|A| = r \in \mathbb{N}$ und $|E| = n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau r^n Abbildungen von E in A, d.h.es ist $|Abb(E, A)| = r^n$.*

Beweis: Nach 23. und 36. ist $|\text{Abb}\ (\hat{n}, A)| = |A^n| = r^n$, und wegen $|E| = n$ existiert eine Bijektion α von E auf $\hat{n}$. Dann ist $\delta :\ \text{Abb}(\hat{n}, A) \to\ \text{Abb}(E, A) : f \to f \circ \alpha$ ebenfalls eine Bijektion, denn für $f, g \in\ \text{Abb}(\hat{n}, A)$ führt $f \circ \alpha = g \circ \alpha$ auf $f = g$, und ist $h \in\ \text{Abb}(E, A)$, so ist $h \circ \alpha^{-1} \in\ \text{Abb}(\hat{n}, A)$ mit $\delta(h \circ \alpha^{-1}) = h$. Demnach ist $|\text{Abb}(E, A)| = r^n$. $\square$

38. **Satz.** *Sind A, E Mengen mit $|A| = |E| = n \in \mathbb{N}$, so gibt es genau $n!$ Bijektionen von E auf A. Insbesondere besitzt E genau $n!$ Permutationen.*

Beweis: 1) Für $n = 1$ ist die Behauptung gültig. Ist sie für $n = k$ mit $k \in \mathbb{N}$ bewiesen, so gilt sie auch für $n = k + 1$. Denn sind $e \in E$ und $y \in A$, so gibt es $k!$ Bijektionen von $E \backslash \{e\}$ auf $A \backslash \{y\}$, deren jede auf genau eine Weise durch die Vorschrift $e \to y$ zu einer Bijektion von E auf A fortgesetzt werden kann. Andere Bijektionen von E auf A mit $e \to y$ gibt es nicht, und folglich gibt es genau $k!$ Bijektionen von E auf A mit $e \to y$. Indem man für y alle $k + 1$ Möglichkeiten in A zuläßt, erhält man nach 34. insgesamt genau $k! \cdot (k + 1) = (k + 1)! = n!$ Bijektionen von E auf A.
2) Die verbleibende Behauptung folgt aus dem Bewiesenen für $E = A$. $\square$

39. **Satz.** *Ist A eine Menge mit $|A| = n \in \mathbb{N}_0$ und ist $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$, so besitzt A genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen X mit $|X| = k$. Insgesamt hat A genau 2^n Teilmengen.*

Beweis: Für $n = 0 \vee k = 0 \vee k = n$ ist die Behauptung gültig. Ist sie für $n = r$ mit $r \in \mathbb{N}_0$ bewiesen, so gilt sie auch für $n = r + 1$. Denn ist $a \in A$ und ist $1 \leq k \leq r$, so hat $A \backslash \{a\}$ genau $\binom{r}{k}$ k–elementige und $\binom{r}{k-1}$ $(k{-}1)$–elementige Teilmengen. Letztere lassen sich durch a zu denjenigen k–elementigen Teilmengen von A ergänzen, die a als Element haben, und mithin hat A genau $\binom{r}{k} + \binom{r}{k-1} = \binom{n}{k}$ k–elementige Teilmengen (vgl. 3.16(($\triangle$)). Mit 3.16(v) ergibt sich die verbleibende Behauptung. $\square$

Bemerkung. Durch diesen Satz erhalten die Binomialkoeffizienten eine ganz andersartige Deutungsmöglichkeit als bisher.

40. *Beispiele.* Der Satz 39. läßt sich wie folgt anwenden:

a) Sind auf einer Party 10 Personen und stößt jeder sein Glas mit jedem anderen einmal an, so erklingen die Gläser $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$ mal, denn beim Anstoßen wird – mathematisch gesprochen – jedesmal eine 2–elementige Menge gebildet.

b) Sollen 18 Fußballvereine gegeneinander so spielen, daß jeder Verein zweimal gegen jeden anderen spielt, so gibt es $\binom{18}{2} \cdot 2 = 18 \cdot 17 = 306$ Begegnungen.

c) Will man im Lotto x normale Treffer haben ($0 \le x \le 6$) und sind $a_1, ..., a_7$ (mit a_7 als Zusatzzahl) die Zahlen der Ziehung, so muß man aus den $\binom{49}{6} = 13.983.816$ 6-elementigen Teilmengen von $S := \{1, \ldots, 49\}$ eine Menge A so tippen, daß

(i) $|A \cap \{a_1, ..., a_6\}| = x$ und (ii) $|A \cap (S\backslash\{a_1, ..., a_6\})| = 6-x$ ist.

Für (i) bzw. (ii) gibt es $\binom{6}{x}$ bzw. $\binom{43}{6-x}$ Möglichkeiten, und gemäß 35. haben wir dann insgesamt $g(x) = \binom{6}{x} \cdot \binom{43}{6-x}$ „günstige" Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, eine davon gewählt zu haben, ist $W(x) = g(x)/\binom{49}{6}$. Wir erhalten damit die Aufstellung

x	0	1	2	3	4	5	6
W(x) ist 1 zu	2,294	2,421	7,554	56,66	1032	54.201	13.983.816

Die Zusatzzahl a_7 wird aus den 43 Zahlen $S\backslash\{a_1, ..., a_6\}$ gezogen. Sie kann zum Tragen kommen, wenn man 5 „Richtige" hat. Jede der $6 = \binom{6}{5}$ 5-elementigen Teilmengen von $\{a_1, ..., a_6\}$ wird zusammen mit der Zusatzzahl zum Tip „5 Richtige mit Zusatzzahl". Die Wahrscheinlichkeit, dies zu erreichen, ist $6 : \binom{49}{6}$, also $1 : 2.330.636$.

Schließlich zeigen wir nun

41. **Satz.** *Sind A, E Mengen mit $|A| = r \in \mathbb{N}$ und $|E| = n \in \{1, ..., r\}$, so gibt es genau $r!/(r-n)! = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot ... \cdot (r-n+1)$ injektive Abbildungen von E in A.*

Beweis: Zu jeder n–elementigen Teilmenge M von A gibt es nach 38. genau $n!$ Bijektionen von E auf M, also genau $n!$ Injektionen $f : E \to A$ mit $f(E) = M$. Da A nach 39. genau $\binom{r}{n}$ n–elementige Teilmengen besitzt, haben wir gemäß 35. genau $\binom{r}{n} \cdot n! = \frac{r!}{(r-n)!}$ Injektionen von E in A. □

42. **Corollar.** *Ist A eine Menge mit $|A| = r \in \mathbb{N}$ und ist $n \in \{1, ..., r\}$, so gibt es genau $r!/(r-n)!$ n-tupel aus paarweise verschiedenen Elementen von A.*

Beweis: Gemäß 23. folgt der Satz aus 41. für $E = \{1, ..., n\}$. □

Beispiel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $W(n)$, daß bei einer Gruppe von n Personen ($n \le 365$) zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Antwort: Es sei $r = 365$. Wir betrachten Geburtstagszuordnungen $f : \hat{n} \to \hat{r}$, die der x-ten Person ihren Geburtstag $f(x) \in \hat{r}$ zuordnen. Im gefragten Fall ist f nicht injektiv. Mit 37. und 41. folgt also $W(n) = (365^n - [365!/(365-n)!])/365^n$.

Z.B. ist $W(20) = 41\%, W(40) = 89\%, W(60) = 99,4\%, W(80) = 99,99\%$.

7. Elemente der Gruppentheorie

A. Gruppoide

1. Es sei M eine nichtleere Menge. Jede Abbildung vom Typ $*: M \times M \to M$ heißt **innere Verknüpfung** auf M.

Statt $*((a,b))$ schreiben wir $a * b$ (gelesen „a Stern b") für $a, b \in M$ und nennen das Paar $(M, *) =: M(*)$ ein **Gruppoid** oder ein **Verknüpfungsgebilde**.

Vorbilder für Gruppoide sind z.B. $\mathbb{N}(+)$, $\mathbb{N}(\cdot)$, $\mathbb{Z}(+)$, $\mathbb{Z}(-)$, $\mathbb{Z}(\cdot)$, $\mathbb{Z}^*(\cdot)$, $\mathbb{Q}(+)$, $\mathbb{Q}(-)$, $\mathbb{Q}(\cdot)$, $\mathbb{Q}^*(\cdot)$, $\mathbb{R}(+)$, $\mathbb{R}(-)$, $\mathbb{R}(\cdot)$, $\mathbb{R}^*(\cdot)$, $\mathbb{R}^*_+(\cdot)$, $\mathbb{R}^*(/)$, $\mathbb{R}^*_+(/)$, aber auch $Z_a(+_a)$, $Z_a(\cdot_a)$ für $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (vgl. 4.28.).

Ein weiteres wichtiges Gruppoid ist die Menge

$$\mathrm{Per}(M) := \{\alpha \in \mathrm{Abb}(M, M) \mid \alpha \text{ ist bijektiv}\}$$

aller Permutationen einer nichtleeren Menge M mit dem Verketten „$\circ$" von Abbildungen als Verknüpfung, denn tatsächlich ist

$$\circ : \mathrm{Per}(M) \times \mathrm{Per}(M) \to \mathrm{Per}(M) : (\alpha, \beta) \to \alpha \circ \beta$$

nach 6.11. und 6.12. eine Abbildung.

Nach 6.11. ist außerdem auch $\mathrm{Abb}(M, M)(\circ)$ ein Gruppoid.

Dagegen ist $\mathrm{Abb}(L, M)(\circ)$ für $L \neq M$ *kein* Gruppoid, denn sind $f, g \in \mathrm{Abb}(L, M)$, so ist $f \circ g$ *nicht* definiert für $L \neq M$.

Ebenso sind auch $\mathbb{N}(-)$, $\{1,2,3\}(+)$, $\{1,2,3\}(\cdot)$ *keine* Gruppoide wegen $2-3 \notin \mathbb{N}$ bzw. $2+3 \notin \{1,2,3\}$ bzw. $2 \cdot 3 \notin \{1,2,3\}$.

Insbesondere ist auch $\circledast : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \to \frac{a+c}{bd}$ (für $a, c, \in \mathbb{Z} \wedge b, d \in \mathbb{Z}^*$) **keine** Verknüpfung auf $\mathbb{Q}$, weil $\circledast$ *nicht wohldefiniert* und damit *keine Abbildung* ist, denn es gilt

$$\tfrac{1}{1} = \tfrac{2}{2} \;\wedge\; \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}, \quad \text{aber} \quad \tfrac{1}{1} \circledast \tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{2} \neq \tfrac{3}{4} = \tfrac{2}{2} \circledast \tfrac{1}{2}.$$

2. Will man zeigen, daß $M(*)$ ein *Gruppoid* ist, so prüft man

$$\boxed{\text{(Abg) } \textbf{Abgeschlossenheit}\text{: Es gilt } a * b \in M \quad \forall a, b \in M.}$$

Falls es für die Elemente von M verschiedene Darstellungsmöglichkeiten gibt (wie im letzten Beispiel von 1.), ist außerdem

$$\boxed{\text{(W) } \textbf{Wohldefiniertheit}\text{: } a = c \;\wedge\; b = d \;\Rightarrow\; a * b = c * d \quad \forall\, a, b, c, d \in M}$$

zu prüfen.

3. Zwei Gruppoide $M(*), M'(*')$ heißen **isomorph** oder **strukturgleich**, in Zeichen: $M(*) \cong M'(*')$, wenn es eine *Bijektion* $\alpha : M \to M'$ gibt, die die

$$\boxed{\textbf{Homomorphiebedingung}\text{: } \alpha(x * y) = \alpha(x) *' \alpha(y) \quad \forall\, x, y \in M}$$

erfüllt. Diese sagt: Es soll gleichgültig sein, ob man erst verknüpft und dann abbildet, oder ob man umgekehrt vorgeht.

$$\begin{array}{rc}
M\colon & \boxed{\;x \quad \rightharpoonup \quad x * y \quad \leftharpoondown \quad y\;} \\
\alpha\colon & \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\
M'\colon & \boxed{\alpha(x) \;\rightharpoonup\; \alpha(x) *' \alpha(y) \;\leftharpoondown\; \alpha(y)}
\end{array}$$

Wenn eine solche Bijektion α existiert, dann wird α ein **Isomorphismus** oder eine **strukturerhaltende Abbildung** von $M(*)$ auf $M'(*')$ genannt. Im Falle $M = M'$ und $* = *'$ wird α auch als ein **Automorphismus** von $M(*)$ bezeichnet.

Mit dem Begriff der *strukturerhaltenden Abbildung* kann der Mathematiker zum Ausdruck bringen, daß es für ihn nicht um die Objekte, sondern um die (mathematischen) Beziehungen *zwischen* den Objekten geht — das ist das, was er unter „*Struktur*" versteht.

Z.B. darf sich jeder Student mehrere Exemplare der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ hinmalen. Solange darin immer auf die gleiche Weise gerechnet wird, hat er es immer mit der gleichen mathematischen Struktur zu tun.

4. Wenn $M(*)$ ein Gruppoid ist und wenn eine Bijektion α von M auf eine Menge M' existiert, dann besteht die Möglichkeit der **Strukturübertragung**:
Durch

$$*' : \; M' \times M' \to M' : \; (u, v) \to \alpha\big(\alpha^{-1}[u] * \alpha^{-1}[v]\big)$$

ist eine Verknüpfung $*'$ auf M' definiert, und es gilt

$$\alpha\big(x * y\big) = \alpha\big(\alpha^{-1}[\alpha(x)] * \alpha^{-1}[\alpha(y)]\big) = \alpha(x) *' \alpha(y) \quad \forall\, x, y \in M,$$

d.h. α ist ein Isomorphismus von $M(*)$ auf $M'(*')$.

5. **Satz**. *Sind $M(*)$, $M'(*')$, $M''(*'')$ Gruppoide und sind $\alpha : M(*) \to M'(*')$ und $\beta : M'(*') \to M''(*'')$ Isomorphismen, so gilt:*

(i) *id_M ist ein Automorphismus von $M(*)$.*

(ii) *α^{-1} ist ein Isomorphismus von $M'(*')$ auf $M(*)$.*

(iii) *$\beta \circ \alpha$ ist ein Isomorphismus von $M(*)$ auf $M''(*'')$.*

(iv) *„$\cong$" ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. „$\cong$" besitzt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.*

Beweis: 1) Es ist $\mathrm{id}_M(x * y) = x * y = \mathrm{id}_M(x) * \mathrm{id}_M(y) \;\forall\, x, y \in M$.
2) Es ist $\alpha^{-1}[u *' v] = \alpha^{-1}[\alpha(\alpha^{-1}(u)) *' \alpha(\alpha^{-1}(v))] = \alpha^{-1}[\alpha\big(\alpha^{-1}(u) * \alpha^{-1}(v)\big)] = \alpha^{-1}(u) * \alpha^{-1}(v) \;\forall\, u, v \in M'$.
3) Nach 6.12. ist $\beta \circ \alpha : M \to M''$ eine Bijektion, und es gilt $\beta \circ \alpha(x * y) = \beta(\alpha(x) *' \alpha(y)) = \beta \circ \alpha(x) *'' \beta \circ \alpha(y) \;\forall\, x, y \in M$.
4) Die Aussage (iv) folgt aus (i), (ii), (iii) (vgl. 5.9.). $\square$

6. Ein Gruppoid $M(*)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch**
(nach Nils Henrik Abel (1802–1829)), wenn gilt:

(Kom) **Kommutativgesetz**: $x * y = y * x \quad \forall\, x, y \in M$.

Ein Gruppoid $M(*)$ heißt **assoziativ** oder **Halbgruppe**, wenn gilt:

(Ass) **Assoziativgesetz**: $x * (y * z) = (x * y) * z \quad \forall\, x, y, z \in M$.

Eine Halbgruppe $G(*)$ heißt **Gruppe**, wenn gilt:

Es existiert ein $n \in G$, genannt **neutrales Element**, mit
(Ntr) **Neutralität**: Es ist $n * x = x \quad \forall\, x \in G$.
(Inv) **Inversenbildung**: Zu jedem $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ mit $y * x = n$.

Beispiele. 1) $\mathbb{R}(+)$, $\mathbb{R}^*(\cdot)$, $\mathbb{R}^*_+(\cdot)$, $\mathbb{Q}(+)$, $\mathbb{Q}^*(\cdot)$, $\mathbb{Q}^*_+(\cdot)$, $\mathbb{Z}(+)$, $\{0\}(+)$, $\{1\}(\cdot)$, $\{1,-1\}(\cdot)$, $\mathbb{Z}_a(+_a)$ mit $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sind abelsche Gruppen (vgl. §1 – §4).

2) $\mathbb{N}_0(\cdot)$, $\mathbb{Z}(\cdot)$, $\mathbb{Q}(\cdot)$, $\mathbb{R}(\cdot)$ sind abelsche Halbgruppen, aber keine Gruppen, da es – bezogen auf das einzig mögliche neutrale Element $n = 1$ – zur Zahl 0 kein y mit $y \cdot 0 = 1$ gibt.

3) $\mathbb{N}(+)$ ist eine abelsche Halbgruppe, aber keine Gruppe, da kein neutrales Element existiert.

4) $\mathbb{Z}(-)$, $\mathbb{Q}(-)$, $\mathbb{R}(-)$ sind keine Halbgruppen wegen $1-(1-1) = 1 \neq -1 = (1-1)-1$.

5) Sind $G(*)$ und $H(*')$ Gruppen, so ist auch $G\times H$ mit der Verknüpfung

$$\boxed{(a,b) *'' (c,d) \;:=\; (a * c, b *' d)} \quad \forall\, (a,b),(c,d) \in G\times H$$

eine Gruppe, genannt **direktes Produkt** von $G(*)$ und $H(*')$. Wenn $G(*)$ und $H(*')$ abelsch sind, so ist auch $(G\times H)(*'')$ abelsch. (Zum Beweis vgl. die Übungen.)

6) Ist M eine nichtleere Menge, ist $G(*)$ ein Gruppoid und setzen wir

$$\boxed{f * g : \; M \to G : \quad x \to f(x) * g(x)} \quad \forall\, f,g \in \operatorname{Abb}(M,G),$$

so ist auch $\operatorname{Abb}(M,G)(*)$ ein Gruppoid. *Dieses ist genau dann kommutativ bzw. assoziativ bzw. Gruppe, wenn $G(*)$ kommutativ bzw. assoziativ bzw. Gruppe ist.*
(Zum Beweis vergleiche man die Übungen.)
Im Falle $M = \{1,2,...,n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist $\operatorname{Abb}(M,G) = G^n$ (vgl. 6.23.). Entsprechend der obigen Vorschrift werden die Elemente von G^n hier „*komponentenweise*" verknüpft gemäß

$$\boxed{(a_1,a_2,...,a_n) * (b_1,b_2,...,b_n) = (a_1 * b_1, a_2 * b_2, ..., a_n * b_n)} \quad \text{für } a_i, b_i \in G.$$

Eine weitere große Klasse von Beispielen erhält man mit

7. **Satz**. *Ist M eine beliebige nichtleere Menge, so ist* $\operatorname{Per}(M)(\circ)$ *eine Gruppe mit* $\mathrm{id}_M \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_M \;\wedge\; f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M = f \circ f^{-1} \quad \forall\, f \in \operatorname{Per}(M)$. *Man nennt* $\operatorname{Per}(M)(\circ)$ *die* **Permutationsgruppe** *oder die* **symmetrische Gruppe** *von M. Es gilt:*
   (i) Ist $|M| \geq 3$, so ist die Gruppe $\operatorname{Per}(M)(\circ)$ *nicht abelsch.*
   (ii) Ist $|M| = n \in \mathbb{N}$, so ist $|\operatorname{Per}(M)| = n!$.

Beweis: Nach 1., 6.10., 6.12. und 6.14. ist $\operatorname{Per}(M)(\circ)$ eine Gruppe mit den genannten Eigenschaften, und (ii) gilt gemäß 6.38. Wenn es in M wenigstens drei verschiedene Elemente a,b,c gibt, so kann man Permutationen $f,g \in \operatorname{Per}(M)$ betrachten mit

$$f(a) = b \;\wedge\; f(b) = a \;\wedge\; f(x) = x \quad \forall\, x \in M\backslash\{a,b\} \;\wedge$$
$$g(a) = c \;\wedge\; g(c) = a \;\wedge\; g(x) = x \quad \forall\, x \in M\backslash\{a,c\}.$$

Es folgt $g \circ f(a) = b \neq c = f \circ g(a)$, also $g \circ f \neq f \circ g$. Damit ist auch (i) bewiesen. □

Die folgende Aussage zeigt, daß die in 6. betrachteten Eigenschaften *durch Isomorphismen*

„treu“ übertragen werden:

8. **Strukturübertragungssatz**. *Sind $M(*), M'(*')$ Gruppoide und ist $\alpha : M(*) \to M'(*')$ ein Isomorphismus, so gilt:*
   (i) Ist $*$ kommutativ, so auch $*'$.
   (ii) Ist $*$ assoziativ, so auch $*'$.
   (iii) Aus $x * y = z$ für $x, y, z \in M$ folgt $\alpha(x) *' \alpha(y) = \alpha(z)$.
   (iv) Ist $n \in M$ mit $n * x = x \quad \forall\, x \in M$, so ist $\alpha(n) *' \alpha(x) = \alpha(x) \quad \forall\, x \in M$.
   (v) Ist $M(*)$ eine Gruppe, so auch $M'(*')$.

Beweis: Für $x, y, z \in M$ gilt $\alpha(x) *' \alpha(y) = \alpha(x * y)$ und $\alpha(y) *' \alpha(x) = \alpha(y * x)$, ferner $\alpha(x) *' (\alpha(y) *' \alpha(z)) = \alpha(x) *' \alpha(y * z) = \alpha(x * (y * z))$ und $(\alpha(x) *' \alpha(y)) *' \alpha(z) = \alpha(x * y) *' \alpha(z) = \alpha((x * y) * z))$ sowie $(x * y = z \;\Rightarrow\; \alpha(x) *' \alpha(y) = \alpha(x * y) = \alpha(z))$. Damit sind die Aussagen (i), (ii), (iii) bewiesen, und diese implizieren (iv), (v). □

B. Grundeigenschaften von Gruppen

9. Als erstes listen wir nochmals auf, was zu *prüfen* ist, wenn nachgewiesen werden soll, daß $G(*)$ eine *Gruppe* ist:

$$\boxed{\text{(Abg), ggf.(W), (Ass), (Ntr), (Inv).}}$$

Soll die Gruppe *abelsch* sein, so ist zusätzlich $\boxed{\text{(Kom)}}$ zu bestätigen.

Die durch die Gruppendefinition gegebenen Aussagen lassen sich wie folgt verschärfen:

10. **Satz**. *Ist $G(*)$ eine Gruppe, so gilt:*
   (i) Es gibt genau ein $n \in G$ mit $n * x = x \quad \forall\, x \in G$. Man nennt n **das** *neutrale Element von $G(*)$. Für dieses n gilt $x * n = x \quad \forall\, x \in G$, d.h. n operiert von links* **und** *von rechts neutral.*
   (ii) Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein $x^- \in G$ mit $x^- * x = n$. Man nennt x^- **das** *Inverse von x in $G(*)$, gelesen „x minus“ oder „x invers“. Es gilt $(x^-)^- = x \quad \forall\, x \in G$ sowie $x * x^- = n \quad \forall\, x \in G$, d.h. x^- neutralisiert x von links* **und** *von rechts.*
   (iii) Zu $a, b \in G$ gibt es genau ein $x \in G$ mit $x * a = b$. Es ist $x = b * a^-$.
   (iv) Zu $a, b \in G$ gibt es genau ein $y \in G$ mit $a * y = b$. Es ist $y = a^- * b$.
   (v) Es ist $(a * b)^- = b^- * a^- \quad \forall\, a, b \in G$.
   (vi) Es gilt $((x * a = y * a \;\Rightarrow\; x = y) \;\wedge\; (a * x = a * y \;\Rightarrow\; x = y) \quad \forall\, a, x, y \in G$.

Beweis: Es sei $n \in G$ derart, daß (Ntr) und (Inv) erfüllt sind.
1) Sind $x, y \in G$ mit $y * x = n$, so gibt es wegen (Inv) ein $z \in G$ mit $z * y = n$, und es folgt $x * y = (n * x) * y = ((z * y) * x) * y = (z * (y * x)) * y = (z * n) * y = z * (n * y) = z * y = n$.
2) Nach 1) gilt: Sind $x, y \in G$ mit $y * x = n$, so ist $x * y = n$.
3) Ist $x \in G$, so gibt es wegen (Inv) ein $y \in G$ mit $y * x = n$, und es folgt $x * n = x * (y * x) = (x * y) * x \overset{2)}{=} n * x = x$.
4) Ist $m \in G$ mit $m * x = x \;\forall\, x \in G$, so ist $m \overset{3)}{=} m * n = n$. Demnach ist n in der Gruppe $G(*)$ durch (Ntr) eindeutig festgelegt.
5) Sind $x, y, z \in G$ mit $y * x = n = z * x$, so ist $y = n * y = (z * x) * y = z * (x * y) \overset{2)}{=} z * n \overset{3)}{=} z$.

6) Wegen 2)–5) sind (i) und (ii) gültig. Für $a, b, x, y \in G$ erhalten wir dann:

7) Es ist $(b * a^-) * a = b * (a^- * a) = b * n = b$ und $a * (a^- * b) = (a * a^-) * b = n * b = b$ und $(b^- * a^-) * (a * b) = b^- * (a^- * (a * b)) = b^- * ((a^- * a) * b) = b^- * (n * b) = b^- * b = n$.

8) Wegen 7) und $(a^-)^- = a$ gilt $(x * a = y * a \;\Rightarrow\; x = (x * a) * a^- = (y * a) * a^- = y)$ und $(a * x = a * y \;\Rightarrow\; x = a^- * (a * x) = a^- * (a * y) = y)$. Damit sind auch (iii), (iv), (v) und (vi) bewiesen. □

Bemerkungen. 1) Der Beweis von 10. wurde *ohne* Verwendung von (Kom) geführt. Wenn (Kom) gültig ist, ist die Argumentation sehr viel einfacher (vgl. 1.2. – 1.5.).

2) Das Assoziativgesetz impliziert, daß *Klammern* keinen Einfluß auf das Verknüpfen haben. Deshalb werden diese oftmals fortgelassen.

3) Man beachte, daß das neutrale Element sich auf die *gesamte* Gruppe bezieht und gewissermaßen als „ *Mitte* “ der Gruppe zu betrachten ist. Die Inversenbildung erfolgt dagegen „ *elementbezogen* “.

4) Man kann Gruppen auf verschiedene Weise definieren. Wir haben hier eine Definition gewählt, bei der Gruppennachweis vergleichsweise einfach ist.

11. Statt „$*$“ verwendet man in der Regel „$\cdot$“ (mal) oder „+“ (plus). Bei der Verwendung von „$\cdot$“ als Verknüpfungszeichen schreibt man meistens e (oder 1) statt n und spricht vom **Einselement** e; ferner schreibt man dann a^{-1} statt a^-. In dieser Schreibweise lauten die Gruppengesetze, wenn man den Punkt wie üblich fortläßt:

(Abg) $a, b \in G \;\Rightarrow\; ab \in G$.
(Ass) $a(bc) = (ab)c \;\; \forall a, b, c \in G$.
$\exists\, e \in G$ mit (Ntr) $ea = a \;\; \forall\, a \in G$,
(Inv) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $ba = e$.

Während man es bei Verwendung von „$\cdot$“ offenläßt, ob $G(\cdot)$ abelsch ist oder nicht, verwendet man „+“ nur bei abelschen Gruppen und schreibt dann 0 (Null) oder 0_G statt n sowie $-a$ (minus a) statt a^-, wobei $-a$ jetzt *das Negative* von a genannt wird. Damit lauten die Gesetze:

(Abg) $a, b \in G \;\Rightarrow\; a + b \in G$.
(Kom) $a + b = b + a \quad \forall\, a, b \in G$.
(Ass) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\, a, b, c \in G$.
$\exists\, 0 \in G$ mit (Ntr) $0 + a = a$,
(Inv) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $b \in G$ mit $b + a = 0$.

Wir merken an, daß man statt $a + (-b)$ **abkürzend** oft $a - b$ schreibt.

Mit Blick auf §1– §4 erkennen wir, daß mit dem Gruppenbegriff eine Möglichkeit geschaffen wurde, die Grundgesetze des Rechnens gewissermaßen „*aus der Vogelperspektive*“ zu untersuchen und das herauszuschälen, was verschiedenen Rechenbereichen gemeinsam ist.

C. Untergruppen

12. Es sei $G(*)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge U von G heißt **Untergruppe von** G, in Zeichen: $U \leq G$, wenn $U(*|_{U \times U})$ eine Gruppe ist, wenn also U zusammen mit der in G gegebenen Verknüpfung (bezogen auf die Elemente von U) eine Gruppe ist.

Soll nachgewiesen werden, daß eine Teilmenge U einer Gruppe G eine Untergruppe ist, so greift man in der Regel auf einen der folgenden beiden Sätze zurück:

13. **Kriterium A**. *Ist $G(*)$ eine Gruppe mit n als neutralem Element und ist $U \subseteq G$, so gilt $\boxed{U \leq G}$ genau dann, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*
(U1) Es gilt $n \in U$.
(U2) $a, b \in U \;\Rightarrow\; a * b \in U$.
(U3) $a \in U \;\Rightarrow\; a^- \in U$ (a^- = Inverses von a in $G(*)$).

Beweis: 1) Ist $U(*|_{U\times U})$ eine Gruppe mit dem neutralen Element m, so gilt $m * m = m$, und in G folgt $n = m^- * m = m^- * (m * m) = (m^- * m) * m = n * m = m \in U$, also (U1). Definitionsgemäß ist auch (U2) gültig. Ist a' das Inverse von $a \in U$ in der Gruppe U, so ergibt sich $a^- * a = n = m = a' * a$ und mit 10. (vi) dann $a^- = a' \in U$, also (U3).

2) Umgekehrt sei jetzt U eine Teilmenge von G derart, daß die Bedingungen (U1), (U2), (U3) erfüllt sind. Es ist zu zeigen, daß $U(*|_{U\times U})$ dann eine Gruppe ist, d.h. es ist die Gültigkeit der Gruppengesetze aus 6. nachzuweisen. Da sich (Abg), (Ntr), (Inv) unmittelbar aus (U2), (U1) und (U3) ergeben, ist lediglich (Ass) zu bestätigen. Dieses Gesetz gilt aber für die Elemente von G und deshalb insbesondere auch für die Elemente der Teilmenge U von G. $\square$

14. **Kriterium B**. *Ist $G(*)$ eine Gruppe und ist U eine* **nichtleere** *Teilmenge von G, so ist $\boxed{U \leq G}$ genau dann, wenn gilt:*

$$(\sharp) \qquad \boxed{a, b \in U \;\Rightarrow\; a * b^- \in U} \qquad (b^- = \textit{Inverses von } b \textit{ in } G(*)).$$

Beweis: 1) Gibt es ein $x \in U$ und gilt $(\sharp)$, so ist auch $n = x * x^- \in U$. Sind nun $a, b \in U$, so führt $(\sharp)$ auf $b^- = n * b^- \in U$ und damit auf $a * b = a * (b^-)^- \in U$. Folglich gelten (U1), (U3) und (U2) (vgl. 13.).

2) Sind umgekehrt (U1), (U2), (U3) gültig, so ist $n \in U$, also $U \neq \emptyset$, und (U2), (U3) führen auf $(\sharp)$. $\square$

15. **Beispiele für Untergruppen, Isomorphismen und Automorphismen:**

1) In jeder Gruppe $G(*)$ mit dem neutralen Element n sind $\{n\}$ und G Untergruppen, auch **triviale Untergruppen** genannt.

2) Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist $m\mathbb{Z} := \{m \cdot x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}(+)$, wie man mit 13. sofort bestätigt. Die Bijektion $\alpha : \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z} : x \to m \cdot x$ ist wegen
$\alpha(x + y) = m \cdot (x + y) = m \cdot x + m \cdot y = \alpha(x) + \alpha(y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$
ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}(+)$ auf $m\mathbb{Z}(+)$.

Wir finden also in $\mathbb{Z}(+)$ unendlich viele verschiedene Untergruppen, die zu $\mathbb{Z}(+)$ isomorph sind.

3) Es gilt $\mathbb{Z}(+) \leq \mathbb{Q}(+) \leq \mathbb{R}(+)$ und $\{1\}(\cdot) \leq \{-1, 1\}(\cdot) \leq \mathbb{Q}^*(\cdot) \leq \mathbb{R}^*(\cdot)$.

4) Ist $a \in]1, \infty[$ fest gewählt, so ist $a^{\mathbb{Z}} := \{a^x \,|\, x \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}^*_+(\cdot)$, die zu $\mathbb{Z}(+)$ isomorph ist, denn die Bijektion $\beta : \mathbb{Z}(+) \to a^{\mathbb{Z}}(\cdot) : x \to a^x$ (vgl. 3.15.) ist wegen $\beta(x + y) = a^{x+y} \overset{3.14.}{=} a^x \cdot a^y = \beta(x) \cdot \beta(y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus (vgl. 8.).

Wir sehen hier, daß ein Isomorphismus Beziehungen zwischen unterschiedlichen Verknüpfungen aufdecken kann. Auch zeigt dies Beispiel wegen der Wahlmöglichkeiten für a, daß $\mathbb{R}_+^*(\cdot)$ überabzählbar viele Untergruppen enthält.

5) Ist $G(*)$ eine Gruppe, so ist $\boxed{\mathrm{id}_G}$ ein Automorphismus von $G(*)$ (vgl. 5.). Wenn $G(*)$ **abelsch** ist, dann ist auch $\boxed{\sigma : G \to G : x \to x^-}$ ein Automorphismus. Denn wegen $\sigma \circ \sigma(x) = (x^-)^- \overset{10.}{=} x \ \forall\ x \in G$ ist $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_G$, also $\sigma \in \mathrm{Per}(G)$ gemäß 6.12., und es gilt $\sigma(x * y) = (x * y)^- \overset{10.}{=} y^- * x^- = x^- * y^- = \sigma(x) * \sigma(y) \ \ \forall\ x, y \in G$.

6) Ist $G(*)$ eine Gruppe und ist $a \in G$ fest gewählt, so ist $\boxed{a^\sim : G \to G : x \to a * x * a^-}$ ein Automorphismus von $G(*)$, denn wegen $a^\sim \circ (a^-)^\sim = \mathrm{id}_G = (a^-)^\sim \circ a^\sim$ ist $a^\sim$ gemäß 6.13. bijektiv, und mit $a^\sim(x * y) = a * (x * y) * a^- = (a * x * a^-) * (a * y * a^-) = a^\sim(x) * a^\sim(y) \ \ \forall\ \ x, y \in G$ folgt dann die Behauptung. Die Abbildung $a^\sim$ wird – aufgrund ihrer speziellen Definition – als der **innere Automorphismus bzgl. a** bezeichnet. Interessant ist diese Abbildung nur für *nichtabelsche* Gruppen, denn wir erhalten $a^\sim = \mathrm{id}_G \ \forall\ a \in G$, falls $G(*)$ abelsch ist.

7) Ist $a \in \mathbb{R}^*$, so ist $\delta_a : \mathbb{R}(+) \to \mathbb{R}(+) : x \to a \cdot x$ ein Automorphismus von $\mathbb{R}(+)$, denn wegen $\delta_{a^{-1}} \circ \delta_a = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \delta_a \circ \delta_{a^{-1}}$ ist δ_a gemäß 6.13. bijektiv, und es gilt $\delta_a(x + y) = a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = \delta_a(x) + \delta_a(y) \ \ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$. Da a beliebig in $\mathbb{R}^*$ gewählt werden kann, zeigt dies Beispiel, daß $\mathbb{R}(+)$ überabzählbar viele Automorphismen besitzt.

8) Ist $M(*)$ ein Gruppoid, so bilden die sämtlichen Automorphismen von $M(*)$ nach 5. und 6.14. mit dem Verketten „$\circ$“ als Verknüpfung eine Gruppe $\mathrm{Aut}(M(*))(\circ)$, genannt **Automorphismengruppe von M**$(*)$. Wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, welche Verknüpfung $*$ auf M gewählt ist, so schreibt man auch einfach $\mathrm{Aut}(M)(\circ)$ statt $\mathrm{Aut}(M(*))(\circ)$.

Das Problem, sämtliche Beispiele von Gruppen anzugeben, wird – im Prinzip – gelöst durch

16. **Satz von Cayley**. *Jede Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer Permutationsgruppe.*

Beweis. Gegeben sei eine beliebige Gruppe $G(*)$ mit dem neutralen Element n. Wir zeigen, daß die Abbildung $\delta_a : G \to G : x \to a * x$ für jedes $a \in G$ eine Permutation von G und damit ein Element von $\mathrm{Per}(G)(\circ)$ ist, und daß $U := \{\delta_a \mid a \in G\}$ eine zu $G(*)$ isomorphe Untergruppe von $\mathrm{Per}(G)(\circ)$ ist:

1) Wegen $\delta_a(x) = \delta_a(y) \ \Rightarrow\ a * x = a * y \ \overset{10.}{\Rightarrow}\ x = y \ \ \forall\ x, y \in G$ ist δ_a injektiv, und wegen $y = \delta_a(a^- * y) \ \ \forall\ y \in G$ ist δ_a surjektiv. Mithin ist $\delta_a \in \mathrm{Per}(G)$.

2) Die Abbildung $\varphi : G \to U : a \to \delta_a$ ist definitionsgemäß surjektiv. Sind $a, b \in G$ mit $\delta_a = \delta_b$, so gilt $a = \delta_a(n) = \delta_b(n) = b$, d.h. φ ist injektiv. Weiter ist $\delta_a \circ \delta_b(x) = a * (b * x) = (a * b) * x = \delta_{a*b}(x) \ \forall x \in G$, also $\varphi(a) \circ \varphi(b) = \delta_a \circ \delta_b = \delta_{a*b} = \varphi(a * b) \in U$ für alle $a, b \in G$. Demnach ist φ ein Isomorphismus von $G(*)$ auf das Gruppoid $U(\circ|_{U \times U})$, und dieses ist nach 8. und 12. eine Untergruppe von $\mathrm{Per}(G)(\circ)$. $\square$

D. Nebenklassen von Untergruppen

17. In einer Gruppe $G(*)$ mit n als neutralem Element und mit der Inversenbildung $x \to x^-$ sei eine Untergruppe U gegeben. Dann läßt sich mit Hilfe von U auf G eine

Äquivalenzrelation $\sim_U$ erklären durch

$$(*) \qquad \boxed{x \sim_U y \;:\Leftrightarrow\; x * y^- \in U} \qquad \text{für } x, y \in G.$$

Der *Nachweis*, daß es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt, ergibt sich mit 13. wie folgt:
(Rf) Für jedes $x \in G$ gilt $x * x^- = n \in U$, also $x \sim_U x$.
(Sy) Sind $x, y \in G$ mit $x \sim_U y$, so folgt $y * x^- = (x * y^-)^- \in U$, also $y \sim_U x$.
(Tr) Sind $x, y, z \in G$ mit $x \sim_U y$ und $y \sim_U z$, so folgt $x * z^- = (x * y^-) * (y * z^-) \in U$, also $x \sim_U z$.

18. *Beispiel*: Ist $\boxed{G(*) := \mathbb{Z}(+)}$ und ist $\boxed{U = a \cdot \mathbb{Z}}$ mit $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ (vgl. 15.2)) so ist

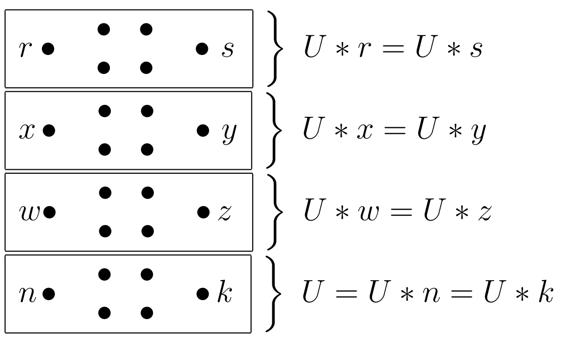
$$\boxed{x \sim_U y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in a\mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv_a y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$$

gemäß 4.21., d.h. es ist $\sim_U \;=\; \equiv_a$. Für die Relation $\equiv_a$ hatten wir in 5.14. bereits die zugehörigen Äquivalenzklassen bestimmt; dies waren die Mengen $\boxed{x + a\mathbb{Z}}$ mit $x \in \mathbb{Z}$.

19. Nach 5.12. gehört zu *jeder* Äquivalenzrelation eine Zerlegung. Ist nun U eine Untergruppe der Gruppe $G(*)$, so gilt
$y \sim_U x \quad \Leftrightarrow \quad y * x^- \in U \quad \Leftrightarrow \exists\, u \in U : y * x^- = u \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u \in U : y = u * x \quad \forall\, x, y \in G.$

Setzen wir also $\boxed{U * x := \{u * x \mid u \in U\}}$ für $x \in G$, so ist $U * x$ gemäß 5.12. die zu x bzgl. $\sim_U$ gehörige Äquivalenzklasse, und mit 5.12. folgt

$$\boxed{x \sim_U y \quad \Leftrightarrow \quad x \in U * y \quad \Leftrightarrow \quad U * x = U * y \quad \Leftrightarrow \quad (U * x) \cap (U * y) \neq \emptyset \quad \forall\, x, y \in G.}$$



$G(*)$

Man nennt $U * x$ für jedes $x \in G$ eine **Rechtsnebenklasse** von U. Verschiedene Rechtsnebenklassen sind stets disjunkt. Ist n das neutrale Element von $G(*)$, so ist $U = U * n$, d.h. U selbst gehört auch zu den Rechtsnebenklassen von U. Nach 5.12. bilden die Rechtsnebenklassen von U eine *Zerlegung* von G in paarweise disjunkte nichtleere Teilmengen.
Die folgende Aussage zeigt, daß diese in der vorliegenden Situation sogar *gleichmächtig* sind („*alle Streifen haben die gleiche Größe*"):

20. **Satz von Lagrange**. *Ist $G(*)$ eine Gruppe und ist U eine Untergruppe von G, so gilt:*
(i) $U \simeq U * x \quad \forall\, x \in G$.
(ii) Ist $|G| \in \mathbb{N}$, so ist $|U|$ ein Teiler von $|G|$.

Beweis: Für jedes $x \in G$ ist die Abbildung $U \to U * x : \; u \to u * x$ definitionsgemäß surjektiv und wegen $(u * x = v * x \;\Rightarrow\; u = v)\ \forall\, u, v \in U$ auch injektiv. Mithin gilt (i), und mit 19. und 6.34. folgt dann $|G| = r \cdot |U|$, wenn $|G| \in \mathbb{N}$ ist und wenn r die Anzahl der Nebenklassen von U in $G(*)$ ist. $\square$

21. Eine Gruppe $G(*)$ heißt **endlich**, wenn $|G| \in \mathbb{N}$ ist. Für $|G| \in \mathbb{N}$ und $U \leq G(*)$ besagt 20.(ii), daß $|U|$ keine beliebige Zahl $\leq |G|$ sein kann, sondern daß $|U|$ stets ein Teiler von $|G|$ ist. Dieses Phänomen findet in der Gruppentheorie vielfältige Anwendung.

E. Potenzregeln und zyklische Gruppen

22. Ist $G(*)$ eine Gruppe mit dem neutralen Element e, so wird durch

$$\text{(RD1)} \quad x^1 := x, \quad \text{(RD2)} \quad x^{n+1} := x^n * x \quad \forall\, x \in G, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

die n–**te Potenz** x^n von x festgelegt. Ergänzend setzen wir

(i) $x^0 := e \ \wedge\ x^{-n} := (x^n)^- \quad \forall\, x \in G, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$,

wobei $^-$ die Inversenbildung in G beschreibt. Dann ist $\boxed{x^r}$ definiert mit $x^{-r} = (x^r)^-$ $\forall\, x \in G, \forall\, r \in \mathbb{Z}$, und es folgt

(ii) $x^r * x^s = x^{r+s} = x^s * x^r \quad \forall\, r, s \in \mathbb{Z}$,

(iii) $(x^r)^s = x^{r \cdot s} \quad \forall\, r, s \in \mathbb{Z}$.

Beweis: 1) Zunächst ergibt sich (ii) für $r, s \in \mathbb{N}_0$ analog zum Beweis von 3.14. (i) durch Induktion. Sind nun $u, v \in \mathbb{N}_0$ mit $u \leq v$, so folgt $x^u * x^{v-u} = x^v = x^{v-u} * x^u$, also $x^{-u} * x^v = x^{v-u} = x^v * x^{-u}$ und durch Inversenbildung auch $x^{-v} * x^u = x^{u-v} = x^u * x^{-v}$. Damit haben wir (ii) für $r \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{N}_0$, und durch Inversenbildung folgt $x^{-s} * x^{-r} = x^{-r-s} = x^{-r} * x^{-s}$, d.h. es gilt (ii).
2) (iii) ergibt sich analog zum Beweis von 3.14. (iv). □

23. Ist $G(*)$ eine Gruppe , so wird

$$<x> := \{x^r \mid r \in \mathbb{Z}\} \quad \text{für } x \in G$$

die von x in $G(*)$ erzeugte **zyklische Untergruppe** genannt. Die gesamte Gruppe $G(*)$ heißt **zyklisch**, wenn ein $z \in G$ mit $<z> = G$ existiert.

Gemäß 13. gilt tatsächlich $<x> \leq G(*)\ \forall\, x \in G$, denn das neutrale Element x^0 liegt in $<x>$, zu x^n mit $n \in \mathbb{Z}$ ist x^{-n} invers, und für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt $x^n * x^m = x^{n+m} \in <x>$.

Nach 22 (ii) ist $<x>$ für jedes $x \in G$ eine **kommutative Untergruppe** von $G(*)$.

Mit der Vereinbarung $Z_1(+_1) := \{0\}(+)$ zeigt der folgende Satz, daß uns die zyklischen Gruppen „*bis auf Isomorphie*" bereits wohlbekannt sind:

24. **Hauptsatz 1**. *Ist $G(*)$ eine zyklische Gruppe mit z als erzeugendem Element, so ist die Abbildung $\alpha : \mathbb{Z} \to G : r \to z^r$ surjektiv.*
Entweder ist α ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}(+)$ auf $G(*)$, oder es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit
(i) $z^m = z^0$,
(ii) $z^a = z^b \ \Leftrightarrow\ m \mid (a-b) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$,
(iii) $G = \{z^0, z^1, z^2, \ldots, z^{m-1}\} \ \wedge\ |G| = m$,
(iv) $\alpha|_{Z_m}$ *ist ein Isomorphismus von $Z_m(+_m)$ auf $G(*)$.*

Beweis: Wegen $<z> = G$ ist die Abbildung α surjektiv, und nach 22. (ii) gilt $\alpha(r+s) = \alpha(r) * \alpha(s) \ \ \forall\, r, s \in \mathbb{Z}$.

1) α sei injektiv. Dann ist α ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}(+)$ auf $G(*)$.

2) α sei nicht injektiv. Dann gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $u < v \ \wedge\ z^u = z^v$, und es folgt $z^{v-u} = z^v * z^{-u} = z^0$ für $v - u \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert nun in $\mathbb{N}$ eine kleinste Zahl m mit (i). Dann gilt auch (ii), denn sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $z^a = z^b$, so ist $z^{a-b} = z^0$, und eine Division mit Rest liefert $a - b = q \cdot m + k$ mit $q \in \mathbb{Z}$ und $k \in Z_m$. Es folgt $z^k = z^{a-b-q \cdot m} = z^{a-b} * (z^m)^{-q} = z^0 * z^{0 \cdot (-q)} = z^0$ und mit der Minimalität von m dann $k = 0$, also $m \mid (a-b)$.

Sind umgekehrt $a, b \in \mathbb{Z}$ und gibt es ein $q \in \mathbb{Z}$ mit $q \cdot m = a - b$, so ist $z^a = z^{b+q\cdot m} = z^b * (z^m)^q = z^b * z^{0\cdot q} = z^b$.
Nach 4.21. gilt $m \mid (a - a_{\sim m})\ \forall\, a \in \mathbb{Z}$. Demnach führt (ii) auf (iii), und $\beta := \alpha|_{Z_m}$ erweist sich als Bijektion von $\mathbb{Z}_m$ auf G.
Sind $r, s \in Z_m$, so gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $r +_m s = r + s + tm$, und dann ist $\beta(r +_m s) = z^{r+s+tm} = z^{r+s} * (z^m)^t = z^{r+s} * z^{0\cdot t} = z^r * z^s = \beta(r) * \beta(s)$, d.h. es gilt (iv). □

Als Corollarien notieren wir

25. **Kleiner Satz von Fermat**. *Ist $G(*)$ eine endliche Gruppe mit $|G| = n \in \mathbb{N}$ und ist e das neutrale Element von $G(*)$, so ist $z^n = e\ \forall\, z \in G$.*

Beweis: Es sei $z \in G$. Die zyklische Untergruppe $<z>$ von G ist endlich, d.h. es gibt gemäß 24. ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|<z>| = m$ und $z^m = e$. Nach 20. existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot k = n$, und folglich ist $z^n = z^{m\cdot k} = (z^m)^k = z^{0\cdot k} = e$. □

26. **Satz**. *Ist p eine Primzahl und ist $G(*)$ eine Gruppe mit $|G| = p$, so ist $G(*)$ zyklisch und damit insbesondere auch kommutativ.*

Beweis: Es sei $a \in G$ mit $a \neq a^0$. Dann ist $<a> \leq G$ mit $1 < |<a>| \leq p$, und mit dem Satz von Lagrange folgt $|<a>| = p$, also $<a> = G$. □

27. Wir müssen nun darauf eingehen, daß die in 22. eingeführte Potenzschreibweise abzuwandeln ist, wenn eine Gruppe $G(+)$ mit *additivem* Verknüpfungssymbol „+“ vorliegt. Hier schreibt man nämlich $\boxed{r \odot x}$ statt x^r für $x \in G$ und $r \in \mathbb{Z}$, denn für $n \in \mathbb{N}$ soll ja x genau n–fach mit sich selbst verknüpft werden gemäß $1 \odot x = x$ und $(n+1) \odot x = n \odot x + x$.

In dieser neuen Notation lauten die Regeln aus 22. und 23. nun, wenn das neutrale Element von $G(+)$ mit 0_G bezeichnet wird, wie folgt:

(i) $0 \odot x = 0_G \ \wedge\ (-r) \odot x = -(r \odot x) \quad \forall\, x \in G,\ \forall\, r \in \mathbb{Z}$.
(ii) $r \odot x + s \odot x = (r+s) \odot x = s \odot x + r \odot x \quad \forall\, x \in G,\ \forall\, r, s \in \mathbb{Z}$.
(iii) $s \odot (r \odot x) = (s \cdot r) \odot x \quad \forall\, x \in G,\ \forall\, r, s \in \mathbb{Z}$.
(iv) Für jedes $x \in G(+)$ ist $<x> = \{r \odot x \mid r \in \mathbb{Z}\}$.

28. Wenn $G(+)$ eine Untergruppe von $\boxed{\mathbb{R}(+)}$ ist dann gilt

$$(*) \quad \boxed{r \odot x = r \cdot x} \quad \forall\, r \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in G,$$

denn es ist $1 \odot x = x = 1 \cdot x$, und aus $n \odot x = n \cdot x$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $(n+1) \odot x = = n \odot x + x = n \cdot x + x = (n+1) \cdot x$, d.h. wir haben $n \odot x = n \cdot x\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in G$. Weiter folgt $0 \odot x = 0 = 0 \cdot x$ und $(-n) \odot x = -(n \odot x) = -(n \cdot x) = (-n) \cdot x\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in G$, wie behauptet.

Ein anderes Resultat ergibt sich, wenn $\boxed{G(+) = Z_m(+_m)}$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist, denn dann gilt

$$(\diamond) \quad \boxed{r \odot x = (r \cdot x)_{\sim m}} \quad \forall\, r \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in G.$$

In der Tat! Für $x \in G$ ist $1 \odot x = x = 1 \cdot x = (1 \cdot x)_{\sim m}$, und aus $n \odot x = (n \cdot x)_{\sim m}$ folgt $(n+1) \odot x = n \odot x +_m x = (n \cdot x)_{\sim m} +_m x = (n \cdot x + x)_{\sim m} = ((n+1) \cdot x)_{\sim m}$, d.h. es gilt $(\diamond)$ für $r \in \mathbb{N}$. Wegen $0 \odot x = 0 = (0 \cdot x)_{\sim m}$ ergibt sich dann $n \odot x +_m (-n) \odot x = 0 = (n \cdot x)_{\sim m} +_m ((-n) \cdot x)_{\sim m}$, also $(-n) \odot x = ((-n) \cdot x)_{\sim m}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0,\ \forall\, x \in Z_m$.

Mit diesen Feststellungen läßt sich 24. nun wie folgt ergänzen:

29. **Hauptsatz 2**. *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine unendliche zyklische Gruppe, nämlich $\mathbb{Z}(+)$. Es gilt:*
   (i) Die einzigen erzeugenden Elemente von $\mathbb{Z}(+)$ sind 1 und -1.
   (ii) Die Untergruppen von $\mathbb{Z}(+)$ sind die Mengen $n\mathbb{Z} = <n>$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.
   (iii) Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}(+)$ ist zyklisch.

Beweis: (i): Es gilt $<r> \overset{28.}{=} \{r \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ genau für $r \in \{1, -1\}$.
(ii), (iii): Nach 15.2) ist $m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}(+)\ \forall\ m \in \mathbb{N}_0$. Ist $U \leq \mathbb{Z}(+)$ beliebig vorgegeben mit $U \neq \{0\}$ und ist $r \in U \backslash \{0\}$, so ist auch $-r \in U$, d.h. es ist $U \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, und es existiert $n := \min(U \cap \mathbb{N})$. Ist nun $x \in U$, so gibt es $q \in \mathbb{Z}$ und $k \in Z_n$ mit $x = q \cdot n + k$, und wegen $q \cdot n \overset{28.}{=} q \odot n \in U$ ist $k = x - q \cdot n \in U$, also $k = 0$ wegen $n = \min(U \cap \mathbb{N})$. Damit folgt $x \in n\mathbb{Z}$, d.h. es gilt $U \subseteq n \cdot \mathbb{Z}$. Andererseits ist $n \cdot \mathbb{Z} \overset{28.}{=} \{t \odot n \mid t \in \mathbb{Z}\} \subseteq U$, d.h. es ist $U = n\mathbb{Z} \overset{28.}{=} <n>$. □

30. **Hauptsatz 3**. *Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine zyklische Gruppe mit m Elementen, nämlich $Z_m(+_m)$. Im Falle $m \geq 2$ gilt:*
   (i) 1 ist ein erzeugendes Element von $Z_m(+_m)$.
   (ii) Ist r ein Teiler von m mit $r \geq 1$, so hat $Z_m(+_m)$ genau eine Untergruppe U_r mit r Elementen, nämlich $\boxed{U_r = \{0{\cdot}s, 1{\cdot}s, 2{\cdot}s, \ldots, (r{-}1){\cdot}s\} = <s_{\sim m}>}$ für $\boxed{s := m/r}$.
   Die Elemente von U_r werden verknüpft gemäß
   $$(*) \quad \boxed{x \cdot s +_m y \cdot s = (x +_r y) \cdot s} \quad \forall\ x, y \in Z_r.$$
   (iii) Mit (ii) sind die sämtlichen Untergruppen von $Z_m(+_m)$ erfaßt. Jede dieser Untergruppen ist zyklisch.
   (iv) Sind r, t Teiler von m mit $r, t \geq 1$, so gilt $\boxed{r \mid t \ \Leftrightarrow\ U_r \subseteq U_t}$.

Beweis: Offenbar ist $Z_1(+_1) := \{0\}(+)$ zyklisch. Im weiteren sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$:
Nach 6. ist $Z_m(+_m)$ eine Gruppe mit $1 \in Z_m$, und mit 28. ($\diamond$) folgt $Z_m = \{0, \ldots, m{-}1\} = \{(r{\cdot}1)_{\sim m} \mid r{\in}\mathbb{Z}\} = \{r \odot 1 | r{\in}\mathbb{Z}\} = <1>$, also (i). Nach 24. gibt es (bis auf Isomorphie) keine weiteren endlichen zyklischen Gruppen.

(ii): 1) Es seien $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r \cdot s = m$. Sind $x, y \in Z_r$, so gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $x{+_r}y = x{+}y{+}t{\cdot}r$, und es folgt $(x{+_r}y){\cdot}s = (x{+}y{+}tr){\cdot}s = xs{+}ys{+}t{\cdot}m \equiv_m xs{+_m}ys \in Z_m$ mit $0 \leq (x +_r y) \cdot s < r \cdot s = m$, also $(*)$ gemäß 4.22..

2) Für $W := \{0, s, 2{\cdot}s, \ldots, (r{-}1){\cdot}s\}$ gilt $W \subseteq Z_m \ \wedge\ |W| = r$, und nach 13. führt $(*)$ mit 4.28. auf $W \leq Z_m(+_m)$.

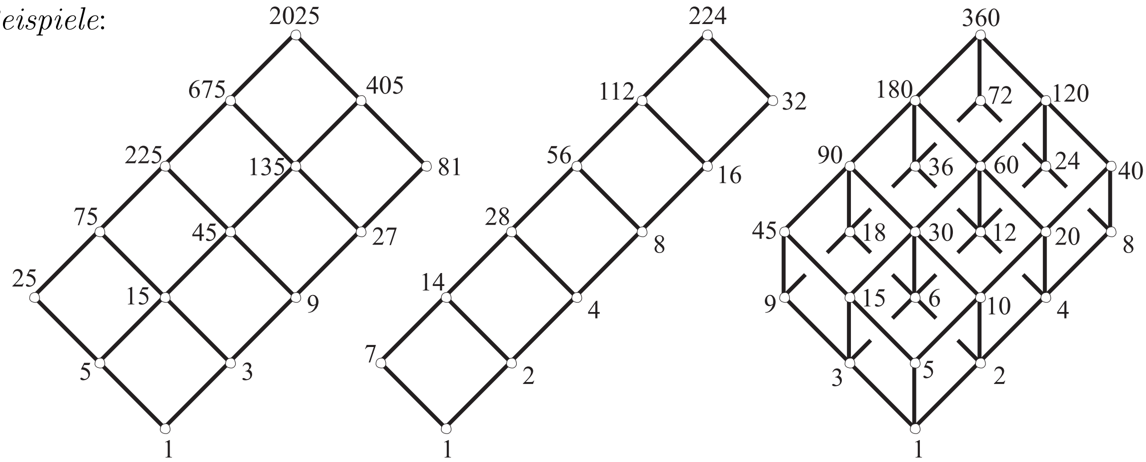
3) Gegeben sei eine beliebige Untergruppe U_r von $Z_m(+_m)$ mit $|U_r| = r$. Ist $x \in U_r$, so gilt $0 \leq x < m$, und mit 25., bezogen auf $U_r(+_m)$, ergibt sich $0 \overset{25.}{=} r \odot x \overset{28.}{=} (r \cdot x)_{\sim m}$, also $r \cdot x \equiv_m 0$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot x = k \cdot m = k \cdot r \cdot s$, d.h. es ist $x = k \cdot s$, und wir erhalten $0 \leq k = x/s < m/s = r$, also $x = k \cdot s \in W$. Dies bedeutet $U_r \subseteq W$, und wegen $|U_r| = |W| = r$ gilt dann $U_r = W$ (vgl. 6.21.). Hierbei ist $W \supseteq \{x \odot s \mid x \in \mathbb{Z}\} \overset{28.}{=} \{(x \cdot s)_{\sim m} \mid x \in \mathbb{Z}\} \supseteq \{x \cdot s \mid x \in Z_r\} = W$ und damit $U_r = W = \{x \odot s \mid x \in \mathbb{Z}\} = <s_{\sim m}>$ (mit $s_{\sim m} = s$ im Falle $s < m$).

(iii) gilt gemäß 20. und (ii).

(iv): Ist $U_r \subseteq U_t$, so führt 20. auf $r \mid t$. Sind umgekehrt $r, t \in \mathbb{N}$ mit $r \mid t \ \wedge \ t \mid m$, so ist $U_t \overset{(ii)}{=} \{0, k, 2{\cdot}k, \ldots, (t{-}1){\cdot}k\}$ für $k := m/t$, und für $v := t/r$ folgt $m/r = v{\cdot}k$, also $U_r \overset{(ii)}{=} \{0, v{\cdot}k, 2vk, \ldots, (r{-}1)vk\}$ mit $\{v, 2v, \ldots, (r{-}1)v\} \subseteq \{1, \ldots, t{-}1\}$, d.h. es ist $U_r \subseteq U_t$. $\square$

31. Ist m eine natürliche Zahl ≥ 2 mit der Primzahlzerlegung $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{k_r}$ gemäß 4.18., so kann man, wenn die Zahlen klein sind (z.B. $r \leq 3$), versuchen, ein **Teilerdiagramm** für m zu erstellen, indem man für jede Primzahl mit ihren Potenzen *eine* Richtung wählt und Linien in diesen Richtungen zieht, sobald Teilbarkeit vorliegt. Nach 30. hat man mit dem Teilerdiagramm für m zugleich auch ein *Untergruppendiagramm* für $Z_m(+_m)$.

Beispiele:



$m = 2025$ $m = 224$ $m = 360$

32. *Anmerkungen.* 1) Im allgemeinen ist es sehr schwierig, einen genauen Überblick über die Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu erhalten. Bei den zyklischen Gruppen ist dies aber ohne großen Aufwand möglich, wie wir gesehen haben, und deshalb gelten diese als die elementarsten Gruppen.

2) Es gibt bis auf Isomorphie genau eine nichtzyklische Gruppe $G(*)$ mit $|G| = 4$. Das ist die Gruppe $(Z_2{\times}Z_2)(+_2)$ (vgl. 7.6)), die auch als Klein*sche Vierergruppe* bezeichnet wird und die insbesondere abelsch ist.

Ist nämlich n das neutrale Element von G, so führt der Satz von Lagrange mit 23. auf $x^2 = n \ \ \forall\, x \in G$. Für $a, b \in G\backslash\{n\}$ mit $a \neq b$ folgt $a * b \ \notin \ \{a, b, a^2, b^2\} = \{a, b, n\}$, also auch $a * b = b * a \ \notin \ \{a, b, n\}$. Demnach gibt es für die Verknüpfungstafel von $G(*)$ nur eine einzige Möglichkeit, und diese entspricht genau der für $(Z_2{\times}Z_2)(+_2)$.

3) Nach 2), 26. und 30. kennen wir – bis auf Isomorphie – alle Gruppen mit weniger als sechs Elementen; das sind die Gruppen

$$Z_1(+_1),\ Z_2(+_2),\ Z_3(+_3),\ (Z_2{\times}Z_2)(+_2),\ Z_4(+_4),\ Z_5(+_5).$$

Weiter kennen wir nach 8. und 30. auch zwei Gruppen mit sechs Elementen, nämlich $Z_6(+_6)$ und $\mathrm{Per}\{1,2,3\}(\circ)$, wobei letztere nach 8. nun offenbar die kleinste *nichtabelsche* Gruppe ist. Man kann sich überlegen, daß es – bis auf Isomorphie – keine weiteren Gruppen mit sechs Elementen gibt. Will man jedoch zeigen, daß es – bis auf Isomorphie – genau 5 Gruppen mit 8 Elementen, genau 5 Gruppen mit 12 Elementen und genau 14 Gruppen mit 16 Elementen gibt, so muß man schon sehr viel tiefer in die Gruppentheorie einsteigen.

8. Ringe und Körper

A. Definition des Begriffes „Ring“

Die Zahlbereiche $\mathbb{Z}(+,\cdot)$, $\mathbb{Q}(+,\cdot)$, $\mathbb{R}(+,\cdot)$ liefern Beispiele von Strukturen, in denen bis zu vier Verknüpfungen erklärt sind, nämlich $+,-,\cdot,/$. Wir hatten in 1.4. und 1.9. gesehen, daß man “$-$” durch “$+$” und analog “$/$” mit Hilfe von “$\cdot$” erklären kann.

Will man also Strukturen betrachten, in denen – ähnlich wie bei den Zahlen – vier Rechnungsarten eine Rolle spielen, so wird man sich zunächst nur zwei dieser Rechnungsar-ten vorgegeben denken und wird die übrigen dann davon ableiten.

In diesem Zusammenhang betrachtet man die folgende allgemeine Definition:

1. Sind auf der Menge $R \neq \emptyset$ zwei innere Verknüpfungen $+,\cdot$ vorgegeben, so heißt das Tripel $(R,+,\cdot) =: R(+,\cdot)$ ein **Ring**, wenn gilt:

(R1) $R(+)$ ist eine *abelsche Gruppe* mit 0_R als neutralem Element.

(R2) $R(\cdot)$ ist eine *Halbgruppe*.

(R3) Es gelten die *Distributivgesetze*

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \ \wedge\ (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a \qquad \forall\ a,b,c \in R.$$

Ein Ring heißt **unitär**, wenn es in $R^* := R\backslash\{0_R\}$ ein sogenanntes **Einselement** 1_R mit

$$1_R\cdot x = x\cdot 1_R = x \quad \forall\ x\in R$$

gibt, und **kommutativ**, wenn das Kommutativgesetz

$$(Kom) \qquad x\cdot y = y\cdot x \quad \forall\ x,y\in R$$

erfüllt ist. (Für die Addition ist das Kommutativgesetz ohnehin erfüllt, nämlich aufgrund von $(R1)$.)

2. Wir kennen bereits einige Beispiele kommutativer unitärer Ringe, nämlich $\mathbb{Z}(+,\cdot)$, $\mathbb{Q}(+,\cdot)$, $\mathbb{R}(+,\cdot)$ sowie $Z_a(+_a,\cdot_a)$ für $a\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ (vgl. §1 – §4). Weiter ist auch $n\mathbb{Z}(+,\cdot)$ mit $n\mathbb{Z} := \{n\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\}$ für jedes $n\in\mathbb{N}_0$ ein kommutativer Ring, wie man leicht bestätigt, der allerdings nur im Falle $n=1$ unitär ist. $\mathbb{N}_0(+,\cdot)$ ist kein Ring, weil $\mathbb{N}_0(+)$ keine Gruppe ist.

Wichtig ist bei Ringen, daß die (abstrakten!) Verknüpfungen $+,\cdot$ nicht zusammenhanglos nebeneinander stehen, sondern daß ihr Zusammenspiel anhand der *Distributivgesetze* genau geregelt ist.

Da $R(+)$ eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0_R ist, gilt

$$\boxed{0_R + x = x + 0_R = x \quad \forall\ x\in R},$$

und zu jedem $x\in\mathbb{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $-x$, genannt **Negatives von** x, mit

$$\boxed{(-x)+x = 0_R = x+(-x) \quad \forall\ x\in R}$$

(vgl. 7.10). Wir setzen

$$\boxed{x-y := x+(-y) \quad \forall\ x,y\in R}$$

und haben damit festgelegt, wie in Ringen addiert und subtrahiert wird.

Allgemein erhalten wir

3. **Satz.** *Ist $R(+,\cdot)$ ein Ring, so gilt:*

(i) $0_R \cdot a = 0_R = a \cdot 0_R \quad \forall\, a \in R$,

(ii) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b) \quad \forall\, a,b \in R$,

(iii) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b \quad \forall\, a,b \in R$,

(iv) $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c \ \wedge\ (b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a \qquad \forall\ a,b,c \in R$.

Beweis: (i) Ist $a \in R$, so ist $0_R \cdot a + 0_R \cdot a = (0_R + 0_R)\cdot a = 0_R \cdot a = 0_R + 0_R \cdot a$, und mit 7.10.(vi) (bzgl. $+$) ergibt sich $0_R \cdot a = 0_R$. Analog führt $a\cdot 0_R + a\cdot 0_R = a\cdot(0_R+0_R) = a\cdot 0_R$ auf $a\cdot 0_R = 0_R$.

(ii) Für $a,b \in R$ erhalten wir $(-a)\cdot b + a\cdot b = ((-a)+a)\cdot b \overset{(i)}{=} 0_R$, also $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$, ferner $a\cdot(-b) + a\cdot b = a\cdot((-b)+b) \overset{(i)}{=} 0_R$, also $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$.

(iii) Für $a,b \in R$ gilt $(-a)\cdot(-b) \overset{(ii)}{=} -(a\cdot(-b)) \overset{(ii)}{=} -(-(a\cdot b)) \overset{7.10.(ii)}{=} a\cdot b$.

(iv) Für $a,b,c \in R$ ergibt sich

$a\cdot(b-c) = a\cdot(b+(-c)) = a\cdot b + a\cdot(-c) \overset{(ii)}{=} a\cdot b - (a\cdot c)$

$\wedge\ (b-c)\cdot a = (b+(-c))\cdot a = b\cdot a + (-c)\cdot a \overset{(ii)}{=} b\cdot a - (c\cdot a)$. $\square$

B. Unterringe und Isomorphismen

4. Eine Teilmenge S eines Ringes $R(+,\cdot)$ heißt **Unterring** oder **Teilring** von $R(+,\cdot)$, wenn $S(+|_{S\times S}, \cdot|_{S\times S})$ ein Ring ist, wenn also $S(+)$ Untergruppe von $R(+)$ und $S(\cdot)$ abgeschlossen bzgl. der Multiplikation ist, denn die Assoziativität (bzgl. $+,\cdot$) und die Distributivgesetze gelten von selbst in S, da sie in R gelten.

Demnach ist eine **nichtleere** Teilmenge S von R genau dann ein *Unterring* von $R(+,\cdot)$, wenn gilt (vgl. 7.14.): $\boxed{a-b,\ a\cdot b \in S \quad \forall\, a,b \in S}$.

5. Zwei Ringe $R(+,\cdot)$ und $R'(+',\cdot')$ heißen **isomorph** oder **von gleicher Struktur**, in Zeichen: $R(+,\cdot) \cong R'(+',\cdot')$, wenn es eine Bijektion f von der Menge R auf die Menge R' gibt, die die Bedingungen

$$\begin{cases} (*) & f(x+y) = f(x) +' f(y) \quad \forall \quad x,y \in R \\ (**) & f(x\ \cdot y) = f(x)\ \cdot' f(y) \quad \forall \quad x,y \in R \end{cases}$$

erfüllt. Die Bijektion f mit den Eigenschaften $(*)$ und $(**)$ wird ein **Isomorphismus** oder ein **Ringisomorphismus von** $R(+,\cdot)$ **auf** $R'(+',\cdot')$ genannt, im Falle

$$R = R' \ \wedge\ + = +' \ \wedge\ \cdot = \cdot'$$

auch ein **Automorphismus von** $R(+,\cdot)$**.** Die Bedingungen $(*)$ und $(**)$, die auch als **Homomorphiebedingungen** bzgl. $+$ bzw. $\cdot$ bezeichnet werden, bewirken, daß

$$R(+) \cong R'(+') \ \wedge\ R(\cdot) \cong R'(\cdot')$$

gilt, daß also Addition und Multiplikation in $R(+,\cdot)$ und $R'(+',\cdot')$ völlig analog ausgeführt werden (vgl. 7.3). Nach 7.5. besitzt die Isomorphie zwischen Ringen die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

6. **Beispiele.**

a) Offenbar ist $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ ein Unterring von $\mathbb{Q}(+,\cdot)$, und $\mathbb{Q}(+,\cdot)$ ist Unterring von $\mathbb{R}(+,\cdot)$.
b) Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $n\mathbb{Z}$ ein Unterring von $\mathbb{Z}(+,\cdot)$, denn nach 7.29. ist $n\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}(+)$, und für $nx, ny \in n\mathbb{Z}$ (mit $x, y \in \mathbb{Z}$) gilt $nx \cdot ny = n \cdot (xny) \in n\mathbb{Z}$ (vgl. 4.). Dieser Unterring ist allein im Falle $n = 1$ zu $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ isomorph, da $n\mathbb{Z}(+,\cdot)$ im Falle $n \neq 1$ nicht unitär ist. Nach 7.29. hat $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ keine anderen Unterringe als die Ringe $n\mathbb{Z}(+,\cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

C. Die Einheitengruppe eines Ringes

7. Ist $R(+,\cdot)$ ein beliebiger *unitärer Ring*, so kann man die Menge E_R aller derjenigen Elemente $a \in R$ betrachten, zu denen ein $x \in R$ mit $a \cdot x = x \cdot a = 1_R$ existiert. Wegen $1_R \cdot 1_R = 1_R$ ist $1_R \in E_R$, und es zeigt sich, daß $E_R(\cdot)$ eine Gruppe ist, genannt **Gruppe der Einheiten** oder **Gruppe der invertierbaren Elemente von** R.

In der Tat: Sind $a, b \in E_R$, so gibt es $x, y \in R$ mit $x \cdot a = y \cdot b = 1_R = a \cdot x = b \cdot y$, und es folgt $a \cdot b \in E_R$ wegen $(y \cdot x) \cdot (a \cdot b) = y \cdot (x \cdot a) \cdot b = y \cdot b = 1_R = a \cdot x = a \cdot (b \cdot y) \cdot x = (a \cdot b) \cdot (y \cdot x)$. Damit ist (Abg) für $E_R(\cdot)$ gezeigt, und (Ass) sowie (Ntr) mit 1_R als neutralem Element gelten offenbar ebenfalls. Ist $a \in E_R$, so gibt es ein $x \in R$ mit $a \cdot x = x \cdot a = 1_R$, und es folgt $x \in E_R$. Mithin ist auch (Inv) gültig.

Wegen $0_R \cdot x = 0_R \neq 1_R \quad \forall\, x \in R$ ist $0_R \notin E_R$, d.h. es ist $\boxed{E_R \subseteq R^*}$.

Nach 7.10. gibt es zu jedem $a \in E_R$ *genau ein* $x \in E_R$ mit $a \cdot x = x \cdot a = 1_R$; dieses Element wird als $\boxed{a^{-1}}$ notiert und wird **das Inverse** von $a \in E_R$ genannt. Wie schon bei den reellen Zahlen verwenden wir die Abkürzung $\boxed{r/a := r \cdot a^{-1}}$ für $r \in R$ und $a \in E_R$. Wenn $R(+,\cdot)$ kommutativ ist, schreiben wir auch $\frac{r}{a}$ statt $r \cdot a^{-1}$.

Bezogen auf die Addition „+“ setzen wir $\boxed{n_R := n \odot 1_R} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$ (vgl. 7.27.), d.h. es ist $2_R := 1_R + 1_R$, $3_R := 1_R + 1_R + 1_R$, u.s.w. (In $Z_2(+_2, \cdot_2)$ ist $2_R = 0_R$, und in $Z_3(+_3, \cdot_3)$ ist $3_R = 0_R$. In $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ ist $n_{\mathbb{Z}} = n \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$.)

8. **Bemerkung.** Die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ sind allein die Elemente $1, -1$, denn nur diese besitzen bzgl. „$\cdot$“ ein Inverses. Es ist also $\boxed{E_{\mathbb{Z}} = \{1, -1\}}$, und damit erklärt sich auch der Name „Einheit“.

9. Es sei $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Ist $r \in Z_a = \{0, 1, \ldots, a-1\}$, so gibt es zu r nach 4.23. (iv) und nach 4.26. genau im Falle $ggT(a, r) = 1$ ein $s \in Z_a$ mit $r \cdot_a s = s \cdot_a r = 1$, d.h. die Einheitengruppe $E_{Z_a}(\cdot_a)$ des Ringes $Z_a(+_a, \cdot_a)$ ist durch $\boxed{E_{Z_a} = \{r \in Z_a \mid ggT(r, a) = 1\}}$ gegeben.

Die *Anzahl* der Elemente von E_{Z_a} wird nach LEONHARD EULER (1707–1783) mit $\varphi(a)$ bezeichnet, und mit dem kleinen Satz von FERMAT 7.25. erhalten wir

10. **Satz von Euler.** Sind $r, a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ mit $ggT(r, a) = 1$, so ist $\boxed{r^{\varphi(a)} \equiv_a 1}$.

Beweis: Nach 4.4.(iv) gibt es $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $r \cdot s + a \cdot t = 1$, d.h. es ist $r_{\sim a} \cdot_a s_{\sim a} = 1$, also $r_{\sim a} \in E_{Z_a}(\cdot_a)$. Damit folgt $r^{\varphi(a)} \equiv_a (r_{\sim a})^{\varphi(a)} \equiv_a 1$ gemäß 7.25. $\square$

11. **Corollar 1.** *Ist $p \in \mathbb{P}$, so ist $\varphi(p) = p-1$, und es gilt* $\boxed{r^p \equiv_p r}$ $\forall\ r \in \mathbb{N}$.

Beweis: a) Wegen $ggT(r,p) = 1 \quad \forall\ r \in Z_p\backslash\{0\}$ ist $\varphi(p) = p-1$.

b) Ist $r \in \mathbb{N}$ mit $ggT(r,p) = 1$, so ist $r^{p-1} \overset{10.}{\equiv_p} 1$, also $r^p \equiv_p r$.

c) Ist $r \in \mathbb{N}$ mit $ggT(r,p) \neq 1$, so gilt $p \mid r$, also $p \mid r^p$ und damit $r^p \equiv_p 0 \equiv_p r$. □

12. **Corollar 2.** *Sind $p,q \in \mathbb{P}$ mit $p \neq q$, so ist $\varphi(p{\cdot}q) = (p{-}1){\cdot}(q{-}1)$, und für $r \in \mathbb{N}$ mit $ggT(r,\ p{\cdot}q) = 1$ gilt* $\boxed{r^{(p-1)\cdot(q-1)} \equiv_{p\cdot q} 1}$.

Beweis: Ist $r \in Z^*_{p\cdot q}$, so ist $ggT(r,p{\cdot}q) \neq 1$ nur für $r \in \{p{\cdot}k \mid 1{\le}k{<}q\} \cup \{q{\cdot}k \mid 1{\le}k{<}p\}$, d.h. es ist $\varphi(p{\cdot}q) = (p{\cdot}q-1) - (q{-}1) - (p{-}1) = (p{-}1){\cdot}(q{-}1)$. Mit 10. führt dies auf die Behauptung. □

13. *Bemerkung.* Die eingerahmte Aussage in 12. spielt eine herausragende Rolle bei dem Nachweis, daß eines der wirkungsvollsten Verschlüsselungsverfahren von Nachrichten unter Verwendung großer Primzahlen wirklich funktioniert. Selbst schon bei kleinen Primzahlen bezieht sich die Identität auf große Zahlen: Für $p{=}11$ und $q{=}13$ ergibt sich $r^{120}{\equiv_{143}} 1$ für jedes (!!) $r \in \mathbb{N}$ mit $11 \nmid r \ \wedge\ 13 \nmid r$.

D. Körper

14. Offenbar ist $E_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^*$ und $E_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^*$, d.h. in diesen Ringen ist 0 die einzige Nichteinheit. Derartige Ringe, in denen man durch jedes von 0_R verschiedene Elemente dividieren kann, erhalten einen besonderen Namen:

Ein *unitärer* Ring $R(+,\cdot)$ heißt **Divisionsring** oder **Schiefkörper**, wenn es zu jedem $a \in R^*$ ein $x \in R^*$ mit $x \cdot a = a \cdot x = 1_R$ gibt, wenn als $\boxed{E_R = R^*}$ ist.

Jeder *kommutative Divisionsring* wird als **Körper** bezeichnet („Körper" im Sinne von „Körperschaft", *nicht* im Sinne eines räumlichen Gebildes).

Demnach ist ein unitärer Ring $R(+,\cdot)$ genau dann ein *Körper*, wenn gilt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (Kom) & x \cdot y = y \cdot x \quad \forall\ x,y \in R, \\ (Inv) & \text{Zu jedem } a \in R^* \text{ gibt es ein } x \in R^* \text{ mit } x \cdot a = 1_R. \end{array}}$$

15. Nach §1.A. ist $\mathbb{R}(+,\cdot)$ ein Körper, und nach 3.11. ist $\mathbb{Q}(+,\cdot)$ ein Körper. Nach 4.30. ist der Ring $Z_a(+_a,\cdot_a)$ mit $a \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ genau dann ein Körper, wenn a eine Primzahl ist, und offenbar ist $\mathbb{Z}(+,\cdot)$ kein Körper.

Mit den Begriffen „Gruppe" und „Körper" haben wir die wohl wichtigsten Begriffe der Algebra vor Augen.

Sind zwei isomorphe Ringe gegeben und ist einer dieser Ringe ein Körper, so nach 7.8. auch der andere. Ein Isomorphismus zwischen Körpern wird auch als **Körperisomorphismus** bezeichnet.

E. Quadratische Ringerweiterungen

Die Algebraiker haben eine ganze Reihe von Verfahren entwickelt, um aus vorhandenen Ringen neue Ringe und Körper zu konstruieren. Für uns wird das folgende Verfahren von besonderer Bedeutung sein:

16. In einem *kommutativen unitären Ring* $R(+,\cdot)$ sei ein Element α fest ausgewählt. Mit Hilfe von α läßt sich die abelsche Gruppe $\boxed{R^2(+) = (R \times R)(+)}$, die man gemäß 7.6.(6) durch *komponentenweise Addition* $\boxed{(x,y)+(u,v) := (x+u, y+v)}$ für $x,y,u,v \in R$ erhält und deren neutrales Element $(0_R, 0_R)$ ist, ausbauen zu einem kommutativen unitären **Ring** $\boxed{R^2(+,\cdot_\alpha)}$ mit der *Multiplikation* $\boxed{(x,y)\cdot_\alpha (u,v) := (xu+\alpha yv, xv+yu)}$ für $x,y,u,v \in R$.

Die Multiplikationsvorschrift merkt man sich so:

(Erstes · Erstes' + Alpha · Zweites · Zweites', Erstes · Zweites' + Zweites · Erstes').

Wir nennen $R^2(+,\cdot_\alpha)$ die α**–quadratische Ringerweiterung von** $R(+,\cdot)$**.**

Beweis der genannten Eigenschaften von $R^2(+,\cdot_\alpha)$*:*

a) Je zwei Elementen $(x,y),(u,v)$ von R^2 ist eindeutig ein Element $(x,y)\cdot_\alpha(u,v) \in R^2$ zugeordnet, d.h. $R^2(\cdot_\alpha)$ ist ein Gruppoid. Dieses ist assoziativ und kommutativ, denn für $x,y,u,v,z,w \in R$ gilt

$$(x,y)\cdot_\alpha((u,v)\cdot_\alpha(z,w)) = (x,y)\cdot_\alpha(uz+\alpha vw, uw+vz)$$
$$= (xuz+\alpha xvw+\alpha yuw+\alpha yvz, xuw+xvz+yuz+\alpha yvw)$$
$$= (xu+\alpha yv, xv+yu)\cdot_\alpha(z,w) = ((x,y)\cdot_\alpha(u,v))\cdot_\alpha(z,w)$$

sowie $(x,y)\cdot_\alpha(u,v) = (ux+\alpha vy, uy+vx) = (u,v)\cdot_\alpha(x,y)$.

b) Es gelten die Distributivgesetze, denn für $x,y,u,v,z,w \in R$ haben wir

$$(x,y)\cdot_\alpha((u,v)+(z,w)) = (x,y)\cdot_\alpha(u+z, v+w)$$
$$= (xu+xz+\alpha yv+\alpha yw, xv+xw+yu+yz) = (xu+\alpha yv, xv+yu)+(xz+\alpha yw, xw+yz)$$
$$= (x,y)\cdot_\alpha(u,v)+(x,y)\cdot_\alpha(z,w),$$ und „ $\cdot_\alpha$“ ist kommutativ.

c) Da $R^2(+)$ eine abelsche Gruppe ist, folgt aus a) und b), daß $R^2(+,\cdot_\alpha)$ ein kommutativer Ring ist. Dieser ist *unitär* mit $(1_R, 0_R)$ als Einselement, denn es ist $(1_R,0_R)\cdot_\alpha(x,y) = (x,y) \quad \forall\ x,y \in R$. $\square$

17. Die Teilmenge $R\times\{0_R\}$ von R^2 ist ein *Unterring* von $R^2(+,\cdot_\alpha)$, denn es ist

$$(x,0_R)-(u,0_R) = (x-u,0_R) \ \wedge\ (x,0_R)\cdot_\alpha(u,0_R) = (x\cdot u, 0_R) \qquad \forall\ x,u \in R.$$

Da die Bijektion $f: R \to R\times\{0_R\} : x \to (x,0_R)$ wegen

$$\begin{array}{rclclcll} f(x+u) &=& (x+u,0_R) &=& (x,0_R)+(u,0_R) &=& f(x)+f(u) & \forall\ x,u\in R \\ \wedge\ f(x\cdot u) &=& (x\cdot u,0_R) &=& (x,0_R)\cdot_\alpha(u,0_R) &=& f(x)\cdot_\alpha f(u) & \forall\ x,u\in R \end{array}$$

ein Isomorphismus ist und da folglich in $R(+,\cdot)$ genauso wie in $(R\times\{0_R\})(+,\cdot)$ gerechnet wird, ist es üblich, $R(+,\cdot)$ mit $(R\times\{0_R\})(+,\cdot)$ zu **identifizieren**, indem man $\boxed{x = (x,0_R) \quad \forall\ x\in R}$ setzt. Wir haben dann $\boxed{R = R\times\{0_R\} \subset R^2}$ und betrachten $R(+,\cdot)$ im weiteren als **Unterring von** $R^2(+,\cdot_\alpha)$. Man sagt, durch die Identifikation $x = (x,0_R) \quad \forall\ x \in R$ wird $R(+,\cdot)$ in $R^2(+,\cdot_\alpha)$ *eingebettet*. Insbesondere ist nun $0_R = (0_R,0_R)$ das *Nullelement* und $1_R = (1_R,0_R)$ das *Einselement* sowohl von $R^2(+,\cdot_\alpha)$ als auch von $R(+,\cdot)$.

Wir setzen $\boxed{i_R := (0_R, 1_R)}$ und erhalten $\boxed{(x,y) = x + i_R\cdot y \quad \forall\ x,y\in R}$ wegen

$$(x,y) = (x,0_R)+(0_R,y) = (x,0_R)+(0_R,1_R)\cdot_\alpha(y,0_R).$$

Es ist $\boxed{i_R \cdot_\alpha i_R = (\alpha, 0_R) = \alpha}$, und damit sieht man jetzt, daß die zunächst etwas künstlich wirkende Multiplikationsvorschrift letztlich nur auf distributivem Ausmultiplizieren beruht:

$$\boxed{(x + i_R \cdot y) \cdot_\alpha (u + i_R \cdot v) = x \cdot u + \alpha \cdot y \cdot v + i_R \cdot (x \cdot v + y \cdot u)} \quad \forall\, x, y, u, v \in R.$$

18. Die in 16. und 17. vorgestellte Konstruktion ist ziemlich allgemein, und man kann fragen, was damit gewonnen wurde.

Bevor wir darauf eingehen, stellen wir zunächst fest, daß die konstruierten Ringe für verschiedene $\alpha, \beta \in R$ gelegentlich isomorph sein können:

19. **Isomorphiesatz.** *Gegeben sei ein kommutativer unitärer Ring $R(+,\cdot)$. Sind $\alpha, \beta \in R^*$ und gibt es ein $r \in E_R$ mit $\alpha = r^2 \cdot \beta$, so ist* $\boxed{R^2(+,\cdot_\alpha) \;\cong\; R^2(+,\cdot_\beta)}$.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $f\,:\,R^2 \to R^2\,:\,(x,y) \to (x, r\cdot y)$, die wegen $(x,y,u,v \in R \;\wedge\; f(x,y) = f(u,v) \;\Rightarrow\; x = u \;\wedge\; r\cdot y = r\cdot v \;\Rightarrow\; (x,y) = (u,v))$ injektiv und wegen $((u,v) \in R^2 \;\Rightarrow\; f(u, r^{-1}\cdot v) = (u,v))$ surjektiv ist. Für $x,y,u,v \in R$ gilt $f((x,y)+(u,v)) = f(x+u, y+v) = (x+u, ry+rv) = f(x,y)+f(u,v) \wedge f((x,y)\cdot_\alpha(u,v)) = f(xu+\alpha yv, xv+yu) = (xu+\alpha yv, rxv+ryu) = (xu+\beta ryrv, xrv+ryu) = f(x,y)\cdot_\beta f(u,v)$, und mithin ist f ein Isomorphismus von $R^2(+,\cdot_\alpha)$ auf $R^2(+,\cdot_\beta)$. $\square$

F. Quadratische Körpererweiterungen

Als besonders bedeutungsvoll erweist sich nun

20. **Hauptsatz.** *Ist $R(+,\cdot)$ ein Körper und ist $\alpha \in R$ mit $\alpha \neq x^2 \;\; \forall\, x \in R$, so ist $R^2(+,\cdot_\alpha)$ ein* **Körper**, *genannt „α-quadratische Körpererweiterung von $R(+,\cdot)$“.*

Beweis: Wegen 16. ist nur zu zeigen: Ist $(u,v) \in R^2$ mit $(u,v) \neq (0_R, 0_R)$, so existiert $(x,y) \in R^2$ mit $(x,y) \cdot_\alpha (u,v) = 1_R$. Dazu bemerken wir zuerst, daß $u^2 - \alpha v^2 \in R^*$ ist, denn im Falle $v = 0_R$ ist $u \neq 0_R \;\wedge\; u^2 \neq 0_R$, da $R^*(\cdot)$ eine Gruppe ist, und im Falle $v \neq 0_R$ ist $u^2 - \alpha v^2 \neq 0_R$, da sonst $\alpha = (u/v)^2$ wäre. Wir setzen nun $(x,y) := (u\cdot(u^2-\alpha v^2)^{-1}, -v\cdot(u^2-\alpha v^2)^{-1})$ und erhalten damit tatsächlich $(x,y)\cdot_\alpha(u,v) = ((u^2-\alpha v^2)\cdot(u^2-\alpha v^2)^{-1}, (uv-vu)\cdot(u^2-\alpha v^2)^{-1}) = 1_R$. $\square$

21. **Corollar 1.** *Ist $n \in 2\mathbb{N}+1$ und existiert ein Körper mit n Elementen, so existiert auch ein Körper mit n^2 Elementen.*

Beweis: Es sei $R(+,\cdot)$ ein Körper mit n Elementen. Wäre $1_R = -1_R$, so hätten wir $1_R + 1_R = 0_R$, und dann wäre $\{0_R, 1_R\}$ eine Untergruppe von $R(+)$, d.h. mit 7.20. ergäbe sich $2 \mid n$. Demnach ist $1_R \neq -1_R$, und folglich ist die Abbildung $g\,:\,R \to R\,:\,x \to x^2$ wegen $(1_R)^2 = 1_R = (-1_R)^2$ *nicht* injektiv. Nach 6.21. ist g auch nicht surjektiv, und deshalb existiert ein $\alpha \in R$ mit $\alpha \neq x^2 \quad \forall\; x \in R$. Nach 20. und 6.36. ist $R^2(+,\cdot_\alpha)$ dann ein Körper mit n^2 Elementen. $\square$

22. **Corollar 2.** *Ist $p \in \mathbb{P}\backslash\{2\}$ und $k \in \mathbb{N}_0$, so existiert ein Körper mit $p^{(2^k)}$ Elementen.*

Beweis: Nach 4.30. existiert ein Körper mit p Elementen, und nach 21. dann auch einer mit $p^2, (p^2)^2 = p^4, (p^4)^2 = p^8, \ldots, p^{(2^k)}$ Elementen. $\square$

23. *Anmerkung.* Über 22. hinausgehend wird in der Algebra bewiesen:

Ist $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$, so gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen Körper mit p^m Elementen. Weitere Körper mit endlich vielen Elementen gibt es nicht.

Indem wir jetzt speziell den Körper $\mathbb{R}(+,\cdot)$ der reellen Zahlen als Ausgangsring wählen, erhalten wir:

24. **Satz** *über die quadratischen Ringerweiterungen von $\mathbb{R}(+,\cdot)$:*

(i) *Ist $\alpha \in \mathbb{R}^*_+$ so ist $\mathbb{R}^2(+,\cdot_\alpha) \cong \mathbb{R}^2(+,\cdot_1)$.*

(ii) *Ist $\alpha \in \mathbb{R}^*_-$, so ist $\mathbb{R}^2(+,\cdot_\alpha) \cong \mathbb{R}^2(+,\cdot_{(-1)})$.*

(iii) $\mathbb{D}(+,\cdot) := \mathbb{R}^2(+,\cdot_0)$ *wird* **Ring der Dualzahlen** *genannt;*
es ist $E_{\mathbb{D}} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \neq 0\}$.

(iv) $\mathbb{A}(+,\cdot) := \mathbb{R}^2(+,\cdot_1)$ *wird* **Ring der Doppelzahlen** *genannt;*
es ist $E_{\mathbb{A}} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 \neq v^2\}$.

(v) $\mathbb{C}(+,\cdot) := \mathbb{R}^2(+,\cdot_{(-1)})$ *ist ein Körper, genannt* **Körper der komplexen Zahlen**.

Beweis: (i) und (ii) folgen aus 19., und (v) folgt aus 20.

(iii): Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^2(+,\cdot_0)$, so ist festzustellen, wann es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(1,0) = (x,y)\cdot_0(u,v) = (xu, xv + yu)$ gibt. Für $u = 0$ geht das nicht, wohl aber für $u \neq 0$, denn dann kann man $x = u^{-1} \ \wedge \ y = -u^{-2} \cdot v$ wählen.

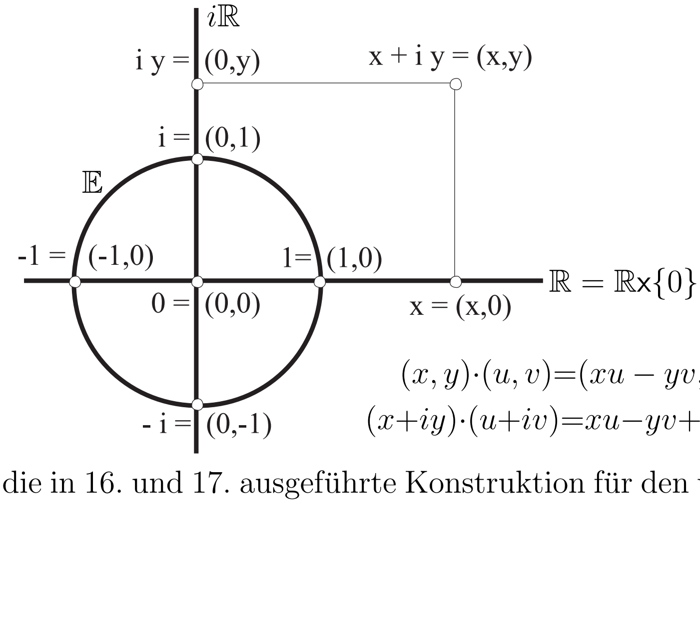
(iv): Ist $(u,v) \in \mathbb{R}^2(+,\cdot_1)$, so wird gefragt, wann es $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(1,0) = (x,y)\cdot_1(u,v) = (xu + yv, xv + yu)$ gibt. Wenn solche x, y existieren, dann kann nicht $u^2 = v^2$ sein, denn sonst wäre $u = u \cdot 1 = xu^2 + yuv = (xv + yu) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ und damit $v = 0$ im Widerspruch zu $xu + yv = 1$. Ist aber $u^2 \neq v^2$, so ist $(x,y) := \left(\frac{u}{u^2 - v^2}, \frac{-v}{u^2 - v^2}\right)$ die gesuchte Lösung. □

G. Komplexe Zahlen

25. Im weiteren werden wir uns nur mit der einfachsten der in 24. betrachteten Strukturen befassen; das ist der *Körper* $\mathbb{C}(+,\cdot)$ *der komplexen Zahlen*, bei dem „$\cdot$“ für „$\cdot_{(-1)}$“ steht:

$\mathbb{R}^{\mathbf{2}}(+,\cdot) = \mathbb{C}(+,\cdot)$

$\boxed{\mathbf{i^2 = -1}}$



$(x,y)+(u,v)=(x+u, y+v)$

$x+iy + u+iv = x+u+i(y+v)$

$(x,y)\cdot(u,v)=(xu - yv, xv + yu)$

$(x+iy)\cdot(u+iv)=xu-yv+i(xv+yu)$

Zunächst kommentieren wir die in 16. und 17. ausgeführte Konstruktion für den vorliegenden Spezialfall:

Es sei $\mathbb{R}(+,\cdot)$ der Körper der reellen Zahlen. Wie bereits früher vermerkt, deuten wir $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ als die Punktmenge der Anschauungsebene, indem wir uns jeden Punkt (x,y) durch seine *Koordinaten* x,y beschrieben denken.

Das überraschende Ergebnis, das gewiß eine der größten Errungenschaften der Mathematik darstellt und das maßgeblich auf Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) zurückgeht, ist die Erkenntnis, daß man für die Punkte der Anschauungsebene derart geschickt eine Addition und eine Multiplikation einführen kann, daß ein Körper entsteht, also ein Rechen-bereich, in dem alle vier Grundrechnungsarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division uneingeschränkt ausführbar sind (bis auf das Verbot der Division durch Null). Es gilt

(i) $(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v)$,

(ii) $(x,y) - (u,v) = (x-u, y-v)$,

(iii) $(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu)$ (mit „$-$“ in der ersten Komponente!) und

(iv) $(x,y)/(u,v) = \dfrac{(x,y)}{(u,v)} = \left(\dfrac{xu+yv}{u^2+v^2}, \dfrac{-xv+yu}{u^2+v^2}\right)$

für $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, wobei die letzte Gleichung sich für $(u,v) \neq (0,0)$, also für $u^2+v^2 \neq 0$ ergibt aus $(u,v)^{-1} = \left(\dfrac{u}{u^2+v^2}, \dfrac{-v}{u^2+v^2}\right)$ (vgl. d. Beweis von 20.).

Wesentlich ist hierbei, daß für das Rechnen die gleichen Grundgesetze gelten wie bei den reellen Zahlen, die wir dort in den Regeln (R1)–(R6) (vgl.§1.A.) zusammengefaßt hatten.

Wesentlich ist außerdem, daß es sich hier um eine wirkliche *Zahlbereichserweiterung* handelt, denn aufgrund der Identifikation $x = (x,0) \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$ finden wir $\mathbb{R}$ jetzt als „x–Achse“ in der Anschauungsebene wieder, und die neuen „komplexen“ Rechenregeln stimmen mit den alten Regeln für $\mathbb{R}$ überein, solange wir uns nur auf die Punkte der x–Achse beziehen.

Wer angefangen hat, damit umzugehen, stellt bald fest, daß man mit komplexen Zahlen, also mit den Punkten der gesamten Ebene, genau so einfach rechnen kann wie mit reellen Zahlen, also mit den Punkten der x-Achse. Deshalb ist es auch nicht übertrieben, daß diese Objekte nun ebenfalls als *Zahlen* bezeichnet werden.

Statt $i_{\mathbb{R}}$ schreiben wir im weiteren einfach i . Wir haben dann

$$\boxed{i := (0,1)} \quad \text{und} \quad \boxed{(x,y) = x + iy \quad \forall \; x,y \in \mathbb{R}} \quad \text{(vgl.17.)},$$

und wir müssen nun die überraschende Aussage $\boxed{i^2 = -1}$ zur Kenntnis nehmen:

Es wird nach wie vor nicht behauptet, daß das Quadrat einer reellen Zahl negativ sein kann. Wir haben jetzt aber neue Zahlen, und eine davon, eben die komplexe Zahl i, die nichts anderes ist als der Einheitspunkt auf der „y–Achse“, liefert beim Quadrieren (ebenso wie $-i$) die reelle Zahl -1.

Man nennt i auch die **imaginäre Einheit**. Das hat historische Gründe, denn etwa seit 1540 rechneten Mathematiker wie G. Cardano und R. Bombelli mit der Größe „i“, ohne zu wissen, was das eigentlich sein soll. (Es funktionierte hervorragend, aber das Wesen der Zahl i blieb zunächst im Dunklen.) Für den heutigen Mathematiker ist die Zahl i genau so konkret wie die Zahl 1.

Wieder aus historischen Gründen bezeichnet man die sogenannte „y–Achse“ $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{yi \mid y \in \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}i =: i\mathbb{R}$ als die **imaginäre Achse**.

Bei der Darstellung von $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ nennt man x den **Realteil** und y den **Imaginärteil** von z, in Zeichen: $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

Die Menge

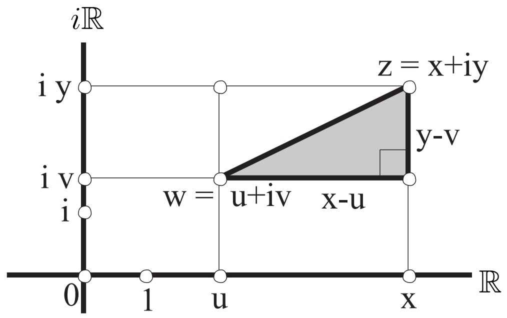
$$\mathbb{E} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

wird als **Einheitskreis** bezeichnet. Es gilt $1, -1, i, -i \in \mathbb{E}$ und genauer $x + i\sqrt{1-x^2}$, $x - i\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{E} \quad \forall \ x \in [1, -1]$, d.h. $\mathbb{E}$ besteht aus unendlich vielen Punkten.

H. Absolutbetrag und Konjugation in $\mathbb{C}(+,\cdot)$

26. Ebenso wie bei den reellen Zahlen kann man auch für komplexe Zahlen einen Absolutbetrag definieren. Man setzt fest:

Die Zahl $|x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+$ wird der **Absolutbetrag von** $x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ genannt. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung des für $\mathbb{R}$ erklärten Absolutbetrages, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x| = \sqrt{x^2}$. Der Absolutbetrag läßt sich geometrisch deuten:

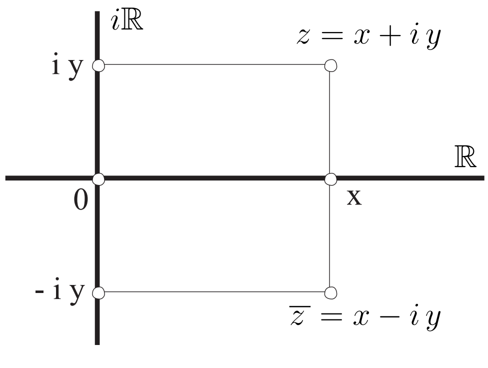


Sind $z = x + iy$ und $w = u + iv$ komplexe Zahlen mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, so wird die Zahl

$$\boxed{\begin{aligned} d(z,w) &= d(x+iy, u+iv) \\ &:= \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}}$$

im Hinblick auf den Satz des Pythagoras der **Abstand** oder auch die **Distanz** der Punkte z und w genannt.

Wegen $z - w = (x{-}u) + i\,(y{-}v)$ ist dann $\boxed{d(z,w) = |z - w|}$, und für $w = 0$ ergibt sich $\boxed{d(z,0) = |z|}$, d.h. *der Absolutbetrag einer komplexen Zahl ist ihr Abstand vom sog.* **Ursprung** $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.



27. Die Abbildung

$$\boxed{\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + i\,y \to \overline{x + iy} := x - i\,y}$$

(für $x, y \in \mathbb{R}$) wird **Konjugation** genannt; sie ist ein *Automorphismus* des Körpers $\mathbb{C}(+,\cdot)$ mit hervorragenden Eigenschaften und wird auch als die **Spiegelung an** $\mathbb{R}$ bezeichnet.

a) Es gilt $\kappa \circ \kappa = id_{\mathbb{C}}$, *also* $\kappa = \kappa^{-1}$ *und* $\boxed{\overline{\overline{z}} := \overline{(\overline{z})} = z} \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$.

b) Es ist $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z) \leq 2 \cdot |z|$ *und* $z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z) \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$.

c) Es ist $\boxed{\overline{z} = z \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{R}} \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$.

d) Es ist $z + \overline{z} = 0 \ \Leftrightarrow \ z \in \mathbb{R}i \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$.

e) Es ist $|z| = |\overline{z}| = |-z| \quad \forall \ z \in \mathbb{C}$.

f) Es ist $\boxed{z+\overline{z}\in\mathbb{R}}$ *und* $\boxed{z\cdot\overline{z}=|z|^2\in\mathbb{R}_+}$ $\forall\ z\in\mathbb{C}$.

g) Es gilt $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}\ \wedge\ \overline{z-w}=\overline{z}-\overline{w}\ \wedge\ \overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}\quad\forall\ z,w\in\mathbb{C}$.

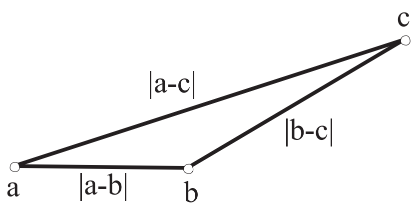
h) Es ist $w^{-1}=\dfrac{1}{w}=\dfrac{\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}=\dfrac{\overline{w}}{|w|^2}\quad\forall\ w\in\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

k) Es ist $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}\quad\forall\ z\in\mathbb{C},\quad\forall\ w\in\mathbb{C}^*$.

ℓ) Es ist $\boxed{|z\cdot w|=|z|\cdot|w|}\quad\forall\ z,w\in\mathbb{C}$.

Beweis: Es seien $x,y,u,v\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$ und $w=u+iv$.
a) Wegen $\kappa\circ\kappa(z)=z$ für jedes $z\in\mathbb{C}$ ist $\kappa\circ\kappa=\mathrm{id}_\mathbb{C}$. Nach 6.13. ist κ dann eine Bijektion mit $\kappa=\kappa^{-1}$.
b) Es ist $z+\overline{z}=2x\le 2|x|=2\sqrt{x^2}\overset{2.24.}{\le}2\sqrt{x^2+y^2}=2|z|$ und $z-\overline{z}=2iy$.
c) Es ist $\overline{z}=z\ \Leftrightarrow\ -iy=iy\ \Leftrightarrow\ 2i\cdot y=0\ \Leftrightarrow\ y=0$.
d) Es ist $z+\overline{z}=0\ \Leftrightarrow\ 2x=0\ \Leftrightarrow\ x=0$.
e) Es ist $x^2+y^2=x^2+(-y)^2=(-x)^2+(-y)^2$.
f) Es ist $z+\overline{z}=2x\in\mathbb{R}$ und $z\cdot\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$.
g) Es ist $\overline{z\pm w}=x\pm u-i(y\pm v)=\overline{z}\pm\overline{w}$ und $\overline{z\cdot w}=xu-yv-i(xv+yu)=(x-iy)\cdot(u-iv)=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
h) Es ist $w^{-1}\cdot w=1\ \wedge\ w^{-1}\cdot|w|^2\overset{f)}{=}w^{-1}\cdot(w\cdot\overline{w})=\overline{w}$.
k) Es ist $\overline{w}\cdot\overline{(w^{-1}\cdot z)}\overset{g)}{=}\overline{w\cdot w^{-1}\cdot z}=\overline{z}$.
ℓ) Es ist $|zw|^2\overset{f)}{=}zw\cdot\overline{zw}\overset{g)}{=}z\overline{z}\cdot w\overline{w}\overset{f)}{=}|z|^2\cdot|w|^2=(|z|\cdot|w|)^2$. Wegen $|zw|,|z|\cdot|w|\in\mathbb{R}_+$ führt dies mit 2.27. auf die Behauptung. □

28. **Die Dreiecksungleichung**.



1. Fassung: $|z+w|\le|z|+|w|\quad\forall\ z,w\in\mathbb{C}$,

2. Fassung: $||z|-|w||\le|z-w|\quad\forall\ z,w\in\mathbb{C}$,

3. Fassung: $|a-c|\le|a-b|+|b-c|\quad\forall\ a,b,c\in\mathbb{C}$.

Beweis: 1. Fassung: Für $z,w\in\mathbb{C}$ ist $|z+w|^2=(z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w})=z\overline{z}+z\overline{w}+\overline{z}w+w\overline{w}=z\overline{z}+2\cdot\mathrm{Re}(z\overline{w})+w\overline{w}\overset{27.b)}{\le}z\overline{z}+2\cdot|\overline{z}w|+w\overline{w}=|z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2$.
Daraus folgt mit 2.24. und 2.27. die Behauptung.

Die 2. Fassung folgt aus der 1. wie 1.27. aus 1.26., und die 3. Fassung folgt aus der 1. für $z:=a-b$ und $w:=b-c$. □

29. Aus 27. ℓ) und 28. erkennt man, daß der Absolutbetrag für $\mathbb{C}$ die gleichen Grundeigenschaften wie für $\mathbb{R}$ besitzt.

30. **Satz.** *Der Einheitskreis* $\mathbb{E}$ *ist eine Untergruppe der Gruppe* $\mathbb{C}^*(\cdot)$. *Es gilt*

a) $\mathbb{E}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}=\{z\in\mathbb{C}\mid z\cdot\overline{z}=1\}$,
b) $z^{-1}=\overline{z}\quad\forall\ z\in\mathbb{E}$,
c) $\mathbb{E}=\{\,v/|v|\mid v\in\mathbb{C}^*\}=\{\,w/\overline{w}\mid w\in\mathbb{C}^*\}$.
d) Die Mengen $\{1\},\{1,-1\},\left\{1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ *und* $\{1,i,i^2,i^3\}=\{1,i,-1,-i\}$ *sind zyklische Untergruppen von* $\mathbb{E}(\cdot)$.

Beweis: a), b): Für $z \in \mathbb{C}$ ist $|z| = 1 \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z \cdot \overline{z} = 1 \;\Leftrightarrow\; z^{-1} = \overline{z} \neq 0$.
c) Für $v, w \in \mathbb{C}^*$ gilt $\big| v/|v| \big| = |v|/|v| = 1$ und $|w/\overline{w}| = |w|/|\overline{w}| = 1$. Ferner ist $(-1)/|-1| = -1 = i/\overline{i}$, und für $a \in \mathbb{E}\backslash\{-1\}$ ist $a/|a| = a = (1+a)/(\overline{1+a})$ wegen $a{\cdot}(1+\overline{a}) = a + 1 = 1 + a$.
d): Es ist $(-1)^2 = 1, i^2 = -1, i^3 = (-1) \cdot i = -i, i^4 = (-1)^2 = 1$, und für $z := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ist $z \cdot \overline{z} = \frac{1}{4} - i^2\frac{3}{4} = 1$ mit $z^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + i^2 \cdot \frac{3}{4} = \overline{z}$. □

31. *Für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt*
(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *(ii)* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
(iii) $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$, *(iv)* $a \cdot b = 0 \;\Leftrightarrow\; (a = 0 \vee b = 0)$,
(v) $a^2 = b^2 \;\Leftrightarrow\; a = b \vee a = -b$.

Der *Beweis* von (i)–(iii) erfolgt durch Verifizieren. Da $\mathbb{C}^*(\cdot)$ eine Gruppe ist, gilt (iv), und (v) ergibt sich aus (iii) und (iv). □

32. Für $a \in \mathbb{R}^*_-$ sei $\boxed{\sqrt{a} := \sqrt{|a|} \cdot i}$, und für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei $\boxed{\sqrt{a} := \sqrt{|a|} \cdot \frac{a+|a|}{\big|a+|a|\big|}}$.

Damit erhalten wir nun $\boxed{(\sqrt{a})^2 = a = (-\sqrt{a})^2}$ für **alle** (!) $a \in \mathbb{C}$, wie man mit 27.f) bestätigt, und wir sehen, daß man aus **jeder** komplexen Zahl die Quadratwurzel ziehen kann!

Sind jetzt p, q **beliebige komplexe** Zahlen, so sind

$$x_1 := \frac{1}{2}\Big(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\Big), \quad x_2 := \frac{1}{2}\Big(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\Big)$$

die Lösungen der **quadratischen Gleichung** $\boxed{x^2 + px + q = 0}$, und es gelten die Regeln

$$\boxed{x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Der *Beweis* erfolgt mit der gleichen Argumentation wie im reellen Fall in 2.31.!

Die folgende Aussage wird sich später als hilfreich erweisen:

33. **Satz.** *Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x+y) = f(x) + f(y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$, so gilt:*
(i) $f(r) = r \cdot f(1) \;\; \forall\, r \in \mathbb{Q}$.
(ii) Erfüllt f zusätzlich die Bedingungen $f(1) = 1$ und $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$, so ist $f = id_{\mathbb{R}}$.

Beweis: Es sei $f(x) =: x' \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Wegen $0' + 0' = (0+0)' = 0'$ ist $0' = 0$.

b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $(0 \cdot x)' = 0' = 0 = 0 \cdot x'$. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(n \cdot x)' = n \cdot x'$, so folgt $((n+1) \cdot x)' = (n \cdot x + x)' = (n \cdot x)' + x' = n \cdot x' + x' = (n+1) \cdot x'$. Nach dem Induktionsprinzip gilt deshalb $(n \cdot x)' = n \cdot x' \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

c) Ist $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$, so führt b) auf $n \cdot \big(\frac{m}{n}\big)' = \big(n \cdot \frac{m}{n}\big)' = (m \cdot 1)' = m \cdot 1'$, also auf $\big(\frac{m}{n}\big)' = \frac{m}{n} \cdot 1'$. Mithin gilt $r' = r \cdot 1' \;\forall\, r \in \mathbb{Q}_+$.

d) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $0 \overset{a)}{=} 0' = (x + (-x))' = x' + (-x)'$, also $(-x)' = -(x')$. Insbesondere folgt $(-r)' = -(r') \overset{c)}{=} -(r \cdot 1') = (-r) \cdot 1' \;\forall\, r \in \mathbb{Q}_+$.

e) Nach c) und d) ist i) gültig.

f) Sind nun die Voraussetzungen von (ii) erfüllt und sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$, so erhalten wir $y' - x' = y' + (-(x')) \overset{d)}{=} y' + (-x)' = (y + (-x))' = (y - x)' \in \mathbb{R}_+$, also $x' \leq y'$. Außerdem führt (i) mit $1' = 1$ auf $r' = r \ \ \forall\, r \in \mathbb{Q}$.

g) Nun sei $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $A := \{r \in \mathbb{Q} \mid r < t\}$ und $B := \{s \in \mathbb{Q} \mid t < s\}$. Dann ist $A < B$ (vgl. 1.33.), und mit f) folgt $A = f(A) \leq t'$ sowie $t' \leq f(B) = B$, d.h. t' ist wie t eine Trennzahl zwischen A und B. Nach 3.12. und wegen $A \cup B = \mathbb{Q}$ kann weder $t < t'$ noch $t' < t$ gelten, d.h. es ist $t' = t$. Damit ist auch (ii) bewiesen. □

Als Corollar erhalten wir

34. **Automorphismensatz.** Es gilt:

(i) Der Körper $\mathbb{R}(+,\cdot)$ *besitzt genau einen Automorphismus. Das ist die Abbildung* $id_{\mathbb{R}}$.

(ii) Der Körper $\mathbb{C}(+,\cdot)$ *besitzt genau zwei Automorphismen, die* $\mathbb{R}$ *(als Ganzes) festlassen. Das sind die Abbildung* $id_{\mathbb{C}}$ *und die Konjugation* κ.

Beweis: (i) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x'$ ein Automorphismus von $\mathbb{R}(+,\cdot)$, so gilt $(x+y)' = x'+y'$ und $(x \cdot y)' = x' \cdot y' \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $0 \overset{33.(i)}{=} 0' \neq 1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1'$, also $1' = 1$, und für $x \in \mathbb{R}_+$ ist $x' = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})' = \sqrt{x}\,' \cdot \sqrt{x}\,' = (\sqrt{x}\,')^2 \in \mathbb{R}_+$. Gemäß 33.(ii) bedeutet dies $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

(ii) Ist f ein Automorphismus von $\mathbb{C}(+,\cdot)$ mit $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, so ist $f|_{\mathbb{R}}$ ein Automorphismus von $\mathbb{R}(+,\cdot)$, und mit (i) folgt $f(x) = x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Weiter ist dann $(f(i))^2 = f(i^2) = f(-1) = -1 = i^2$, also $f(i) \in \{i, -i\}$ gemäß 31.(v). Dies impliziert wegen $f(x + iy) = x + f(i) \cdot y \ \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ die Behauptung. □

9. Lineare Algebra in der Anschauungsebene

In den Abschnitten 8.G. und 8.H. haben wir einiges über das Rechnen mit komplexen Zahlen erfahren, die ja nichts anderes als die Punkte der Anschauungsebene sind.

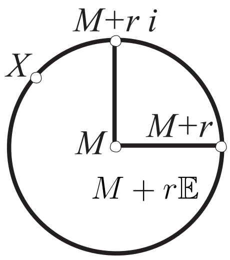
Im weiteren werden wir sehen, daß zwischen diesem Rechnen einerseits und geometrischen Beziehungen andererseits sehr direkte Verbindungen bestehen. Indem wir uns mit algebraischen Aspekten der ebenen Geometrie befassen, werden wir zugleich unsere Kenntnisse über die komplexen Zahlen vertiefen.

Da im weiteren der geometrische Standpunkt in den Vordergrund rückt, werden wir die Punkte der Anschauungsebene jetzt in der Regel mit *großen* Buchstaben bezeichnen, wie wir es von der Schule her gewohnt sind. Für reelle Zahlen werden wir aber, wenn der rechnerische Aspekt überwiegt, weiterhin auch kleine lateinische oder griechische Buchstaben verwenden.

A. Geometrische Grundobjekte der Anschauungsebene

1. Der *Abstand* $d(A, B)$ zweier Punkte $A, B \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist die nichtnegative reelle Zahl $|A - B|$, und nach 8.26. und 8.28. gilt offenbar

$$\begin{array}{llcll} (1) & d(A,B) & = & 0 \quad\Leftrightarrow\quad A=B & \text{für} \quad A,B\in\mathbb{C}, \\ (2) & d(A,B) & = & d(B,A) & \text{für} \quad A,B\in\mathbb{C}, \\ (3) & d(A,C) & \le & d(A,B)+d(B,C) & \text{für} \quad A,B,C\in\mathbb{C}. \end{array}$$



2. Der Begriff des *Kreises* läßt sich in naheliegender Weise auf den Begriff des Abstandes zurückführen:
Ist $M \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$, so wird $k_{M,r} := \{X \in \mathbb{C} \mid d(M,X) = r\}$ der **Kreis um** M **mit dem Radius** r genannt, und M wird auch als **Mittelpunkt** von $k_{M,r}$ bezeichnet.
Setzen wir $M + r\mathbb{E} := \{M + r \cdot Y \mid Y \in \mathbb{E}\}$, so folgt:

(1) $M + r\mathbb{E}$ ist der Kreis um M mit dem Radius r.

In der Tat: Für $X \in \mathbb{C}$ und $Y := (X - M)/r$ gilt $X = M + rY$ und $(d(M,X) = r \Leftrightarrow |M - X| = r \Leftrightarrow |(M - X)/r| = 1 \Leftrightarrow |Y| = 1 \Leftrightarrow Y \in \mathbb{E})$.

Da die Abbildung $f : \mathbb{E} \to k_{M,r} : Y \to M + r \cdot Y$ offenbar eine Bijektion ist, haben alle Kreise ebensoviele Elemente wie $\mathbb{E}$, also unendlich viele Punkte.

Wegen (1) ist $r\mathbb{E} := \{r \cdot Y \mid Y \in \mathbb{E}\}$ der Kreis um 0 mit dem Radius r.

Ist $M = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$, so bezeichnet man m_1, m_2 auch als *Mittelpunktskoordinaten* von $k_{M,r}$, und mit $d^2(M,(x,y)) = |(x{-}m_1, y{-}m_2)|^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ folgt

(2) $k_{M,r} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x{-}m_1)^2 + (y{-}m_2)^2 = r^2\}$.

Man nennt $\boxed{(x{-}m_1)^2 + (y{-}m_2)^2 = r^2}$ auch die **Kreisgleichung (Mittelpunktsform)** von $k_{M,r}$.

3. Wir werden häufig die folgenden abkürzenden Notationen verwenden:

(1) $\mathbb{R}A := \{x \cdot A \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \forall\, A \in \mathbb{C}$.

(2) $B + \mathbb{R}A := \{B + x \cdot A \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \forall\, A, B \in \mathbb{C}$,

(3) $\mathbb{R}_+A := \{y \cdot A \mid y \in \mathbb{R}_+\} \quad \forall\, A \in \mathbb{C}$,

(4) $B + \mathbb{R}_+A := \{B + y \cdot A \mid y \in \mathbb{R}_+\} \quad \forall\, A, B \in \mathbb{C}$,

und wir wollen uns überlegen, daß die durch (1)–(4) definierten Punktmengen *geometrisch interessante Objekte* sind.

Dazu zeigen wir zunächst

(5) *Für $X \in \mathbb{C}$ gilt: $Re(X) = |X| \Leftrightarrow X = |X| \Leftrightarrow X \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis: Ist $X = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $x = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y = 0 \Leftrightarrow X = |X|$. □

(6) *Für $X, Y \in \mathbb{C}$ gilt:* $\boxed{|X + Y| = |X| + |Y| \Leftrightarrow X \cdot \overline{Y} = |X \cdot \overline{Y}| \Leftrightarrow X \cdot \overline{Y} \in \mathbb{R}_+}$.

Beweis: Es ist $|X + Y| = |X| + |Y| \Leftrightarrow |X + Y|^2 = (|X| + |Y|)^2$
$\Leftrightarrow (X + Y) \cdot (\overline{X} + \overline{Y}) = X\overline{X} + 2 \cdot |X| \cdot |Y| + Y\overline{Y}$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \mathrm{Re}(X\overline{Y}) = X\overline{Y} + \overline{X}Y = 2 \cdot |X\overline{Y}| \overset{(5)}{\Leftrightarrow} X\overline{Y} = |X\overline{Y}| \Leftrightarrow X\overline{Y} \in \mathbb{R}_+$. □

(7) *Für $A, B, X \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{|A - B| = |A - X| + |X - B| \Leftrightarrow (A - X) \cdot (\overline{X - B}) \in \mathbb{R}_+}.$$

Beweis: (6) $\square$

4. Sind $A, B \in \mathbb{C}$, so setzen wir

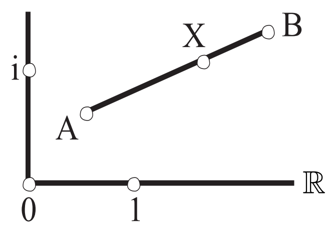
(1) $\boxed{[A,B] := \{X \in \mathbb{C} \mid |A-B| = |A-X| + |X-B|\}}$.

Mit dieser Notation *erweitern* wir die schon auf $\mathbb{R}$ erklärte *Intervallnotation*, denn sind $a, b, x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so gilt $((a-x) \cdot (x-b) \geq 0 \;\Rightarrow\; \neg(x < a) \wedge \neg(b < x))$, also $a \leq x \leq b \;\Leftrightarrow\; (a-x) \cdot (x-b) \geq 0 \overset{3.(7)}{\Leftrightarrow} |a-b| = |a-x| + |x-b|$.

In Verbindung mit der 3. Fassung der Dreiecksungleichung aus 8.28. erhalten wir deshalb

(2) $A, B \in \mathbb{C} \wedge X \in [A,B] \;\Rightarrow\; |A-B| = |A-X| + |X-B|$,

(3) $A, B \in \mathbb{C} \wedge X \in \mathbb{C} \backslash [A,B] \;\Rightarrow\; |A-B| < |A-X| + |X-B|$.



Anschaulich besagt dies: Man gelangt von A über X nach B genau dann ohne Umweg, wenn $X \in [A,B]$ ist.
Deshalb gehen wir im weiteren davon aus, daß $[A,B]$ die **gerade Verbindungsstrecke** oder kurz die **Strecke** mit den **Endpunkten** A, B ist, und bezeichnen $d(A,B) = |A-B|$ als **Länge** der Strecke $[A,B]$.

Wir nennen $]A,B[:= [A,B] \backslash \{A,B\}$ die **offene Verbindungsstrecke** von A, B und $[A,B[:= [A,B] \backslash \{B\}$ sowie $]A,B] := [A,B] \backslash \{A\}$ die **halboffenen** Verbindungsstrecken von A, B, jeweils mit den **Endpunkten** A, B und der **Länge** $|A-B|$.

Definitionsgemäß ist $[A,B] = [B,A]$ und $]A,B[=]B,A[$.

5. **Satz zur Streckendarstellung.** *Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so gilt*

(i) $]A,B[= \left\{X \in \mathbb{C} \;\middle|\; \dfrac{X-A}{X-B} \in \mathbb{R}^*_-\right\}$,

(ii) $]A,B[= \{A + \lambda \cdot (B-A) \mid \lambda \in]0,1[\ \} \;\simeq\;]0,1[$,

(iii) $[A,B] = \{A + \lambda \cdot (B-A) \mid \lambda \in [0,1]\ \}$.

Beweis: Es sei $X \in \mathbb{C} \backslash \{A,B\}, R := A-X, S := X-B, T := R+S = A-B$. Dann ist $X \in]A,B[\overset{4.(1)}{\Leftrightarrow} |T|=|R|+|S| \overset{3.(6)}{\Leftrightarrow} R\overline{S} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \dfrac{R}{S} \cdot S\overline{S} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \dfrac{R}{S} \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \dfrac{T}{S} = 1 + \dfrac{R}{S} \in]1,\infty[$ $\Leftrightarrow \dfrac{S}{T} \in]0,1[\Leftrightarrow \dfrac{-R}{-T} = \dfrac{R}{T} = 1 - \dfrac{S}{T} \in]0,1[\Leftrightarrow \dfrac{X-A}{B-A} \in]0,1[\Leftrightarrow \exists \lambda \in]0,1[: X = A + \lambda \cdot (B-A)$.

Es gilt $(R/S \in \mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow (-R)/S \in \mathbb{R}^*_-)$, und offenbar ist $f :]0,1[\to]A,B[: \lambda \to A + \lambda(B-A)$ bijektiv. Mithin sind (i) und (ii) gültig, und (ii) impliziert (iii) für $\lambda \in \{0,1\}$. $\square$

6. Sind $A, B, X \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden, so wird die komplexe Zahl $\dfrac{X-A}{X-B} = \dfrac{A-X}{B-X}$ das **Teilverhältnis von X bezüglich** (A,B) genannt.

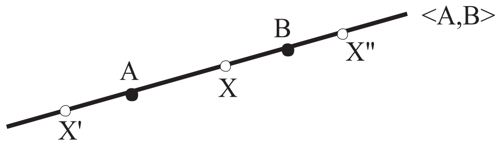
Außerdem sagen wir, X liegt **zwischen** A und B, wenn $X \in]A,B[$ ist. In Verbindung mit 5.(i) erhalten wir dann:

Satz. *Ein Punkt $X \in \mathbb{C}$ liegt genau dann zwischen den Punkten $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, wenn sein Teilverhältnis bzgl. (A,B) eine negative reelle Zahl ist.*

7. Der Begriff der *Geraden* läßt sich wie folgt auf den Begriff der *Strecke* zurückführen: Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so wird

$$\boxed{\langle A, B\rangle := \{X \in \mathbb{C} \mid X \in [A, B] \mathbin{\dot\vee} A \in]B, X[\mathbin{\dot\vee} B \in]A, X[\}}$$

die **Verbindungsgerade** von A, B genannt.



Definitionsgemäß gilt $\boxed{[A, B] \subseteq \langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle}$.

Nach 5.(i) ist $(A \in]B, X[\;\Leftrightarrow\; \dfrac{X - A}{B - A} \in \mathbb{R}_-^* \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}_-^* : X = A + \lambda(B - A))$. Entsprechend – man vertausche A, B – ist $(B \in]A, X[\;\Leftrightarrow\; \exists \mu \in \mathbb{R}_-^* : X = B + \mu(A - B) = A + (1 - \mu)(B - A) \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in]1, \infty[: X = A + \lambda(B - A))$.

In Verbindung mit 5.(iii) folgt hieraus

8. **Satz zur Geradendarstellung.** *Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so ist die Verbindungsgerade von A, B gegeben durch* $\boxed{\langle A, B\rangle = \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = A + \mathbb{R}\,(B - A)}$.

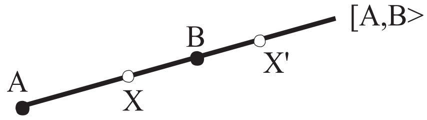
Anmerkung Die Darstellung der Punkte X von $\langle A, B\rangle$ in der Form $X = A + \lambda \cdot (B - A)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wird auch als eine **Parameterdarstellung** von $\langle A, B\rangle$ mit λ als *„laufendem" Parameter* bezeichnet (gelesen: Par$\underline{\text{a}}$meter). Denn mit der Bijektion

$$f : \mathbb{R} \to \langle A, B\rangle : \lambda \to A + \lambda \cdot (B - A)$$

erkennt man: Wenn λ die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ (der Größe nach) durchläuft, so durchläuft X die Punkte der Geraden $\langle A, B\rangle$. Insbesondere ist $\langle A, B\rangle \simeq \mathbb{R}$.

9. Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so wird

$$\boxed{[A, B\rangle := \{X \in \mathbb{C} \mid X \in [A, B] \mathbin{\dot\vee} B \in]A, X[\}}$$



die **Halbgerade** oder der **Strahl** aus A durch B mit **Scheitel** A genannt.

Mit den Überlegungen aus 7. erhalten wir

$(*)$ *Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so ist der Strahl aus A durch B gegeben durch*

$$\boxed{[A, B\rangle = \{A + \lambda \cdot (B - A) \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\} = A + \mathbb{R}_+(B - A)}.$$

10. Es sei $\mathbb{G}$ die Menge aller gemäß 7. definierten Verbindungsgeraden. Die Elemente von $\mathbb{G}$ werden auch die **Geraden** der Anschauungsebene genannt.

Insbesondere ist $\mathbb{R} = \{0 + \lambda \cdot (1 - 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle 0, 1\rangle$ eine Gerade, genannt **reelle Achse** oder x–**Achse**, und ebenso ist auch $\mathbb{R}i = \{0 + \lambda \cdot (i - 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle 0, i\rangle$ eine Gerade, genannt **imaginäre Achse** oder y–**Achse**.
Ist $A \in \mathbb{C}^*$, so ist $\langle 0, A\rangle = \{0 + \lambda(A - 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}A \in \mathbb{G}$.

Man nennt Punkte **kollinear**, falls sie gemeinsam einer Geraden angehören, sonst **nichtkollinear**. Geraden g, h der Anschauungsebene heißen genau dann **parallel**, in Zeichen:

$$\boxed{g \parallel h}\;, \quad \text{wenn} \quad \boxed{g = h \;\vee\; g \cap h = \emptyset}$$

gilt, andernfalls **nichtparallel**, in Zeichen: $g \nparallel h$.

B. Determinanten und lineare Gleichungen

11. Wir wollen im weiteren algebraische Beschreibungen für geometrische Beziehungen entwickeln, weil sich dies für viele Fragestellungen als sehr vorteilhaft erweist.

Als erstes betrachten wir den auf G.W. Leibniz (1646–1716) zurückgehenden Begriff der *Determinante*. Dabei handelt es sich um Zahlenwerte, die man Paaren aus komplexen Zahlen zuordnet und die nun nicht einen „Abstand“, sondern eine *Parallelogrammfläche* beschreiben, wie wir später sehen werden. Wir definieren:

12. Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so wird die reelle Zahl $\boxed{\det((a,b),(c,d)) := ad - bc =: \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}$

die **Determinante** von $((a,b),(c,d))$ genannt.

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det(1, i) = 1 \ \wedge \ \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = a \cdot d \ \wedge \ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

(2) $\det(A, B) := \dfrac{\overline{A}B - A\overline{B}}{2i}$.

(3) $\det(A, B) = -\det(B, A)$.

(4) $\det(a \cdot A, B) = a \cdot \det(A, B) = \det(A, a \cdot B)$.

(5) $\det(A + B, C + D) = \det(A, C) + \det(A, D) + \det(B, C) + \det(B, D)$.

(6) $\det(a \cdot A, b \cdot A) = 0$.

(7) $\det(A, B) \cdot C + \det(B, C) \cdot A + \det(C, A) \cdot B = 0$.

(8) $\det(A, B) = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{A} \cdot B \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (A = 0 \ \vee \ B \in \mathbb{R}A)$.

(9) $\det(A, B) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ A, B \in \mathbb{C}^* \ \wedge \ \overline{A}B \notin \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ A \neq 0 \ \wedge \ B \notin \mathbb{R}A$.

Beweis:

(1) folgt direkt aus der Definition der Determinante.

(2): $(a - ib) \cdot (c + id) - (a + ib) \cdot (c - id) = 2i \cdot (ad - bc)$.

(3): $\overline{A}B - A\overline{B} = -(\overline{B}A - B\overline{A})$.

(4): $\overline{aA}B - aA\overline{B} = a \cdot (\overline{A}B - A\overline{B}) = \overline{A}aB - A\overline{aB}$.

(5): $(\overline{A + B}) \cdot (C + D) - (A + B) \cdot (\overline{C + D}) = \overline{A}C - A\overline{C} + \overline{A}D - A\overline{D} + \overline{B}C - B\overline{C} + \overline{B}D - B\overline{D}$.

(6): $\overline{aA}bA - aA\overline{bA} = 0$.

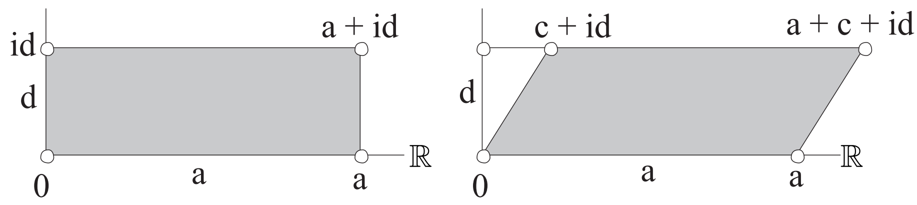
(7): $\overline{A}BC - A\overline{B}C + \overline{B}CA - B\overline{C}A + \overline{C}AB - C\overline{A}B = 0$.

(8): $(\overline{A}B - A\overline{B})/2i = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{A}B = A\overline{B} \ \Leftrightarrow \ \overline{A}B \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ (A = 0 \ \dot{\vee} \ A\overline{A} \cdot B \in \mathbb{R}A)$.

(9): $(\overline{A}B - A\overline{B})/2i \neq 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{A}B \neq A\overline{B} \ \Leftrightarrow \ \overline{A}B \notin \mathbb{R} \ \overset{(8)}{\Leftrightarrow} \ A \neq 0 \ \wedge \ B \notin \mathbb{R}A$. $\square$

13. *Erläuterungen.* a) Definitionsgeäß ist die Determinante zweier komplexer Zahlen A, B stets eine reelle Zahl, die sich direkt aus den Koordinaten berechnen läßt. Hierbei spielt

die Reihenfolge eine wesentliche Rolle, denn nach 12.(3) ändert sich das Vorzeichen der Determinante von (A, B), wenn man A mit B vertauscht.



b) Nach 12.(2) ist $\det(a, id) = a \cdot d = \det(a, c + id)$.

Damit deutet sich bereits eine Verbindung zwischen Determinante und Parallelogrammfläche an.

c) Die Rechenregeln (3)–(6) werden häufig gebraucht; in (4) und (5) verhält sich det wie eine Art von Produktbildung.

d) Die Nützlichkeit der sog. Cramer–*Identität* 12.(7) wird im folgenden sichtbar:

14. **Cramersche Regel** *(1. Fassung). Sind $A, B, C \in \mathbb{C}$ vorgegeben und ist* $\det(A, B) \neq 0$, *so existiert genau ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit* $\boxed{x \cdot A + y \cdot B = C}$. *Es ist*

$$\boxed{x = \frac{\det(C, B)}{\det(A, B)} \quad \wedge \quad y = \frac{\det(A, C)}{\det(A, B)}}$$

Merkregel. *Im Nenner steht* $\det(A, B)$*; hiervon ausgehend schreibt man im Zähler C statt A, um x zu erhalten, und C statt B, um y zu erhalten.*

Beweis: Nach 12.(3), (7) ist $\det(A, B) \cdot C = \det(C, B) \cdot A + \det(A, C) \cdot B$. Damit ergibt sich die *Existenz* der gesuchten Lösungen $x, y \in \mathbb{R}$. Sind $u, v \in \mathbb{R}$ mit $uA + vB = C$ und gilt zugleich auch $xA + yB = C$, so führt Subtraktion auf $(u - x) \cdot A = (y - v) \cdot B$, und mit 12.(4),(6) folgt

$$\begin{array}{lclclcl} (y - v) \cdot \det(A, B) & = & \det(A, (y - v) \cdot B) & = & \det(A, (u - x) \cdot A) & = & 0, \\ (u - x) \cdot \det(A, B) & = & \det((u - x) \cdot A, B) & = & \det((y - v) \cdot B, B) & = & 0. \end{array}$$

also $y = v$ und $x = u$. Dies beweist die *Eindeutigkeit* der Lösung (x, y). □

Als Corollar erhalten wir

15. **Cramersche Regel** *(2. Fassung). Sind $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ vorgegeben und ist* $\boxed{ad \neq bc}$, *so hat das* **Gleichungssystem**

$$(*) \qquad \boxed{\begin{array}{lcl} x \cdot a + y \cdot c & = & e \\ x \cdot b + y \cdot d & = & f \end{array}}$$

genau eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nämlich

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & c \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \;\wedge\; y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} \quad , \quad \textit{also} \quad \boxed{x = \frac{de - cf}{ad - bc} \quad \wedge \quad y = \frac{af - be}{ad - bc}}$$

Beweis: Für $A := a + ib, B := c + id, C = e + if$ ist $((*) \;\Leftrightarrow\; x \cdot A + y \cdot B = C)$ mit $\det(A, B) = ad - bc \neq 0$. Deshalb folgt die Behauptung aus 14. □

C. Geraden und lineare Gleichungen

16. Die in 15. auftretende Gleichung vom Typ (1) $\boxed{x \cdot a + y \cdot c = e}$ mit vorgegebenen reellen Zahlen a, c, e und gesuchten reelen Zahlen x, y heißt **lineare Gleichung in 2 Variablen**. Die Gesamtheit ℓ der Lösungspaare (x, y) von (1) läßt sich geometrisch sehr einfach beschreiben, denn wir erhalten:

α) Ist $\boxed{c \neq 0}$, so ist (1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = m \cdot x + n}$ mit $m = -\frac{a}{c} \ \wedge \ n = \frac{e}{c}$, und es folgt

$$(2) \qquad \boxed{\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m \cdot x + n\} \ = \ (0, n) + \mathbb{R}(1, m) \ = \ \langle (0, n), (1, m + n)\rangle,}$$

d.h. ℓ ist die **Verbindungsgerade** von $(0, n)$ und $(1, m + n)$.

Wir nennen ℓ die **Gerade** *mit der* **Gleichung** $y = mx + n$, *mit der* **Steigung** m *und mit dem* **Achsenabschnitt** n *(wegen $(0, n) \in \ell$).*

Der *Beweis* von (2) ist leicht erbracht, denn es ist $\ell = \{(x, mx + n) \mid x \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(0, n) + x \cdot (1, m) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(0, n) + \lambda \cdot [(1, m + n) - (0, n)] \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\square$

β) Ist $\boxed{c = 0 \wedge a \neq 0}$, so ist (1) $\Leftrightarrow$ $\boxed{x = e/a}$, und dann gilt

$$(3) \qquad \boxed{\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x = e/a\} = (e/a, 0) + \mathbb{R}(0, 1) = \langle (e/a, 0), (e/a, 1)\rangle,}$$

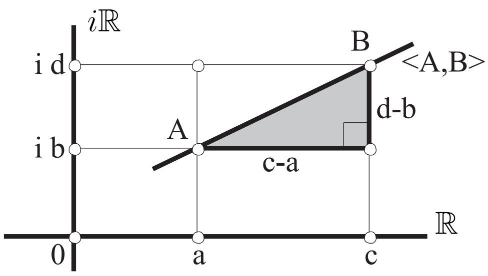
d.h. jetzt ist ℓ die Verbindungsgerade von $(e/a, 0)$ und $(e/a, 1)$.

Wir nennen ℓ in diesem Fall die Gerade mit der **Gleichung** $x = e/a$
und mit der **Steigung** ∞.

γ) Ist $\boxed{a = c = 0}$, so ist $\ell = \emptyset$ im Falle $e \neq 0$ und $\ell = \mathbb{R}^2$ im Falle $e = 0$.

δ) **Fazit:** *Die Gleichung* (1) *beschreibt genau dann eine* **Gerade**, *wenn* $\boxed{(a, c) \neq (0, 0)}$ *ist, wenn also $a \neq 0 \vee c \neq 0$ ist.*

Nennen wir (1) genau im Falle $(a, c) \neq (0, 0)$ **nichttrivial**, so können wir nun umgekehrt zeigen, daß jede Gerade von $\mathbb{R}^2$ durch eine nichttriviale lineare Gleichung in 2 Variablen beschreibbar ist:



ε) Sind $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ Punkte mit $a \neq c$, so gilt

$$(4) \qquad \boxed{\langle A, B\rangle = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - b = \frac{d - b}{c - a}(x - a)\right\}},$$

d.h. $\frac{d-b}{c-a}$ ist die **Steigung** von $\langle A, B\rangle$. Die Gleichung rechter Hand in (4) wird auch als **Zweipunkteform** bezeichnet.

Beweis: Es ist $\langle A, B\rangle = \{(a + \lambda(c - a), b + \lambda(d - b)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x - a = \lambda \cdot (c - a) \ \wedge \ y - b = \lambda \cdot (d - b)\} =$
$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x - a}{c - a} = \lambda \wedge y - b = \lambda \cdot (d - b)\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - b = \frac{d - b}{c - a} \cdot (x - a)\right\}$. $\square$

ζ) Sind $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ Punkte mit $a = c \wedge A \neq B$, so ist $b \neq d$, und es gilt

$$(5) \qquad \boxed{\langle A, B\rangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}}.$$

Beweis: Es ist $\langle A, B\rangle = \{a + \lambda(c - a), b + \lambda(d - b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(a, b + \lambda(d - b)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =$ $\{(a, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$. $\square$

Als Folgerungen erhalten wir

17. **Inzidenzsatz.** *In der Anschauungsebene gilt:*

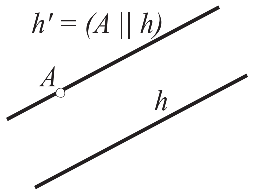
(i) *Geraden sind genau dann parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben.*

(ii) *Nichtparallele Geraden haben stets genau einen Schnittpunkt.*

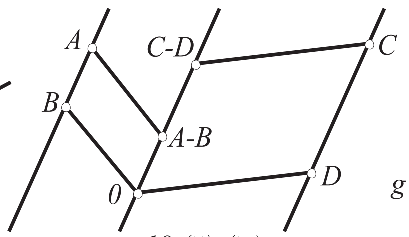
(iii) *Zwei verschiedene Punkte liegen stets auf genau einer Geraden.*

(iv) *Zu* $A \in \mathbb{C}$ *und* $h \in \mathbb{G}$ *gibt es stets genau ein* $h' \in \mathbb{G}$ *mit* $A \in h' \ \wedge \ h \parallel h'$. *Man nennt* h' **die Parallele durch** A **zu** h *und notiert* h' *in der Form* $(A \parallel h)$.

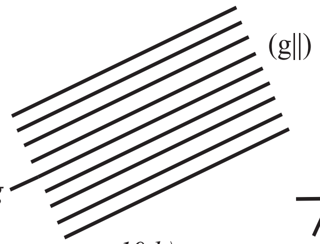
Beweis: Wir betrachten Geraden $g, g', k, k' \in \mathbb{G}$ mit den Gleichungen $y = mx + n$, $y = m'x + n'$, $x = a$, $x = a'$ (vgl.16.). Wegen $(k \cap k' \neq \emptyset \ \Rightarrow \ a = a' \ \Rightarrow \ k = k') \ \wedge$ $(m = m' \ \wedge \ g \cap g' \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2\colon\ mc + n = d = mc + n' \ \Rightarrow \ n = n' \ \wedge \ g = g') \ \wedge$ $(g \cap k = \{(a, ma+n)\}) \ \wedge \ (m \neq m' \ \Rightarrow \ \det((-m,1),(-m',1)) = m' - m \neq 0 \overset{15.,16.}{\Rightarrow}$ $|g \cap g'| = 1)$ sind (i) und (ii) gültig, und (ii) impliziert (iii). Ist $A = (e,f) \in \mathbb{R}^2$, so sind $y - f = m \cdot (x - e)$ bzw. $x = e$ nach (i) und 16. die einzig möglichen Gleichungen für Geraden durch A, die zu g bzw. k parallel sind. Mithin gilt auch (iv). □



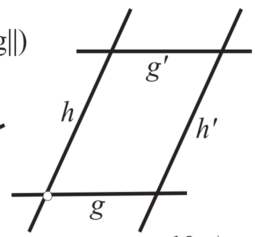
17.(iv)



18.(ii)-(iv)



19.b)



19.c)

18. **Corollar.** *(i) Die Parallelität „$\parallel$“ ist eine Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{G}$.

(ii) *Sind* $A, B \in \mathbb{C}$ *mit* $A \neq B$, *so ist* $\langle A, B\rangle \parallel \langle 0, A{-}B\rangle = \mathbb{R}(A{-}B) = \mathbb{R}(B{-}A)$.

(iii) *Sind* $A, B, C, D \in \mathbb{C}$ *mit* $A \neq B \ \wedge \ C \neq D$, *so ist*
$\langle A, B\rangle \parallel \langle C, D\rangle \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R}(A{-}B) = \mathbb{R}(C{-}D) \ \Leftrightarrow \ A{-}B \in \mathbb{R}(C{-}D)$.

(iv) *Sind* $A, B \in \mathbb{C}$ *mit* $B \neq 0$, *so ist* $\langle 0, B\rangle \parallel \langle A, A{-}B\rangle$.

Beweis: (i) ergibt sich direkt aus 17.(i). Sind $A = (a,b)$ und $B = (c,d)$ mit $A \neq B \ \wedge$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, so ist $(A - B) - 0 = A - B = (a-c, b-d) \neq (0,0)$, und dann führt 16. $\varepsilon), \zeta)$ mit 17.(i) auf (ii). Aus (i) und (ii) folgt (iii) wegen $\langle A, B\rangle \parallel \mathbb{R}(A{-}B) \wedge \langle C, D\rangle \parallel$ $\parallel \mathbb{R}(C-D) \ \wedge \ 0 \in \mathbb{R}(A-B) \cap \mathbb{R}(C-D)$ und wegen 17.(iii). Mit $B - 0 = A - (A - B)$ führt (iii) auf (iv). □

19. *Anmerkungen.* a) Wir sagen, daß zwei Geraden $g, h \in \mathbb{G}$ sich **schneiden**, wenn $|g \cap h| = 1$ ist. Die Aussage 17.(ii) ist charakteristisch für die Ebene; im Raum gilt sie nicht, wie wir später sehen werden.

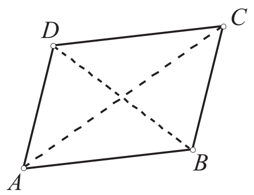
b) Die zu „$\parallel$“ gehörigen Äquivalenzklassen sind maximale Mengen von paarweise parallelen Geraden und werden als **Parallelbüschel** bezeichnet. Man nennt $(g \parallel) := \{h \in \mathbb{G} \mid h \parallel g\}$ für $g \in \mathbb{G}$ das **Parallelbüschel in Richtung** g. Wir zeigen hierzu

c) **Satz.** *Sind* $g, h, g', h' \in \mathbb{G}$ *mit* $g \nparallel h \wedge g \parallel g' \wedge h \parallel h'$, *so ist* $g' \nparallel h'$.
Jede Gerade aus $(g \parallel)$ *schneidet jede Gerade aus* $(h \parallel)$.

Beweis: Wäre $g' \parallel h'$, so wäre $g \parallel g' \parallel h' \parallel h$ und damit $g \parallel h$ gemäß 18.(i). □

d) Sind A, B, C, D vier verschiedene nichtkollineare Punkte, so wird (A, B, C, D) ein **Parallelogramm** mit den **Seitengeraden** $\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, D\rangle, \langle D, A\rangle$ und den **Diagonalen** $\langle A, C\rangle, \langle B, D\rangle$ genannt, in Zeichen: $\boxed{\sharp\,(A, B, C, D)}$, wenn $\langle A, B\rangle \parallel \langle C, D\rangle \wedge \langle A, D\rangle \parallel \langle B, C\rangle$ ist.

Mit (A, B, C, D) sind offenbar auch (A, D, C, B) und die durch „zyklische" Eckenvertauschung entstehenden Quadrupel Parallelogramme. Es gilt:



20. **Parallelogrammergänzungssatz.** *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte, so gibt es genau ein $D \in \mathbb{C}$ derart, daß (A, B, C, D) ein Parallelogramm ist; es ist* $\boxed{D = A - B + C}$, *und man nennt D den* **4. Parallelogrammpunkt zu** (A, B, C).

Beweis: Für $D := A - B + C$ ist $\langle A, B\rangle = A + \mathbb{R}(B-A) \parallel D + \mathbb{R}(C-D) = \langle D, C\rangle$ und $\langle A, D\rangle = A + \mathbb{R}(D - A) \parallel B + \mathbb{R}(C - B) = \langle B, C\rangle$ gemäß 18., d.h. es gilt $\sharp\,(A, B, C, D)$.

Ist $E \in \mathbb{C}$ mit $\sharp\,(A, B, C, E)$, so sind $D, E \in g \cap h$ für $g := (A \parallel \langle B, C\rangle)$ und $h := = (C \parallel \langle A, B\rangle)$. Wäre $g \parallel h$, so wäre $\langle A, B\rangle \parallel h \parallel g \parallel \langle B, C\rangle$ und damit $\langle A, B\rangle = \langle B, C\rangle$. Also ist $g \nparallel h$ und damit $D = E$. $\square$

D. Translationen und Vektoren

21. Die Abbildungen vom Typ $\boxed{\tau_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X + A}$ mit $A \in \mathbb{C}$ heißen **Translationen** oder **Verschiebungen** von $\mathbb{C}$.

Für $A, B, X \in \mathbb{C}$ gilt $\tau_A \circ \tau_B(X) = (X + B) + A = X + A + B = \tau_{A+B}(X)$, also

(i) $\boxed{\tau_A \circ \tau_B = \tau_{A+B} = \tau_B \circ \tau_A}$.

Insbesondere ist dann $\tau_A \circ \tau_{-A} = \tau_{-A} \circ \tau_A = \boxed{\tau_0 = \mathrm{id}_\mathbb{C}}$, d.h. τ_A ist eine Bijektion (vgl. 6.13.) mit

(ii) $\boxed{(\tau_A)^{-1} = \tau_{-A}}$.

Dies bedeutet, daß die Menge $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ aller Translationen von $\mathbb{C}$ eine **abelsche Untergruppe** von Per $(\mathbb{C})(\circ)$ ist, die vermittels $A \to \tau_A$ isomorph zu $\mathbb{C}(+)$ ist. Wir erhalten

(iii) $\boxed{\tau_A(C + \mathbb{R}D) = \tau_A(C) + \mathbb{R}D \parallel C + \mathbb{R}D}$ für $A, C \in \mathbb{C} \ \wedge \ D \in \mathbb{C}^*$,
d.h. τ_A *bildet jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade ab.*

Für $A, D \in \mathbb{C}^*$ und $C \in \mathbb{C}$ ist $(\tau_A(C) + \mathbb{R}D = C + \mathbb{R}D \ \Leftrightarrow \ \tau_A(C) \in C + \mathbb{R}D \ \Leftrightarrow \ A = \tau_A(C) - C \in \mathbb{R}D \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R}A = \mathbb{R}D)$, und mithin haben wir

(iv) $\boxed{\tau_A(g) = g \ \Leftrightarrow \ g \parallel \mathbb{R}A}$ für $g \in \mathbb{G}$ und $A \in \mathbb{C}^*$.

Im Falle $\boxed{A \neq 0}$ ist offenbar $\boxed{\tau_A(X) \neq X \quad \forall\, X \in \mathbb{C}}$.

Wegen $R + A = S \ \Leftrightarrow \ A = S - R$ für $A, R, S \in \mathbb{C}$ erhalten wir

(v) *Sind $R, S \in \mathbb{C}$, so ist* $\boxed{\tau_{R,S} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X + (S - R)}$ *die einzige Translation, die R auf S abbildet.*

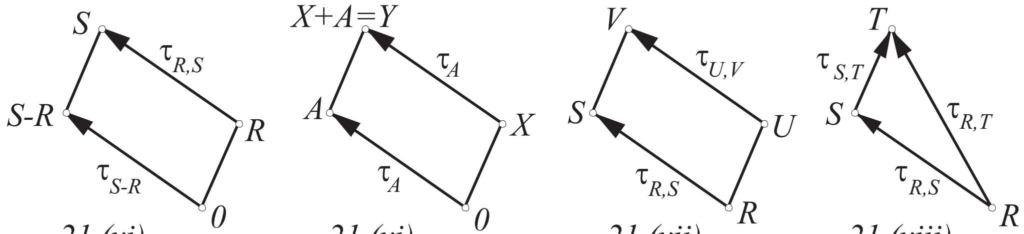
Damit folgt

(vi) $\boxed{\tau_{R,S} = \tau_{S-R}} \;\wedge\; \boxed{\tau_{0,A} = \tau_A = \tau_{X,X+A}}$ für $R, S, A, X \in \mathbb{C}$,

(vii) $\boxed{\tau_{R,S} = \tau_{U,V} \;\Leftrightarrow\; S - R = V - U \;\Leftrightarrow\; S - R + U = V}$ für $R, S, U, V \in \mathbb{C}$,

(viii) $\boxed{\tau_{R,S} \circ \tau_{S,T} = \tau_{S,T} \circ \tau_{R,S} = \tau_{R,T}}$ für $R, S, T \in \mathbb{C}$.

22. In Verbindung mit 20. führt 21. (vi)−(viii) auf die folgenden Figuren:



21.(vi) *21.(vi)* *21.(vii)* *21.(viii)*

Hierbei wird die Anwendung einer Translation τ_A auf einen Punkt X jeweils durch einen geraden **Pfeil** von X nach $Y := \tau_A(X) = A + X$ veranschaulicht.

Dieser Pfeil ist durch das Paar (X, Y) mit X = **Fuß** = *Anfang* und Y = **Kopf** = *Spitze* festgelegt und wird deshalb mit dem Paar (X, Y) identifiziert, d.h. (X, Y) wird als **Pfeil von** X **nach** Y deklariert.

Zwei Pfeile (R, S), (U, V) heißen **parallelgleich**, wenn $\boxed{S - R = V - U}$ und damit $\tau_{R,S} = \tau_{U,V}$ ist, wenn sie also zur gleichen Translation gehören (vgl. 21.(vii)).

Nach 20. sind (R, S), (U, V) im Falle $R \neq S \;\wedge\; U \notin \langle R, S\rangle$ genau dann parallelgleich, wenn (S, R, U, V) ein *Parallelogramm* ist.

Die Figur zu 21.(viii) zeigt, wie man das Verketten von Translationen durch *Aneinanderhängen von Pfeilen* veranschaulichen kann.

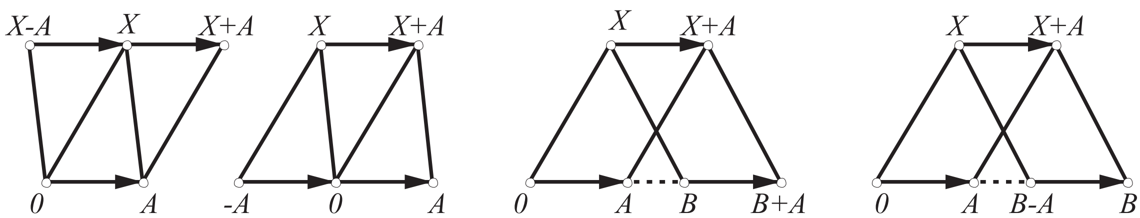
23. Der Pfeil $(0, A)$ mit $A \in \mathbb{C}$ wird als **Vektor** oder **Ortsvektor für den Punkt A** bezeichnet, denn er legt − ausgehend von 0 − die Position von A fest.

Es ist üblich, $(0, A)$ mit A zu identifizieren. Dies bedeutet nun,

daß die komplexe Zahl A im weiteren einerseits als Punkt der Ebene $\mathbb{R}^2$
und andererseits als Pfeil von 0 *nach A gedeutet wird,*

je nachdem, was im betrachteten Zusammenhang nützlicher erscheint.

So kann die Addition der komplexen Zahl A zu anderen komplexen Zahlen jetzt als „Anhängen" eines zu A parallelgleichen Pfeiles gedeutet werden:



Man findet auf diese Weise eine *geometrische Konstruktion für Addition und Subtraktion komplexer Zahlen*, die allein auf Ziehen von Geraden und Parallelen beruht:

Ist $A \neq 0$ und ist $X \notin \mathbb{R}A$, so findet man $X{+}A$ aus $\sharp\,(X, 0, A, X{+}A)$, $X{-}A$ aus $\sharp\,(0, A, X, X{-}A)$ und $-A$ aus $\sharp\,(0, X{+}A, X, -A)$, und für $B \in \mathbb{R}A$ ergibt sich $B{+}A$ aus $\sharp\,(X{+}A, X, B, B{+}A)$ und $B{-}A$ aus $\sharp\,(B, X{+}A, X, B{-}A)$, jeweils konstruiert gemäß 20.

Mit Blick auf 21.(vi) bemerkt man, daß der Pfeil von R nach S parallelgleich zum Vektor $S-R$ ist. Um also den *Vektor* zu bestimmen, der – vermittels Parallelgleichheit – zum Pfeil (R, S) gehört, nimmt man "*Kopf minus Fuß*".

E. Zentrische Streckungen

24. Die Abbildungen vom Typ

$$\boxed{\sigma_{Z,\alpha} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \alpha \cdot (X - Z) + Z} \text{ mit } Z \in \mathbb{C} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

heißen **zentrische Streckungen** mit **Zentrum** Z und **Streckungsfaktor** α.

Für festes $Z \in \mathbb{C}$ setzt man $\Delta(Z) := \{\sigma_{Z,\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Wegen $\boxed{\sigma_{Z,1} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}}$ ist $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \Delta(Z)$, und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ und $X \in \mathbb{C}$ gilt

$\sigma_{Z,\alpha} \circ \sigma_{Z,\beta}(X) = \sigma_{Z,\alpha}(\beta \cdot (X - Z) + Z) = \alpha\beta \cdot (X - Z) + Z = \sigma_{Z,\alpha\cdot\beta}(X)$, also

(i) $\boxed{\sigma_{Z,\alpha} \circ \sigma_{Z,\beta} = \sigma_{Z,\alpha\cdot\beta} = \sigma_{Z,\beta} \circ \sigma_{Z,\alpha}}$.

Insbesondere ist dann $\sigma_{Z,\alpha} \circ \sigma_{Z,\alpha^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = \sigma_{Z,\alpha^{-1}} \circ \sigma_{Z,\alpha}$, d.h. $\sigma_{Z,\alpha}$ ist eine Bijektion (vgl. 6.13.) mit

(ii) $\boxed{(\sigma_{Z,\alpha})^{-1} = \sigma_{Z,\alpha^{-1}}}$.

Dies bedeutet, daß $\Delta(Z)$ eine abelsche Untergruppe von Per $(\mathbb{C})(\circ)$ ist, die vermittels $\alpha \to \sigma_{Z,\alpha}$ isomorph zu $\mathbb{R}^*(\cdot)$ ist. Es gilt $\boxed{\sigma_{Z,\alpha}(Z) = Z}$ und

(iii) $\boxed{\sigma_{Z,\alpha}(C + \mathbb{R}D) = \sigma_{Z,\alpha}(C) + \mathbb{R}D \parallel C + \mathbb{R}D}$ für $Z, C \in \mathbb{C}, D \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{R}^*$,

d.h. $\sigma_{Z,\alpha}$ *bildet jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade ab.*

Für $Z, C \in \mathbb{C}, D \in \mathbb{C}^*$ und $\alpha \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$ ist

$\sigma_{Z,\alpha}(C) + \mathbb{R}D = C + \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; (\alpha(C - Z) + Z) - C \in \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; (\alpha - 1) \cdot (C - Z) \in \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; Z - C \in \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; Z \in C + \mathbb{R}D,$

und folglich haben wir

(iv) $\boxed{\sigma_{Z,\alpha}(g) = g \;\Leftrightarrow\; Z \in g}$ für $g \in \mathbb{G}, Z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$.

Weiter ist $\sigma_{Z,\alpha}(X) = X \;\Leftrightarrow\; \alpha(X - Z) = X - Z \;\Leftrightarrow\; (\alpha - 1) \cdot (X - Z) = 0 \;\Leftrightarrow\; X = Z$ für $Z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, d.h. im Falle $\alpha \neq 1$ wird allein der Punkt Z von $\sigma_{Z,\alpha}$ festgelassen. Dies rechtfertigt die Bezeichnung „*Zentrum*“ für Z.

Für $Z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ergibt sich

(v) $\boxed{\sigma_{Z,\alpha}(X) - \sigma_{Z,\alpha}(Y) = \alpha \cdot (X - Y)}$ $\forall\, X, Y \in \mathbb{C}$ sowie

(vi) $|\sigma_{Z,\alpha}(X) - \sigma_{Z,\alpha}(Y)| = |\alpha| \cdot |X - Y| \;\forall\, X, Y \in \mathbb{C}$,

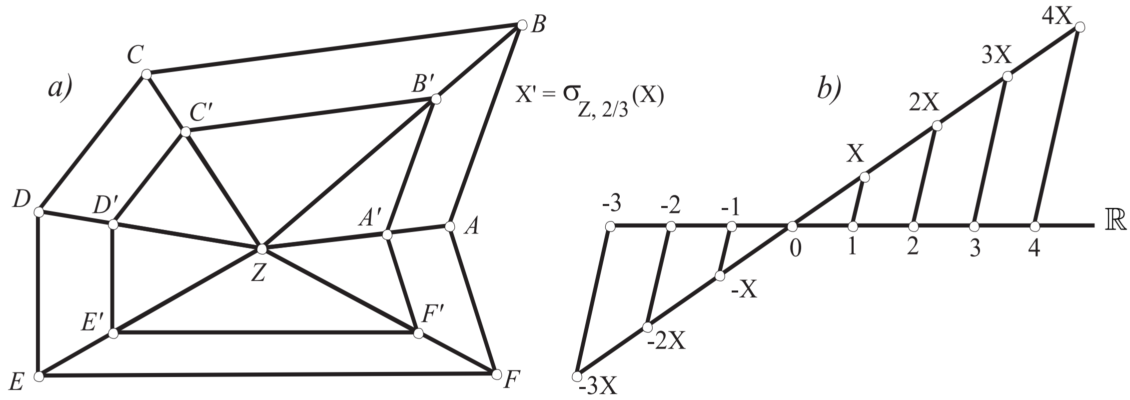
d.h. alle Abstände werden durch $\sigma_{Z,\alpha}$ mit dem Faktor $|\alpha|$ vergrößert (bzw. verkleinert). Die Gleichung (v) ist genauer als (vi), weil dort auch Vorzeichen berücksichtigt werden.

Schließlich erhalten wir

(vii) *Sind Z, X, Y kollinear mit $Z \neq X, Y$, so gibt es genau ein $\alpha \in \mathbb{R}^*$ mit $\sigma_{Z,\alpha}(X) = Y$.*

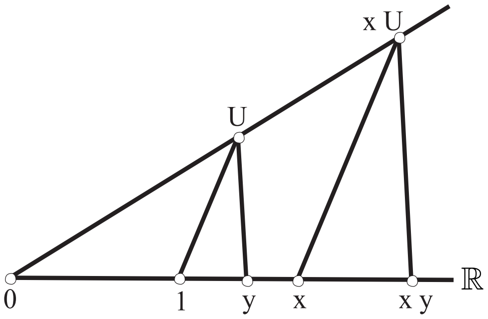
Denn α ist durch $\alpha(X - Z) = Y - Z$ festgelegt.

25. Mit 24.(iii)−(vii) können wir uns eine genaue Vorstellung von $\sigma_{Z,\alpha}$ verschaffen:



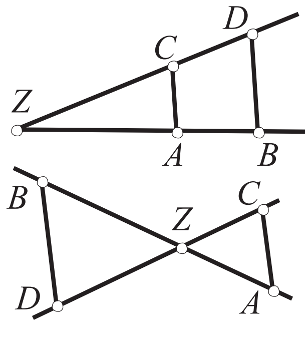
Ist $A \in \mathbb{C}\backslash\{Z\}$ und $A' := \sigma_{Z,\alpha}(A)$ für $\alpha \neq 1$, so ist $A' - Z \overset{24.(v)}{=} \alpha \cdot (A - Z)$, und $\sigma_{Z,\alpha}(B) =: B'$ läßt sich für $B \in \mathbb{C}\backslash\langle Z, A\rangle$ konstruieren aus $\{B'\} = \langle Z, B\rangle \cap (A' \parallel \langle A, B\rangle)$. In der obigen Figur a) wird das Sechseck $(A, \dots, F)$ durch $\sigma_{Z,2/3}$ *gestreckt* in das Sechseck $(A', \dots, F')$.

Wegen $\sigma_{0,\alpha}(X) = \alpha \cdot X \ \forall\ X \in \mathbb{C},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*$ erkennt man aus den Eigenschaften von $\sigma_{0,\alpha}$, wie $\alpha \cdot X$ für $X \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ aus der reellen Zahl α konstruiert werden kann (vgl. Figur b)).



Weiter kann man jetzt sogar eine *geometrische Konstruktion für die Multiplikation in* $\mathbb{R}$ angeben: Sind $x, y \in \mathbb{R}^*$, so wählt man einen beliebigen Hilfspunkt $U \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und konstruiert zuerst $\{x \cdot U\} = \langle 0, U\rangle \cap (x \parallel \langle 1, U\rangle)$ und dann $\{x \cdot y\} = \mathbb{R} \cap (x \cdot U \parallel \langle y, U\rangle)$, denn nach 24.(iii) ist $\langle 1, U\rangle \parallel \sigma_{0,x}(\langle 1, U\rangle) = \langle x, x \cdot U\rangle$ sowie $\langle y, U\rangle \parallel \sigma_{0,x}(\langle y, U\rangle) = \langle x \cdot y, x \cdot U\rangle$.

Als weitere Anwendung von 24. zeigen wir



26. **Strahlensätze.** *Sind* Z, A, B, C, D *fünf verschiedene Punkte von* $\mathbb{C}$ *mit* $B \in \langle Z, A\rangle$ *und* $C \notin \langle Z, A\rangle$, *so gilt:*

(i) $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \ \Leftrightarrow\ \dfrac{D-Z}{C-Z} = \dfrac{B-Z}{A-Z}$,

(ii) $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \ \Leftrightarrow\ \dfrac{D-B}{C-A} = \dfrac{B-Z}{A-Z}$,

(iii) $D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \ \Rightarrow\ \dfrac{|D-Z|}{|C-Z|} = \dfrac{|B-Z|}{|A-Z|} = \dfrac{|D-B|}{|C-A|}$.

Beweis: Wegen $B \in Z + \mathbb{R}(A-Z)$ ist $\alpha := \dfrac{B-Z}{A-Z} \in \mathbb{R}^*$, und nach 24. (iii)–(v) ist

$D \in \langle Z, C\rangle \cap (B \parallel \langle A, C\rangle) \ \Leftrightarrow\ D = \sigma_{Z,\alpha}(C) \ \Leftrightarrow\ D-Z = \alpha \cdot (C-Z) \ \overset{1)}{\Leftrightarrow}\ D-B = \alpha \cdot (C-A)$,

wobei sich $\overset{1)}{\Leftrightarrow}$ durch Subtraktion bzw. Addition von $B-Z = \alpha \cdot (A-Z)$ ergibt. Damit sind (i) und (ii) gezeigt, und diese Aussagen implizieren (iii). □

Anmerkung. Man nennt (i) bzw. (ii) den 1. bzw. 2. *Strahlensatz mit Umkehrung.* Die Aussage (iii) bezieht sich auf Abstände; sie entspricht der „schulischen“ Version des 1. und 2. Strahlensatzes.

F. Kollineationen der Anschauungsebene

27. Ist $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Bijektion, die jede Gerade aus $\mathbb{G}$ auf eine Gerade aus $\mathbb{G}$ abbildet, die also die Bedingung

$$\boxed{(*) \quad \alpha(\langle X, Y\rangle) = \langle \alpha(X), \alpha(Y)\rangle \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad X \neq Y}$$

erfüllt, so wird α eine **Kollineation von** $\mathbb{C}$ genannt. Die Menge aller Kollineationen von $\mathbb{C}$ wird mit $\mathrm{Koll}(\mathbb{C})$ bezeichnet. Es gilt

28. **Satz.** *$Koll(\mathbb{C})(\circ)$ ist eine Gruppe mit $id_{\mathbb{C}}$ als neutralem Element, genannt* **Kollineationsgruppe von** $\mathbb{C}$.

Beweis: Offenbar ist $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$. Sind $\alpha, \beta \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$, so ist $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Per}(\mathbb{C})$ mit $(\alpha \circ \beta)(\langle X, Y\rangle) = \alpha(\langle \beta(X), \beta(Y)\rangle) = \langle \alpha \circ \beta(X), \alpha \circ \beta(Y)\rangle\ \forall\, X, Y \in \mathbb{C}$ mit $X \neq Y$, d.h. es ist $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$. Ist $\alpha \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$, so ist $\alpha^{-1} \in \mathrm{Per}(\mathbb{C})$ mit

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(\langle X, Y\rangle) &= \alpha^{-1}(\langle \alpha(\alpha^{-1}(X)), \alpha(\alpha^{-1}(Y))\rangle) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha(\langle \alpha^{-1}(X), \alpha^{-1}(Y)\rangle)) = \langle \alpha^{-1}(X), \alpha^{-1}(Y)\rangle\ \forall\, X, Y \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\alpha^{-1} \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$. Nach 7.13. bedeutet dies $\mathrm{Koll}(\mathbb{C}) \leq \mathrm{Per}(\mathbb{C})(\circ)$. □

Zur Gewinnung einer algebraischen Darstellung für Kollineationen zeigen wir zunächst

29. **Lemma.** *Ist $\alpha \in Koll(\mathbb{C})$ mit $\alpha(0) = 0$ und $\alpha(1) = 1$, so gilt $\alpha(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Es ist $\alpha(\mathbb{R}) = \langle \alpha(0), \alpha(1)\rangle = \langle 0, 1\rangle = \mathbb{R}$.
Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gibt es nach 23. und 25. geometrische Konstruktionen zur Gewinnung von $x+y$ und $x \cdot y$. Bei Anwendung von α gehen diese Konstruktionen über in Konstruktionen, mit denen man aus $\alpha(x)$ und $\alpha(y)$ die Zahlen $\alpha(x) + \alpha(y)$ und $\alpha(x) \cdot \alpha(y)$ gewinnt, wobei sich dann $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ und $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ ergibt. Dies bedeutet, daß $\alpha|_{\mathbb{R}}$ ein Automorphismus von $\mathbb{R}(+, \cdot)$ ist, und mit 8.34. führt dies auf die Behauptung. □

Unter Verwendung von 29. zeigen wir nun

30. **Fundamentalsatz** *zur Darstellung von Kollineationen.*

Die Kollineationen von $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen des Typs

$$\boxed{\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x \cdot A + y \cdot B + C} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

mit $A, B, C \in \mathbb{C}\ \wedge\ \det(A, B) \neq 0$.

Beweis: 1) Nach 14. ist die angegebene Abbildung α eine Bijektion.
Sind $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $c + \mathrm{id} \neq 0$, so ist nach 14. auch $c \cdot A + d \cdot B \neq 0$, und es gilt $\alpha((a + ib) + \lambda \cdot (c + \mathrm{id})) = \alpha((a + \lambda c) + i(b + \lambda d)) = (a + \lambda c) \cdot A + (b + \lambda d) \cdot B + C = \alpha(a + ib) + \lambda \cdot (cA + dB)$, d.h α ist eine Kollineation.

2) Jetzt sei φ eine beliebige Kollineation. Wir setzen $A := \varphi(1) - \varphi(0)$, $B := \varphi(i) - \varphi(0)$, $C := \varphi(0)$ und betrachten die Kollineation $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to xA + yB + C$ (vgl. 1)). Es gilt $\alpha(0) = \varphi(0)\ \wedge\ \alpha(1) = \varphi(1)\ \wedge\ \alpha(i) = \varphi(i)$, und nach 28. ist $\alpha^{-1} \circ \varphi$ dann eine Kollineation, die die Punkte $0, 1, i$ festläßt. Nach 29. läßt $\alpha^{-1} \circ \varphi$ alle Punkte von $\mathbb{R}$ fest, damit aber auch alle Geraden $(x \parallel \langle 0, i\rangle)$ und $(x \parallel \langle 1, i\rangle)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und schließlich dann – als Schnittpunkte dieser Geraden – alle Punkte von $\mathbb{C}$. Es folgt also $\alpha^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ und damit $\varphi = \alpha$. □

31. **Corollar 1**. *Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, so sind äquivalent:*

(i) Es gibt $A, B \in \mathbb{C}$ mit $\det(A, B) \neq 0 \ \wedge\ f(x + iy) = xA + yB \ \ \forall \ \ x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) f ist eine Bijektion mit $\boxed{f(X + \lambda \cdot Y) = f(X) + \lambda \cdot f(Y)} \ \ \forall\ X, Y \in \mathbb{C},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) f ist eine Kollineation mit $f(0) = 0$.

Beweis: ((i) $\Rightarrow$ (ii)) gilt nach Teil 1) des Beweises von 30., ((ii) $\Rightarrow$ (iii)) folgt aus 8., und ((iii) $\Rightarrow$ (i)) gilt gemäß 30. □

32. Die Bijektionen f, die die Gleichung in 31.(ii) erfüllen, werden **lineare Bijektionen von** $\mathbb{C}$ genannt, und ihre Gesamtheit wird mit $\boxed{\mathrm{GL}(\mathbb{C})}$ bezeichnet („*Gruppe der linearen Bijektionen von* $\mathbb{C}$“).

$\mathrm{GL}(\mathbb{C})$ *ist* eine Untergruppe von $\mathrm{Koll}(\mathbb{C})(\circ)$, denn nach 31. ist $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$ mit $id_{\mathbb{C}} \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, und für $f, g \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$ mit $f(0) = 0 \ \wedge\ g(0) = 0$ ist $f^{-1}(0) = 0$ und $f \circ g(0) = 0$.

33. **Corollar 2**. *Die Kollineationen von $\mathbb{C}$ sind die Abbildungen* $\boxed{\tau \circ f}$ *mit $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ und $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$.*

Beweis: 21., 30., 31. □

34. *Bemerkungen.* a) Die Darstellung $\alpha = \tau \circ f$ für eine Kollineation α entsprechend 33. mit $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ und $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ ist *eindeutig*, denn ist zugleich auch $\alpha = \sigma \circ g$ mit $\sigma \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}} \ \wedge\ g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, so ist $\sigma^{-1} \circ \tau(0) = g \circ f^{-1}(0) = 0$, also $\sigma^{-1} \circ \tau = id_{\mathbb{C}}$ gemäß 21.(v) und deshalb $\tau = \sigma$ sowie $f = g$.

Man nennt τ den **Translationsanteil** und f den **linearen Anteil von** α.

b) Da man die Translationen nach 21.-23. gut kennt, kann man sich beim Studium von Kollineationen oftmals auf eine Untersuchung der linearen Anteile beschränken. Es gelten hier die folgenden Regeln:

Sind $\alpha = \tau_C \circ f$ und $\beta = \tau_D \circ g$ mit $C, D \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ gegeben, so gilt

$$\boxed{\begin{array}{rclrcl} \alpha(X) & = & f(X) + C, & \beta(X) & = & g(X) + D, \\ \alpha^{-1}(X) & = & f^{-1}(X - C), & \alpha \circ \beta(X) & = & f \circ g(X) + C + f(D) \end{array}} \quad \forall X \in \mathbb{C}.$$

c) Ist $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, so findet man die Darstellung 31.(i) für f, indem man $A := f(1)$ und $B := f(i)$ setzt, denn gemäß 31.(ii) folgt dann

(i) $f(x + iy) = f(x \cdot 1) + f(y \cdot i) = x \cdot f(1) + y \cdot f(i) = xA + yB \ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Geht man hierbei zur Paardarstellung komplexer Zahlen über und ist $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so folgt

$\boxed{\text{(ii)} \ \ f((x, y)) = (ax + cy, bx + dy)} \ \ \forall\ x, y \in \mathbb{R}$.

Setzt man nun $f((x, y)) =: (x', y')$, so ergibt sich mit 15. die Darstellung

(iii) $\boxed{\begin{array}{l} (x, y) \xrightarrow{f} (x', y') \text{ mit} \\ x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{l} (x', y') \xrightarrow{f^{-1}} (x, y) \text{ mit} \\ x = (dx' - cy')/\triangle \\ y = (-bx' + ay')/\triangle \end{array}}$ mit $\triangle := ad - bc = \det(A, B)$.

35. Ist $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$, so wird $\det f := \det(\mathrm{f}(1), \mathrm{f}(\mathrm{i}))$ die *Determinante von* f genannt. Ist außerdem $\tau \in \mathcal{T}$, so heißt $\det(\tau \circ f) := \det f$ die **Determinante von** $\tau \circ f$.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir den

Determinantenmultiplikationssatz.

Es gilt $\boxed{\det(\alpha \circ \beta) = \det \alpha \cdot \det \beta}$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$.

Beweis: Definitionsgemäß und wegen 34.b) dürfen wir von $\alpha, \beta \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ ausgehen. Für $A := \alpha(1), B := \alpha(i), r + is := \beta(1), u + iv := \beta(i)$ (mit $r, s, u, v \in \mathbb{R}$) ergibt sich dann

$\det(\alpha \circ \beta) = \det(\alpha(r+is), \alpha(u+iv)) = \det(rA+sB, uA+vB) \overset{12.}{=} \det(A, B) \cdot (rv - su) =$
$= \det \alpha \cdot \det \beta$. $\square$

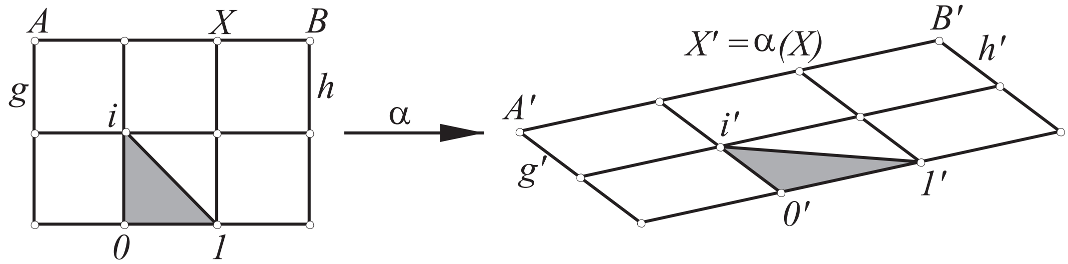
36. *Bemerkung.* Die Determinante einer Kollineation hat durchaus eine geometrische Bedeutung. Später werden wir nämlich sehen, daß es sich hierbei um den *Flächenverzerrungsfaktor* handelt.

Wir bezeichnen jedes Tripel (A, B, C) nichtkollinearer Punkte als **geordnetes Dreieck** und zeigen nun

37. **Transitivitätssatz**. *Sind* (A, B, C) *und* (A', B', C') *geordnete Dreiecke, so existiert genau ein* $\alpha \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$ *mit* $\alpha(A) = A' \ \wedge \ \alpha(B) = B' \ \wedge \ \alpha(C) = C'$.
Kurz: Die Kollineationen sind dreieckstransitiv.

Beweis: Wegen $B \notin \langle C, A \rangle$ ist $B - C \notin \mathbb{R}(A - C)$ und damit $\det(A - C, B - C) \neq 0$ (vgl. 12.(9)). Ebenso ist auch $\det(A' - C', B' - C') \neq 0$, und nach 30. sind $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x(A - C) + y(B - C) + C$ bzw. $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x(A' - C') + y(B' - C') + C'$ dann Kollineationen, die $1, i, 0$ auf A, B, C bzw. A', B', C' abbilden. Dies bedeutet, daß A, B, C durch die Kollineation $\beta \circ \alpha^{-1}$ auf A', B', C' abgebildet werden. Ist jetzt γ eine weitere Kollineation, die A, B, C auf A', B', C' abbildet, so ist $\beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha$ eine Kollineation, die $1, i, 0$ festläßt, und nach 30. gilt dann $\beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha = id_{\mathbb{C}}$, also $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$. $\square$

38. Mit 37. haben wir einen genauen Überblick, *wie eine Kollineation* α *wirkt*:



Das durch die „Grundpunkte“ $0, 1, i$ festgelegte Koordinatensystem wird durch α auf ein (evtl. versetztes und schräg verzerrtes) Koordinatensystem mit den „Grundpunkten“ $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(i)$ abgebildet. Dies geschieht so, daß *disjunkte Geraden* g, h stets *auf disjunkte Geraden* $\alpha(g), \alpha(h)$ abgebildet werden (denn α ist bijektiv), und daß *reelle Teilverhältnisse erhalten* bleiben, denn für $A, B, C \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ und $\alpha = \tau_C \circ f$ mit $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ gilt

$$(*) \quad \boxed{\alpha(A + \lambda(B - A)) = \alpha(A) + \lambda \cdot (\alpha(B) - \alpha(A))}$$

wegen $C + f(A + \lambda(B - A)) = C + f(A) + \lambda \cdot (f(B) + C - (f(A) + C))$.

Insbesondere werden *Parallelogramme* stets *auf Parallelogramme* abgebildet.

10. Lineare Algebra im Anschauungsraum

Nach R. Descartes (1596-1650) lassen sich die Punkte des Anschauungsraumes durch Zahlentripel beschreiben. Durch diesen Ansatz wird es möglich, geometrische Fragen mit algebraischen Methoden zu behandeln.

Da sich die Konstruktion der komplexen Zahlen nicht auf den Raum fortsetzen läßt, wie man zeigen kann, werden wir hier andere Methoden als im ebenen Fall verwenden, um zum Ziel zu gelangen.

A. Grundlegende algebraische Verknüpfungen im $\mathbb{R}^3$

1. Die Menge $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ aller Tripel aus reellen Zahlen wird nach 7.6.6) durch komponentenweise Addition

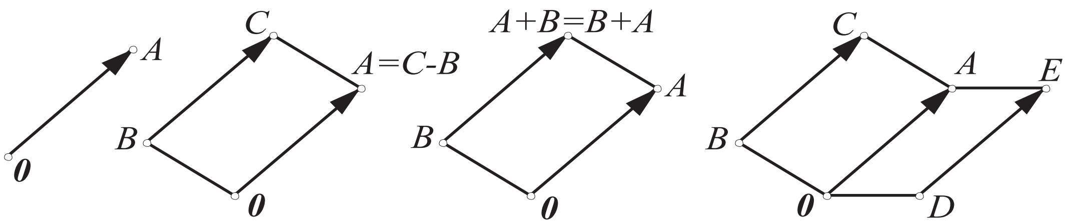
(i) $\boxed{(x, y, z) + (u, v, w) := (x + u, y + v, z + w)} \quad \forall\ x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$

zu einer *abelschen Gruppe* $\mathbb{R}^3(+)$ mit dem neutralen Element $(0, 0, 0)$ und den Regeln

(ii) $(x, y, z) - (u, v, w) = (x - u, y - v, z - w) \quad \forall\ x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$,

(iii) $-(x, y, z) = (-x, -y, -z) \quad \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Analog zum ebenen Fall deuten wir jedes Tripel $A = (a, b, c)$ reeller Zahlen a, b, c einerseits als **Punkt** des Anschauungsraumes und andererseits als **Vektor** (= *Ortsvektor*), nämlich als (geradlinigen) Pfeil, der vom sog. **Ursprung** $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$ zum Punkt A zeigt.



Sind zwei beliebige Punkte $B, C \in \mathbb{R}^3$ gegeben, so wird der (geradlinige) **Pfeil** von B nach C analog zu 9.22. mathematisch durch das Paar (B, C) repräsentiert, wobei man B als **Fuß** oder *Anfang* und C als **Kopf** oder *Spitze* bezeichnet.

Zwei Pfeile (B, C), (D, E) heißen **parallelgleich**, wenn $\boxed{C - B = E - D}$ ist (*„Kopf minus Fuß"-Regel*). Beachtet man die Identifikation des Vektors A mit dem Pfeil $(\mathbf{0}, A)$, so kann man die Addition von A nun wieder durch Anhängen eines zu A parallelgleichen Pfeiles deuten (vgl. 9.23.; die obigen Figuren sind zunächst nur als Diagramme zu betrach-ten und werden erst später als anschaulich zutreffend erkannt).

3. Zwischen den Elementen von $\mathbb{R}$, die jetzt auch als **Skalare** (von Skala) bezeichnet werden, und den Vektoren des $\mathbb{R}^3$ wird eine sog. **skalare Multiplikation** eingeführt durch die Vereinbarung

(i) $\boxed{\lambda \cdot (x, y, z) := (\lambda x, \lambda y, \lambda z) =: (x, y, z) \cdot \lambda} \quad \forall\ \lambda, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathbb{R}^3$ ergeben sich die Regeln

(ii) $1 \cdot X = X \ \wedge\ (-1) \cdot X = -X$,

(iii) $\lambda \cdot X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee\ X = \mathbf{0}$,

(iv) $(-\lambda) \cdot X = \lambda \cdot (-X) = -(\lambda \cdot X) \;\wedge\; (-\lambda) \cdot (-X) = \lambda \cdot X$,
(v) $\lambda \cdot (\mu \cdot X) = (\lambda \cdot \mu) \cdot X$,
(vi) $\lambda \cdot (X+Y) = \lambda \cdot X + \lambda \cdot Y \;\wedge\; \lambda \cdot (X-Y) = \lambda \cdot X - \lambda \cdot Y$,
(vii) $(\lambda+\mu) \cdot X = \lambda \cdot X + \mu \cdot X \;\wedge\; (\lambda-\mu) \cdot X = \lambda \cdot X - \mu \cdot X$.
Zum *Beweis* vergleiche man die Übungen.

Die abelsche Gruppe $\mathbb{R}^3(+)$ zusammen mit der gerade eingeführten skalaren Multiplikation wird der **Vektorraum** $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ genannt.

Man beachte, daß hier Elemente aus *verschiedenen* Bereichen verknüpft werden; für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathbb{R}^3$ gilt stets $\lambda \cdot X \in \mathbb{R}^3$.

Der Ursprung **0** wird in diesem Kontext auch als **Nullvektor** bezeichnet.

4. Für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ setzt man

(i) $$\boxed{(a, b, c) \circ (d, e, f) := ad + be + cf \in \mathbb{R}}.$$

Durch (i) ist je zwei Vektoren $A, B \in \mathbb{R}^3$ eine reelle Zahl $A \circ B \in \mathbb{R}$ zugeordnet; diese Zahl wird das **Skalarprodukt von** A **und** B genannt.

Man findet diese Zahl, indem man zunächst komponentenweise multipliziert und die Ergebnisse dann aufsummiert.

Man beachte, daß das Skalarprodukt zweier Vektoren kein Vektor, sondern eine reelle Zahl ist. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ ergeben sich die Regeln
(i) $A \circ B = B \circ A$,
(ii) $A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$,
(iii) $(\lambda \cdot A) \circ B = \lambda \cdot (A \circ B) = A \circ (\lambda \cdot B)$
Zum *Beweis* vergleiche man die Übungen.

Wegen $((1, 0, 0) \circ (1, 1, 0)) \cdot (0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ und $(1, 0, 0) \cdot ((1, 1, 0) \circ (0, 1, 0)) = (1, 0, 0)$ ist das Skalarprodukt *nicht assoziativ.*

5. Für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ setzt man

(i) $$\boxed{(a, b, c) \times (d, e, f) := (bf - ce, cd - af, ae - bd)}.$$

Durch (i) ist je zwei Vektoren $A, B \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor $A \times B \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet; dieser wird das **Vektorprodukt von** A **und** B oder das **Kreuzprodukt von** A **und** B genannt.

Um sich die etwas komplizierte Verknüpfungsvorschrift zu merken, kann man z.B. wie folgt vorgehen:

Man notiert die Vektoren $A = (a, b, c)$ und $B = (d, e, f)$ untereinander und merkt sich die Koordinatensequenz 2 3, 3 1, 1 2 zur Berechnung entsprechender Determinanten:

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Koordinaten}: & \quad\;\; 2\;\;3 \quad\;\; , \quad 3\;\;1 \quad\; , \quad 1\;\;2 \\ A = (a\,, b\,, c): & \left(\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} c & a \\ f & d \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \right) = A \times B \\ B = (d\,, e\,, f): & \end{array}} \quad \text{mit} \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} := xv - yu.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ ergeben sich die Regeln
(ii) $A \times B = -B \times A$,
(iii) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$,

(iv) $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$,

(v) $(\lambda \cdot A) \times B = \lambda \cdot (A \times B) = A \times (\lambda \cdot B)$,

(vi) $A \times A = \mathbf{0} = A \times \mathbf{0}$,

(vii) $A \circ (A \times B) = 0 \;\wedge\; B \circ (A \times B) = 0$,

(viii) $A \times (B \times C) = (A \circ C) \cdot B - (A \circ B) \cdot C$,

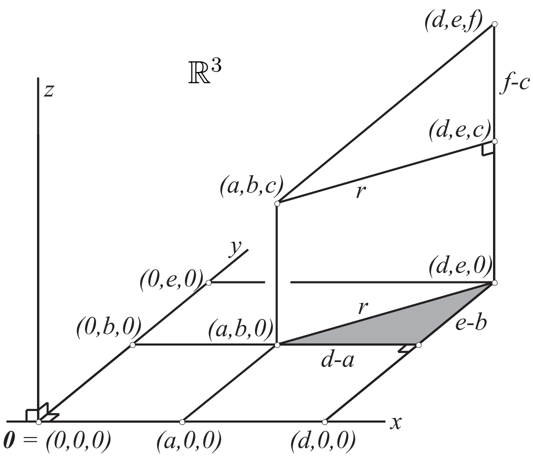
(ix) $(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \cdot (B \circ D) - (A \circ D) \cdot (B \circ C)$

Zum *Beweis* vergleiche man die Übungen.

Diese zunächst nur rechnerisch erzielten Regeln werden sich im weiteren für den Beweis geometrischer Aussagen als sehr nützlich erweisen. Erst in Verbindung mit geometrischen Deutungen werden wir den Sinn der Regeln erfassen.

B. Abstände und Geraden

6. Nach DESCARTES wird der **Abstand** zweier Punkte $A = (a, b, c)$ und $B = (d, e, f)$ des $\mathbb{R}^3$ durch die Zahl



(i) $\boxed{d(A, B) := \sqrt{(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2}}$

festgelegt, was entsprechend der nebenstehenden Figur und im Hinblick auf unsere Schulkenntnisse plausibel erscheint. (Mathe-matisch können wir erst später bestätigen, daß die Figur den Sachverhalt trifft, denn die gezeichneten Objekte sind im Moment noch nicht definiert.)

Aus (i) folgt

(ii) $\boxed{|A| := d(\mathbf{0}, A) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{A \circ A}}$ für $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

wobei $|A|$ nun auch die **Länge** oder der **Absolutbetrag des Vektors** A genannt wird.

Mit der Abkürzung $\boxed{A^2 := A \circ A}$ $\forall A \in \mathbb{R}^3$ führt (ii) auf

(iii) $\boxed{A^2 = |A|^2}$ $\forall A \in \mathbb{R}$,

d.h. *das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst liefert das Quadrat seiner Länge.*

Wegen $(a^2 + b^2 + c^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = c = 0) \wedge a^2 = (-a)^2 \;\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

(iv) $\boxed{|A| = 0 \;\Leftrightarrow\; A = \mathbf{0}}$ $\forall A \in \mathbb{R}^3$,

(v) $\boxed{|-A| = |A|}$ $\forall A \in \mathbb{R}^3$.

Ist $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ und $B = (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$, so führt (iii) auf

$$|B - A|^2 = (B - A)^2 = (d - a)^2 + (e - b)^2 + (f - c)^2,$$

und mit (i) und (v) folgt

(vi) $\boxed{d(A,B) = |B-A| = |A-B|}$ $\forall\, A,B \in \mathbb{R}^3$,

d.h. *der Betrag der Differenz liefert* (wie im ebenen Fall) *den Abstand der Punkte* A, B

Mit den Abkürzungen $\mathbb{R}X := \{\alpha \cdot X \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}_+X := \{\beta \cdot X \mid \beta \in \mathbb{R}_+\}$ für $X \in \mathbb{R}^3$ ergeben sich weitere Eigenschaften von Skalarprodukt und Absolutbetrag:

7. **Satz** *Sind* $X, Y \in \mathbb{R}^3$ *mit* $Y \neq \mathbf{0}$ *und ist* $\lambda \in \mathbb{R}$, *so gilt:*

(i) $|\lambda \cdot X| = |\lambda| \cdot |X| \geq 0$,

(ii) $X \in \mathbb{R}_+Y \;\Rightarrow\; X \circ Y = |X| \cdot |Y|$,

(iii) $X \in \mathbb{R}_-Y \;\Rightarrow\; X \circ Y = -|X| \cdot |Y|$,

(iv) $X \;\notin\; \mathbb{R}Y \;\Leftrightarrow\; |X \circ Y| < |X| \cdot |Y|$,

(v) $|X \circ Y| \leq |X| \cdot |Y|$ *(Schwarzsche Ungleichung),*

(vi) $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ *(1. Fassung der Dreiecksungleichung),*

(vii) $|X+Y| = |X| + |Y| \;\Leftrightarrow\; X \in \mathbb{R}_+Y$,

(viii) $||X| - |Y|| \leq |X-Y|$ *(2. Fassung der Dreiecksungleichung).*

Beweis: a) Aus $|\lambda \cdot X|^2 \overset{6.}{=} (\lambda \cdot X)^2 \overset{4.}{=} \lambda^2 \cdot X^2 \overset{6.}{=} |\lambda|^2 \cdot |X|^2 = (|\lambda| \cdot |X|)^2$ folgt (i). Ist $X = \mu Y$ mit $\mu \in \mathbb{R}$, so ist $X \circ Y = \mu \cdot Y^2 \overset{6.}{=} \mu|Y|^2 = \mu|Y| \cdot |Y|$ mit $\mu|Y| \overset{(i)}{=} |\mu Y| = |X|$ im Falle $\mu \geq 0$ und $\mu|Y| = -|\mu| \cdot |Y| \overset{6.}{=} -|X|$ im Falle $\mu < 0$. Mithin gelten (ii) und (iii).
b) Es sei $u := |Y|$ und $v := (X \circ Y)/u$. Ist $X \notin \mathbb{R}Y$, so folgt $uX \neq vY$ und damit $0 \overset{6.(iv)}{<} |uX - vY|^2 \overset{6.(iii)}{=} (uX-vY)^2 \overset{4.}{=} u^2X^2 + v^2Y^2 - 2uv(X \circ Y) = X^2 \cdot Y^2 + v^2u^2 - 2(uv)^2 = X^2Y^2 - (uv)^2 = (|X| \cdot |Y|)^2 - (X \circ Y)^2$, also (iv).
c) Aus (ii), (iii), (iv) ergibt sich (v), und wegen $(|X| + |Y|)^2 - (X+Y)^2 \overset{6.(iii)}{=}$ $= 2 \cdot (|X| \cdot |Y| - X \circ Y)$ führen (ii) – (iv) auf (vi) und (vii). Aus $|X| = |(X-Y) + Y| \leq$ $\leq |X-Y| + |Y|$ und $|Y| = |(Y-X) + X| \leq |Y-X| + |X|$ folgt (viii). □

8. *Bemerkung.* a) Abgesehen von (iv) und (vii) gelten die Aussagen in 7. auch für $Y = \mathbf{0}$.
b) Aus (vi) ergibt sich $|A-C| \leq |A-B| + |B-C|$ $\forall\, A,B,C \in \mathbb{R}^3$, wenn man $X := A-B$ und $Y := B-C$ setzt; dies ist die *3. Fassung der Dreiecksungleichung.*

9. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$. Analog zum ebenen Fall bezeichnen wir

$$[A,B] := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid |A-B| = |A-X| + |X-B|\}$$

als die **Verbindungsstrecke von** A, B und

$$\langle A,B \rangle := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X \in [A,B] \vee A \in [X,B] \vee B \in [X,A]\}$$

als die **Verbindungsgerade von** A, B.

Hier ist $A, B \in [A,B] = [B,A] \subseteq \langle A,B \rangle = \langle B,A \rangle$, und es folgt

10. **Satz.** *Für* $A, B \in \mathbb{R}^3$ *mit* $A \neq B$ *gilt*

(i) $\boxed{[A,B] = \{A + \lambda(B-A) \mid \lambda \in [0,1]\}}$,

(ii) $\boxed{\langle A,B \rangle = \{A + \lambda(B-A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =: A + \mathbb{R}(B-A)}$.

Beweis: Für $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{A, B\}$ folgt:
a) $A \in [X, B] \;\Leftrightarrow\; |(X-A)+(A-B)| = |X-B| = |X-A| + |A-B| \;\overset{7.}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}_- : X - A = (-\lambda)\cdot(A-B) \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}_- : X = A + \lambda(B-A)$.
b) $B \in [X, A] \;\overset{a)}{\Leftrightarrow}\; \exists \mu \in \mathbb{R}_- : X = B + \mu(A-B) = A + (1-\mu)(B-A) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 1 \;\wedge\; X = A + \lambda(B-A)$.
c) $X \in [B, A] \;\overset{b)}{\Leftrightarrow}\; \exists \nu \in \mathbb{R} : \nu \geq 1 \;\wedge\; B = A + \nu\cdot(X-A) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \exists \nu \in \mathbb{R} : \nu \geq 1 \;\wedge\; X = A + \dfrac{1}{\nu}\cdot(B-A) \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in]0,1] : X = A + \lambda(B-A)$.
d) Mit a), b), c) sind (i) und (ii) bewiesen. □

11. *Bemerkungen.* a) Nach 10., 9.5. und 9.8. können wir Strecken und Geraden im Raum in gleicher Weise mit Hilfe eines *„laufenden" Parameters* darstellen wie in der Ebene. Demgemäß werden auch 9.(i) und 9.(ii) als **Parameterdarstellungen** bezeichnet.

b) Die Menge aller Verbindungsgeraden des $\mathbb{R}^3$ wird als die Menge $\mathbb{G}_3$ der **Geraden** des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Punkte $A, B, C, \ldots$ heißen **kollinear**, wenn sie gemeinsam einer Geraden angehören, sonst **nichtkollinear**.

c) *Zwei* **Vektoren** A, B heißen **(linear) abhängig**, wenn die *Punkte* $0, A, B$ kollinear sind, sonst **(linear) unabhängig**.

Wir zeigen nun

12. **Satz.** *Zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^3$ liegen stets auf genau einer Geraden.*

Beweis: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$. Dann sind $A, B \in \langle A, B\rangle$. Sind $C, D \in \mathbb{R}^3$ mit $C \neq D \;\wedge\; A, B \in \langle C, D\rangle$, so gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $A = C + \alpha(D-C) \;\wedge\; B = C + \beta(D-C)$, und wegen $A \neq B$ ist $\alpha \neq \beta$. Es folgt $B - A = (\beta - \alpha)(D - C)$ und damit
$\langle A, B\rangle = \{A + \lambda(B-A) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{C + \alpha(D-C) + \lambda\cdot(\beta-\alpha)(D-C) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =$
$= \{C + (\alpha + \lambda(\beta-\alpha))\cdot(D-C) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle C, D\rangle$, denn nach 9.8. ist $\mathbb{R} = \langle \alpha, \beta\rangle =$
$= \{\alpha + \lambda(\beta - \alpha) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

13. **Corollar 1.** *Sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ mit $B, D \neq \mathbf{0}$, so gilt:*

(i) $\mathbf{0} \neq A \in \mathbb{R}B \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R}A = \mathbb{R}B$.

(ii) $\mathbb{R}B = \langle 0, B\rangle \in \mathbb{G}_3 \;\wedge\; A + \mathbb{R}B = \langle A, A+B\rangle \in \mathbb{G}_3$.

(iii) $X, Y \in \mathbb{R}B \;\wedge\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \alpha X + \beta Y \in \mathbb{R}B$.

(iv) $\mathbb{R}B$ *ist eine Untergruppe von* $\mathbb{R}^3(+)$.

(v) $A + \mathbb{R}B = C + \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; A - C \in \mathbb{R}B = \mathbb{R}D$.

(vi) $A + \mathbb{R}B = C + \mathbb{R}B \;\Leftrightarrow\; C \in A + \mathbb{R}B$.

Beweis: (ii) folgt aus 10.(ii), und wegen $\mathbb{R}\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}$ führt (ii) mit 12. auf (i). Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $X = xB \;\wedge\; Y = yB$, so ist $\alpha X + \beta Y = (\alpha x)B + (\beta y)B \in \mathbb{R}B$, d.h. es gelten (iii) und (iv).

Aus $C, C + D \in C + \mathbb{R}D = A + \mathbb{R}B$ ergibt sich $C - A, C + D - A \in \mathbb{R}B$ und mit (iii) dann $D \in \mathbb{R}B$, also $\mathbb{R}D = \mathbb{R}B$ gemäß (i). Gilt umgekehrt $A - C \in \mathbb{R}B = \mathbb{R}D$, so gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $A = C + \alpha D, B = \beta D$, und es folgt $A, A + B \in C + \mathbb{R}D$, also $A + \mathbb{R}B = C + \mathbb{R}D$ gemäß 12. und (ii). Damit sind auch (v) und (vi) gezeigt. □

14. **Corollar 2.** *Für* $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *gilt:*

(i) A, B *sind abhängig* $\Leftrightarrow$ $B = \mathbf{0} \vee A \in \mathbb{R}B$.

(ii) A, B *sind unabhängig* $\Leftrightarrow$ $A, B \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbb{R}A \neq \mathbb{R}B \ \Leftrightarrow \ A, B \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbb{R}A \cap \mathbb{R}B = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) A, B, C *sind nichtkollinear* $\Leftrightarrow$ $B - A, C - A$ *sind unabhängig.*

Beweis: a) Ist $\mathbf{0} \in \{A, B\}$, so sind A, B mit $\mathbf{0}$ kollinear gemäß 12., d.h. A, B sind abhängig.

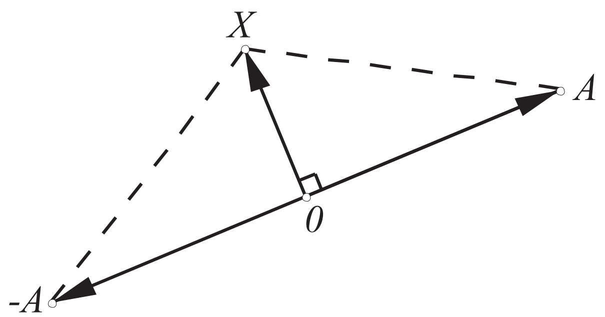
b) Es seien $A, B \neq \mathbf{0}$. Dann ist $A \in \langle \mathbf{0}, B\rangle \overset{12.,13.}{\Leftrightarrow} \mathbb{R}A = \langle \mathbf{0}, A\rangle = \langle \mathbf{0}, B\rangle = \mathbb{R}B$.

c) Mit 12., a) und b) sind (i) und (ii) bewiesen.

d) $A \neq B \ \wedge \ C \notin \langle A, B\rangle \ \Leftrightarrow \ A \neq B \ \wedge \ C - A \notin \mathbb{R}(B - A) \overset{(ii)}{\Leftrightarrow} B - A, C - A$ sind unabhängig. $\square$

C. Orthogonalität von Vektoren

15. Der Begriff des *Senkrechtstehens* läßt sich — *zunächst für Vektoren* — wie folgt auf den Begriff des Abstandes zurückführen:



Wir sagen, daß der *Vektor* X auf dem *Vektor* A **senkrecht** steht oder daß X zu A **orthogonal** ist, in Zeichen: $\boxed{X \perp A}$,

wenn $\boxed{d(-A, X) = d(X, A)}$ gilt.

Für die anschauliche Vorstellung ist hierbei wichtig, daß wir jeden Vektor R als Pfeil deuten, der im Ursprung ansetzt und der von dort bis zum Punkt R verläuft.

Der rechte Winkel zwischen Vektoren befindet sich stets beim Ursprung.

Wegen $d(-A, X) = d(A, X) \ \Leftrightarrow \ |X + A| = |X - A| \ \Leftrightarrow \ |X + A|^2 = |X - A|^2 \overset{26.}{\Leftrightarrow}$ $(X + A)^2 = (X - A)^2 \ \Leftrightarrow \ 2(X \circ A) = -2(X \circ A) \ \Leftrightarrow \ 4(X \circ A) = 0 \ \Leftrightarrow \ X \circ A = 0$ folgt

(i) $\boxed{X \perp A \ \Leftrightarrow \ X \circ A = 0} \ \wedge \ \boxed{X \perp A \ \Leftrightarrow \ A \perp X} \quad \forall\, X, A \in \mathbb{R}^3$.

Mit (i) haben wir die wichtigste Eigenschaft des Skalarproduktes vor Augen:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ *ist genau dann Null, wenn diese aufeinander senkrecht stehen.*

Mit 4. erhalten wir

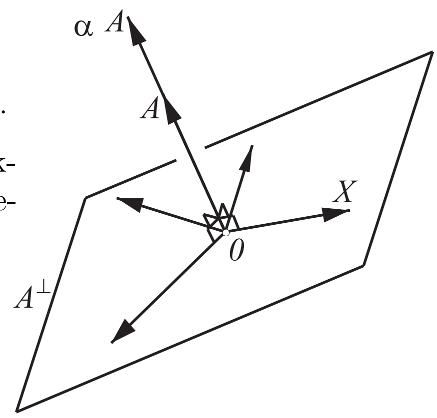
(ii) $\boxed{X \perp A \ \Leftrightarrow \ \alpha A \perp \beta X} \quad \forall\, X, A \in \mathbb{R}^3, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

Ist $A \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben, so wird die Gesamtheit aller Vektoren X des $\mathbb{R}^3$, die auf A senkrecht stehen, mit $A^\perp$ bezeichnet, d.h. wir gehen von

1mm (iii) $\boxed{A^\perp := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid X \perp A\}}$

aus. Wegen $X \circ \mathbf{0} = 0 \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3$ gilt

(iv) $(\mathbf{0} \perp X \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3) \ \wedge \ \mathbf{0}^\perp = \mathbb{R}^3$.



Ist $A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda A \in A^\perp \Leftrightarrow \lambda \cdot A^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot |A|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, d.h. wir erhalten

(v) $\mathbb{R}A \cap A^\perp = \{\mathbf{0}\} \ \forall\, A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$.

Sind $X, A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ mit $X \perp A$, so sind X, A *unabhängig*, denn aus $X = \alpha A$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ergäbe sich $X \circ A = \alpha A^2 \neq 0$ (vgl. 14.).

Mit (i) und 4.(iii),(iv) folgt außerdem

(vi) $X, Y \in A^\perp \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in A^\perp \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall A \in \mathbb{R}^3$.

Demnach ist $A^\perp$ für jedes $A \in \mathbb{R}^3$ *eine Untergruppe von* $\mathbb{R}^3(+)$.

Für $\alpha \in \mathbb{R}^*$ und $A, X \in \mathbb{R}^3$ ist $A \circ X = 0 \Leftrightarrow (\alpha A) \circ X = 0$. Mithin gilt

(vii) $A^\perp = (\alpha A)^\perp \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}^*, \ \forall\, A \in \mathbb{R}^3$.

16. Aus 15.(i) mit 5.(vii) ergibt sich

(i) $\boxed{A \perp A \times B \ \wedge \ B \perp A \times B} \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^3$.

Damit erkennen wir eine der wichtigsten Eigenschaften des Kreuzproduktes:
Es liefert einen zu A **und** *B orthogonalen Vektor!*

Hier ist allerdings noch zu klären, wann $A \times B \neq \mathbf{0}$ ist, und so zeigen wir für $A, B \in \mathbb{R}^3$:

(ii) $A \times B = 0 \Leftrightarrow A, B$ sind abhängig,

(iii) $\boxed{A \times B \neq 0 \Leftrightarrow A, B \text{ sind unabhängig.}}$

Beweis: a) Wenn A, B abhängig sind, ist $A \times B \overset{5.(v),(vi)}{=} \mathbf{0}$.

b) Es seien $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ und $B = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $A \times B = \mathbf{0}$, also mit $bz = cy \ \wedge \ cx = az \ \wedge \ ay = bx$. Es folgt $xA = aB \ \wedge \ yA = bB \ \wedge \ zA = cB$, also $B = \mathbf{0} \vee A \in \mathbb{R}B$ und damit die Abhängigkeit von A, B gemäß 14. □

Weiter zeigen wir nun

17. **Satz.** Ist $A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, so gibt es *unabhängige Vektoren* $B, D \in A^\perp$ *mit* $B \perp D$.

Beweis: Es sei $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$. Dann ist $A \perp (b, -a, 0), A \perp (c, 0, -a)$, und mithin existiert ein $B \in A^\perp \backslash \{\mathbf{0}\}$. Für $D := A \times B$ gilt nun $D \neq \mathbf{0}$ gemäß 15. und 16. mit $D \perp A \ \wedge \ D \perp B$. □

Im weiteren verwenden wir für $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ die Abkürzungen
$\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y := \{\alpha X + \beta Y \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ und
$\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z := \{\alpha X + \beta Y + \gamma Z \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Damit folgt:

18. **Lemma.** *Sind* $A, B, C \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ *mit* $B, C \in A^\perp$ *und* $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}C$, *so gilt:*

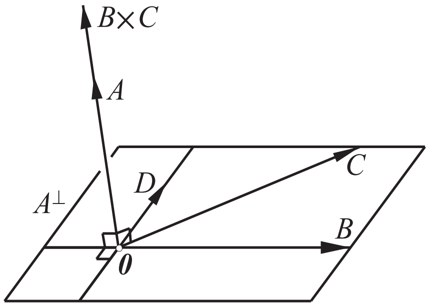
(i) Es ist $B^\perp \cap C^\perp = \mathbb{R}(B \times C) = \mathbb{R}A$.

(ii) Es ist $A^\perp \cap B^\perp \cap C^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) Zu jedem $X \in \mathbb{R}^3$ *gibt es genau ein Tripel* $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ *mit* $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$.

(iv) Es ist $A^\perp = \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$.

(v) Es ist $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$.



Beweis: (i): Ist $X \in B^\perp \cap C^\perp$, so ist $X \times (B \times C) \overset{5.(viii)}{=} (X \circ C) \cdot B - (X \circ B) \cdot C = \mathbf{0}$ wegen $X \circ C = X \circ B = 0$, und mit 14. und 16. ergibt sich $X \in \mathbb{R}(B \times C)$. Dann ist auch $A \in \mathbb{R}(B \times C)$, und mit 13.(i) und 15.(vii) folgt die Behauptung.
(ii): Nach 15.(iv) ist $\mathbf{0} \in A^\perp \cap B^\perp \cap C^\perp$. Ist $X \in A^\perp \cap B^\perp \cap C^\perp$, so gibt es nach (i) ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $X = \lambda A$, und mit 15.(v) folgt $X = \mathbf{0}$.

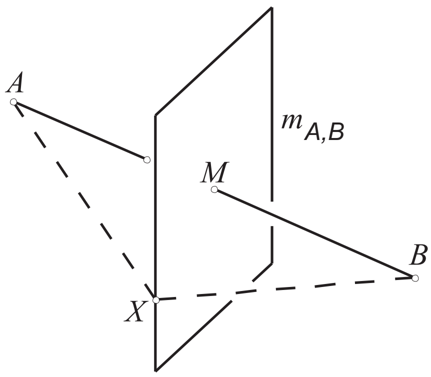
(iii),(v): Es sei $D := B \times (B \times C) \overset{5.(viii)}{=} (B \circ C) \cdot B - B^2 \cdot C$. Wegen $B^2 \neq 0$ ist $D \neq \mathbf{0}$ und $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}D$, und nach (i) und 16.(i) ist $D \in A^\perp \cap B^\perp$. Ist nun $X \in \mathbb{R}^3$ und ist $Y := \frac{A \circ X}{A^2} A + \frac{B \circ X}{B^2} B + \frac{D \circ X}{D^2} D$, so ist $(Y - X) \circ A = (Y - X) \circ B = (Y - X) \circ D = 0$, also $Y - X \in A^\perp \cap B^\perp \cap D^\perp$, und mit (ii), bezogen auf A, B, D anstelle von A, B, C, folgt $X = Y \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}D$, also auch $X \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$ wegen $D \in \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$.

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$ mit $\alpha A + \beta B + \gamma C = \alpha' A + \beta' B + \gamma' C$, so ist $(\alpha - \alpha')A + (\beta - \beta')B + (\gamma - \gamma')C = \mathbf{0}$. Multiplikation mit A liefert $(\alpha - \alpha') \cdot A^2 = 0$, also $\alpha = \alpha'$ wegen $A^2 \neq 0$, und dann führt $(\beta - \beta')B = (\gamma' - \gamma)C$ mit 14. auf $\beta = \beta' \ \wedge \ \gamma = \gamma'$, da B, C unabhängig sind.

(iv): Nach 15.(vi) ist $\mathbb{R}B + \mathbb{R}C \subseteq A^\perp$. Ist $X = \alpha A + \beta B + \gamma C \in A^\perp$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so führt $X \circ A = 0$ auf $\alpha = 0$, also auf $X \in \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$. Wegen (iii) gilt dann aber $A^\perp \subseteq \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$. □

D. Mittelsenkrechten und Ebenen

19. Der Begriff der *Ebene* läßt sich wie folgt auf den Begriff des Abstandes zurückführen:



Sind A, B zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^3$, so nennt man $\boxed{m_{A,B} := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid d(A, X) = d(X, B)\}}$ die **Mittelsenkrechte von** A, B**.**

Diese besteht aus allen Punkten X des Raumes, die von A und B den gleichen Abstand haben, und anschaulich muß es sich dann um die *Symmetrieebene* von A, B handeln.

Deshalb bezeichnen wir $m_{A,B}$ nun auch als die **Symmetrieebene** von A, B und nennen

$$\boxed{\mathbb{E}_3 := \{m_{A,B} \mid A, B \in \mathbb{R}^3 \ \wedge \ A \neq B\}}$$

die **Menge der Ebenen des** $\mathbb{R}^3$. Für $A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$ erhalten wir $X \in m_{A,B} \Leftrightarrow d(A, X) = d(X, B) \Leftrightarrow (A - X)^2 = (X - B)^2 \Leftrightarrow -2A \circ X + A^2 = -2B \circ X + B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 = 2(A - B) \circ X$, also

(i) $\boxed{X \in m_{A,B} \Leftrightarrow 2(A - B) \circ X = A^2 - B^2} \quad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$.

Der Punkt $\boxed{M := \frac{1}{2}(A + B)}$ liegt auf $m_{A,B}$, wie man durch Einsetzen in (i) sofort bestätigt, und wegen $M = A + \frac{1}{2}(B - A) \in [A, B]$ wird M nun auch der **Mittelpunkt der Strecke** $[A, B]$ genannt. Wir haben also

(ii) $\boxed{\frac{1}{2}(A + B) \in m_{A,B} \cap [A, B]}$ $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$.

Wegen $2(A - B) \circ X = A^2 - B^2 \ \Leftrightarrow\ (A - B) \circ X = \frac{1}{2}(A - B) \circ (A + B)$
$\Leftrightarrow\ (A - B) \circ (X - \frac{1}{2}(A + B)) = 0 \ \Leftrightarrow\ X - \frac{1}{2}(A + B) \perp (A - B)$ folgt

(iii) $\boxed{X \in m_{A,B} \ \Leftrightarrow\ X - \frac{1}{2}(A + B) \in (A - B)^\perp}$ $\forall\ A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $A \neq B$.

Dies bedeutet, daß wir alle Punkte von $m_{A,B}$ kennen, wenn wir alle Punkte von $(A - B)^\perp$ kennen.

Es ist

$$\boxed{(A - B)^\perp \in \mathbb{E}_3} \quad \forall\ A, B \in \mathbb{R} \text{ mit } A \neq B,$$

denn für $C := A - B$ gilt $m_{-C,C} = C^\perp$ gemäß (iii).

Wenn wir $2(A - B) =: (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ und $A^2 - B^2 =: d$ sowie $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ setzen, können wir (i) in der Form

(iv) $\boxed{X \in m_{A,B} \ \Leftrightarrow\ ax + by + cz = d}$

notieren. Die Gleichung in (iv) wird **lineare Gleichung in 3 Variablen** genannt. Jedes Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $ax + by + cz = d$ wird als eine Lösung dieser Gleichung bezeichnet. Die Gleichung heißt **homogen**, falls $(0, 0, 0)$ eine Lösung ist, sonst **inhomogen**.
Die Gleichung heißt **nichttrivial** genau dann, wenn $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ist, wenn also $a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0$ gilt.

Nach (iv) gehört zu jeder Ebene eine lineare Gleichung, deren Lösungsmenge diese Ebene ist. Wie steht es umgekehrt?

Wenn $r, s, t, u \in \mathbb{R}$ mit $(r, s, t) \neq (0, 0, 0)$ fest vorgegeben sind und wenn

$$L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid rx + sy + tz = u\}$$

ist, so setzen wir $C := (r, s, t)$ und $D := \frac{2u}{C^2} \cdot C$. Im Falle $u = 0$ ist offenbar $L = C^\perp \in \mathbb{E}_3$. Ist dagegen $u \neq 0$, so ist $D \neq \mathbf{0}$, und dann ist $X \in m_{D,\mathbf{0}} \overset{(i)}{\Leftrightarrow} 2D \circ X = D^2 \ \Leftrightarrow\ \frac{4u}{C^2} \cdot C \circ X =$
$= \frac{4u^2}{(C^2)^2} \cdot C^2 \ \Leftrightarrow\ C \circ X = u \ \Leftrightarrow\ X \in L,$ also $L = m_{D,\mathbf{0}} \in \mathbb{E}_3$.

Damit ist gezeigt:

20. **Satz.** *Die Ebenen des $\mathbb{R}^3$ sind die Lösungsmengen der nichttrivialen linearen Gleichungen in drei Variablen.*

In abelschen Gruppen bezeichnet man Rechtsnebenklassen einfach als *Nebenklassen*.
Damit folgt:

21. **Corollar 1.** *Es gilt* *(i)* $\boxed{\mathbb{E}_3 = \{D + A^\perp \mid D, A \in \mathbb{R}^3 \ \wedge\ A \neq \mathbf{0}\}}$,

d.h. die Ebenen sind die (additiven) Nebenklassen der Untergruppen $A^\perp$ von $\mathbb{R}^3(+)$ für $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Für $A, B \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ *und* $D, E \in \mathbb{R}^3$ *gilt außerdem:*

(ii) $E \in D + A^\perp \;\Leftrightarrow\; E + A^\perp = D + A^\perp \;\Leftrightarrow\; (E + A^\perp) \cap (D + A^\perp) \neq \emptyset.$

(iii) $D + A^\perp = D + B^\perp \;\Leftrightarrow\; A^\perp = B^\perp \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R}A = \mathbb{R}B.$

Beweis: Nach 19.(iii) ist jede Ebene in der Form $D + A^\perp$ mit $D, A \in \mathbb{R}^3 \;\wedge\; A \neq \mathbf{0}$ darstellbar. Sind $E, B \in \mathbb{R}^3$ mit $B \neq \mathbf{0}$, so ist $X \in E + B^\perp \;\Leftrightarrow\; X - E \in B^\perp \;\Leftrightarrow\; B \circ X = B \circ E$ für $X \in \mathbb{R}^3$. Da $B \circ X = B \circ E$ eine nichttriviale lineare Gleichung in 3 Variablen ist, führt 20. auf $E + B^\perp \in \mathbb{E}_3$. Damit ist (i) gezeigt.
Die Aussage (ii) folgt aus 7.19..
(iii): Ist $D+A^\perp = D+B^\perp$, so ist $(X \in A^\perp \;\Leftrightarrow\; X+D \in D+A^\perp = D+B^\perp \;\Leftrightarrow\; X \in B^\perp)$ $\forall\, X \in \mathbb{R}^3$, und folglich ist $D+A^\perp = D+B^\perp \;\Leftrightarrow\; A^\perp = B^\perp \overset{17.,18.}{\Leftrightarrow} \mathbb{R}A = \mathbb{R}B.$ □

22. **Corollar 2.** *Die Ebenen des* $\mathbb{R}^3$ *sind die Mengen des Typs*

$$(*) \quad \boxed{D + \mathbb{R}B + \mathbb{R}C := \{D + \lambda B + \mu C \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}},$$

wobei B, C *unabhängige Vektoren des* $\mathbb{R}^3$ *sind und* $D \in \mathbb{R}^3$ *ist.*

Jede Ebene enthält nichtkollineare Punkte.

Beweis: a) Nach 21. sind die Ebenen die Mengen des Typs $D + A^\perp$ mit $A, D \in \mathbb{R}^3$ und $A \neq \mathbf{0}$. Sind $B, C \in A^\perp$ unabhängig gemäß 17. gewählt, so führt 18. auf $A^\perp = \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$ und damit auf die Darstellung $(*)$. Nach 14.(iii) sind $D, D + B, D + C$ nichtkollineare Punkte von $D + A^\perp$.

b) Sind $E, F \in \mathbb{R}^3$ unabhängig, so ist $\mathbb{R}E + \mathbb{R}F \overset{18.}{=} (E \times F)^\perp$, also $D + \mathbb{R}E + \mathbb{R}F = D + (E \times F)^\perp \in \mathbb{E}_3$. □

23. *Bemerkung.* Die Darstellung $(*)$ in 22. für Ebenen wird als **Parameterdarstellung** *mit den „laufenden“ Parametern* λ, μ bezeichnet. Während wir bei Geraden stets *einen* Parameter haben, benötigen wir für die Darstellung der Punkte einer Ebene stets *zwei* Parameter. Wir erhalten nun

24. **Satz**. *Drei nichtkollineare Punkte* B, C, D *des* $\mathbb{R}^3$ *liegen stets in genau einer Ebene des* $\mathbb{R}^3$. *Diese wird die von* B, C, D **aufgespannte Ebene** $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle$ *genannt.*

Beweis: B, C, D seien nichtkollineare Punkte des $\mathbb{R}^3$. Nach 14.(iii) sind $E := B - D$ und $F := C - D$ unabhängig, und mit 22. führt $B = D + E \;\wedge\; C = D + F$ auf $B, C, D \in \delta := = D + \mathbb{R}E + \mathbb{R}F \overset{18.}{=} D + (E \times F)^\perp \in \mathbb{E}_3$. Ist $\varepsilon := D + A^\perp$ eine weitere Ebene durch D, B, C (vgl.21.), so sind $E, F \in A^\perp$, und mit 18. folgt $A^\perp = (E \times F)^\perp$, also $\varepsilon = \delta$. □

Als wichtige Beziehung zwischen Geraden und Ebenen zeigen wir

25. **Satz.** *Für* $g \in \mathbb{G}_3$ *und* $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ *gilt:*

(i) $|g \cap \varepsilon| \geq 2 \;\Rightarrow\; g \subseteq \varepsilon.$

(ii) $g \not\subseteq \varepsilon \;\Rightarrow\; |g \cap \varepsilon| \leq 1.$

Beweis: Sind $D, E \in g \cap \varepsilon$ mit $D \neq E$ und ist $\varepsilon = D + A^\perp$ gemäß 21. mit $A \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, so führt $E \in \varepsilon$ auf $E - D \in A^\perp$. Nach 15.(vi) ist $\mathbb{R}(E - D) \subseteq A^\perp$, und damit folgt $g \overset{12.}{=} \langle D, E \rangle = D + \mathbb{R}(E - D) \subseteq D + A^\perp = \varepsilon$. Damit ist (i) gezeigt, und (ii) ergibt sich durch logische Kontraposition. □

E. Parallelität von Geraden und Ebenen

26. Die Parallelität von Geraden wird im Raum anders als in der Ebene festgelegt:

a) Sind g, h Geraden des $\mathbb{R}^3$ mit $\boxed{g \cap h = \emptyset}$, so heißen diese **parallel**, falls sie gemeinsam in einer Ebene liegen, sonst **windschief**.

b) Sind g, h Geraden des $\mathbb{R}^3$ mit $\boxed{g \cap h \neq \emptyset}$, so werden diese **parallel** im Falle $g = h$ und sonst **schneidend** genannt.

Nach 12. haben schneidende Geraden stets genau einen Punkt gemeinsam.

c) Zwei Ebenen δ, ε des $\mathbb{R}^3$ heißen **parallel**, wenn $\delta = \varepsilon \vee \delta \cap \varepsilon = \emptyset$ gilt, andernfalls schneidend.

d) Eine Gerade $g \in \mathbb{G}_3$ und eine Ebene $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ werden **parallel** im Falle $g \subseteq \varepsilon \vee g \cap \varepsilon = \emptyset$ genannt und **schneidend** im verbleibenden Fall $|g \cap \varepsilon| = 1$ (vgl. 25.).

e) Sind x, y parallele Objekte des $\mathbb{R}^3$, so wird dies in der Form $x \parallel y$ notiert. Das Symbol $\nparallel$ steht für die *Negation* von $\parallel$.

Wir zeigen zunächst

27. **Satz**. *Sind die Geraden $g, h \in \mathbb{G}_3$ in der Form* $\boxed{g = A + \mathbb{R}B}$ *und* $\boxed{h = C + \mathbb{R}D}$ *mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ und $B, D \neq \mathbf{0}$ gegeben, so gilt:* $\boxed{g \parallel h \;\Leftrightarrow\; \mathbb{R}B = \mathbb{R}D}$.

Nichtparallele Geraden einer Ebene schneiden sich stets.

Beweis: 1) Es sei $\mathbb{R}B = \mathbb{R}D$. a) Ist $C \in g$, so ist $g \overset{13.}{=} C + \mathbb{R}B = h$. b) Ist $C \notin g$, so sind $C - A, B$ unabhängig, und nach 7.19. gilt $g \cap h = \emptyset$. Wegen $g \cup h = (A + \mathbb{R}B) \cup (C + \mathbb{R}B) \subseteq$ $\subseteq A + \mathbb{R}(C - A) + \mathbb{R}B \overset{22.}{\in} \mathbb{E}_3$ haben wir dann $g \parallel h$.

2) Es sei $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}D$, und es gebe ein $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ mit $g \cup h \subseteq \varepsilon$. Ist $\varepsilon = E + F^\perp$ mit $E, F \in \mathbb{R}^3 \wedge F \neq \mathbf{0}$ (vgl. 21.), so folgt $\varepsilon \overset{21.}{=} A + F^\perp \supseteq A + \mathbb{R}B \wedge \varepsilon \overset{21.}{=} C + F^\perp \supseteq C + \mathbb{R}D$, also $B, D \in F^\perp$. Mit 18. erhalten wir $F^\perp = \mathbb{R}B + \mathbb{R}D$. Wegen $C \in \varepsilon = A + F^\perp$ ist $C - A \in F^\perp$, d.h. es gibt $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $C - A = \lambda B + (-\mu)D$, und dann ist $A + \lambda B = C + \mu D \in g \cap h$. Nach 13. ist $g \neq h$, also $|g \cap h| = 1$ gemäß 12. und damit $g \nparallel h$. $\square$

28. *Bemerkung.* Wird die Gerade $g \in \mathbb{G}_3$ in der Form $g = A + \mathbb{R}B$ mit $A, B \in \mathbb{R}^3 \wedge B \neq \mathbf{0}$ dargestellt, so nennt man A auch einen **Aufpunkt** von g und B einen **Richtungsvektor** von g. Nach 27. sind Geraden *genau dann parallel*, wenn sie *abhängige Richtungsvektoren* haben.

In Analogie zu 9.17.–9.19. zeigen wir nun

29. **Satz**. *Zu $A \in \mathbb{R}^3$ und $h \in \mathbb{G}_3$ gibt es stets genau ein $h \in \mathbb{G}_3$ mit $A \in h' \;\wedge\; h \parallel h'$. Man nennt h'* **die Parallele durch** A **zu** h *und notiert h' in der Form $(A \parallel h)$.*

Die Parallelität „$\parallel$“, bezogen auf $\mathbb{G}_3$, ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen **Parallelbüschel**. *Man nennt $(g\|) := \{h \in \mathbb{G}_3 \mid h \parallel g\}$ für $g \in \mathbb{G}_3$ das* **Parallelbüschel in Richtung** g.

Beweis: Ist $h = C + \mathbb{R}D$ mit $C, D \in \mathbb{R}^3 \;\wedge\; D \neq \mathbf{0}$, so führen 13. (vi) und 27. zwangsläufig auf $h' = A + \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; h' \ni A \;\wedge\; h' \parallel h$. Nach 27. ist „$\parallel$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{G}_3$. $\square$

Weiter erhalten wir

30. **Satz.** *Sind* $g, h \in \mathbb{G}_3$ *mit* $|g \cap h| = 1$ *oder mit* $g \neq h \ \wedge\ g \parallel h$, *so gibt es genau eine Ebene* $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ *mit* $g \cup h \subseteq \varepsilon$.
Man notiert ε *als* $\langle g \cup h\rangle$ *und nennt* ε *die von* g *und* h **aufgespannte Ebene**.

Beweis: Ist $g \cap h = \{A\}$ mit $A \in \mathbb{R}^3$ und sind $B \in g\backslash\{A\}, C \in h\backslash\{A\}$, so geht durch A, B, C nach 24. genau eine Ebene, und diese enthält $g \cup h$ gemäß 25.
Ist $g \parallel h$, ist also $g \cap h = \emptyset$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ mit $g \cup h \subseteq \varepsilon$, so folgt $\varepsilon = \langle A, B, C\rangle$ für $A \in g$ und $B, C \in h$ mit $B \neq C$ (vgl. 24.). $\square$

31. Im $\mathbb{R}^3$ werden **Parallelogramme** genau wie in $\mathbb{R}^2$ definiert, also gemäß 9.19 d). Mit 24., 30. und 27. folgt dann für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\sharp\,(A, B, C, D) \ \Leftrightarrow\ A, B, C, D \text{ sind nichtkollinear mit } A - B + C = D}.$$

Demnach gilt der Parallelogrammergänzungssatz 9.20. auch für den $\mathbb{R}^3$, und damit läßt sich insbesondere die Korrekheit der Figuren aus 2. und 6. bestätigen.

Wir zeigen nun

32. **Satz.** *Für* $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ *mit* $B, D \neq \mathbf{0}$ *gilt:*

(i) $\mathbb{R}B = \mathbb{R}D \quad \Leftrightarrow \quad (A + B^\perp) \parallel (C + D^\perp)$,
(ii) $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}D \quad \Leftrightarrow \quad (A + B^\perp) \cap (C + D^\perp) \in \mathbb{G}_3$,
(iii) $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}D \quad \Rightarrow \quad (A + B^\perp) \cap (C + D^\perp) \parallel \mathbb{R}(B \times D)$,
(iv) $B \in D^\perp \quad \Leftrightarrow \quad (A + \mathbb{R}B) \parallel (C + D^\perp)$,
(iv) $B \notin D^\perp \quad \Leftrightarrow \quad |(A + \mathbb{R}B) \cap (C + D^\perp)| = 1$.

Beweis: a) Ist $\mathbb{R}B = \mathbb{R}D$, so ist $B^\perp = D^\perp$ gemäß 21.(iii), und mit 21.(ii) folgt $A + B^\perp = A + D^\perp \parallel C + D^\perp$.

b) Ist $\mathbb{R}B \neq \mathbb{R}D$, so führt 7.(iv) auf $\det((B^2, B \circ D), (B \circ D, D^2)) = B^2 \cdot D^2 - (B \circ D)^2 \neq 0$, und nach 9.15 gibt es dann $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\beta{\cdot}B^2 + \delta{\cdot}(B \circ D) = A \circ B \wedge \beta{\cdot}(B \circ D) + \delta{\cdot}D^2 = C \circ D$. Für $U := \beta B + \delta D$ bedeutet dies $U \circ B = A \circ B$ und $U \circ D = C \circ D$, und für $X \in \mathbb{R}^3$ folgt dann $\quad X \in (A + B^\perp) \cap (C + D^\perp) \ \Leftrightarrow\ X - A \in B^\perp \ \wedge\ X - C \in D^\perp$
$\Leftrightarrow\ X \circ B = A \circ B \ \wedge\ X \circ D = C \circ D \ \Leftrightarrow\ X \circ B = U \circ B \ \wedge\ X \circ D = U \circ D$
$\Leftrightarrow\ X - U \in B^\perp \cap D^\perp \overset{18.}{=} \mathbb{R}(B \times D) \ \Leftrightarrow\ X \in U + \mathbb{R}(B \times D)$.

c) Ist $B \in D^\perp$, so ist $A + \mathbb{R}B \subseteq A + D^\perp \parallel C + D^\perp$ gemäß 21. und a).

d) Ist $B \notin D^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $(A + \lambda B \in C + D^\perp \ \Leftrightarrow\ (A + \lambda B - C) \circ D = 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ \lambda{\cdot}(B \circ D) = (C - A) \circ D \ \Leftrightarrow\ \lambda = ((C - A) \circ D)/(B \circ D))$, also $|(A + \mathbb{R}B) \cap (C + D^\perp)| = 1$.

e) Mit a) – d) ist alles gezeigt. $\square$

33. **Corollar.** *Sind* $\delta, \varepsilon \in \mathbb{E}_3$ *und* $g \in \mathbb{G}_3$, *so gilt:*

(i) $\delta \cap \varepsilon = \emptyset \vee \delta \cap \varepsilon \in \mathbb{G}_3 \vee \delta = \varepsilon$,
(ii) $g \cap \varepsilon = \emptyset \vee |g \cap \varepsilon| = 1 \vee g \subset \varepsilon$.

F. Systeme von linearen Gleichungen mit drei Variablen

34. Es sei $r \in \mathbb{N}$. Sind für $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ genau r Gleichungen der Form $\boxed{A_i \circ X = a_i}$ mit $A_i \in \mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $i \in \{1, \ldots, r\}$ ist, so wird dies ein *System von r linearen Gleichungen mit den Variablen* x, y, z genannt.

Nach 19.(iv) ist die Lösungsmenge jeder Einzelgleichung $A_i \circ X = a_i$ für $i \in \{1, \ldots, r\}$ eine Ebene ε_i des $\mathbb{R}^3$, und der Durchschnitt $\boxed{\mathcal{L} := \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \cdots \cap \varepsilon_r}$ wird die **Lösungsmenge** *des Gleichungssystems* genannt.

a) Sind $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und sind A_i, A_j abhängig, so führt 32.(i) auf $\varepsilon_i \parallel \varepsilon_j$. Im Falle $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ kann eine der Gleichungen gestrichen werden, und im Falle $\varepsilon_i \cap \varepsilon_j = \emptyset$ ist $\mathcal{L} = \emptyset$.

Deshalb gehen wir im weiteren davon aus, daß je zwei der Vektoren $A_1, \ldots, A_r$ unabhängig sind.

b) Wird eine der Gleichungen mit einem Faktor $\alpha \in \mathbb{R}^*$ multipliziert, so bewirkt dies keine Änderung von $\mathcal{L}$, denn für $i \in \{1, \ldots, r\}$ ist $A_i \circ X = a_i \;\Leftrightarrow\; \alpha \cdot (A_i \circ X) = \alpha \cdot a_i \;\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\; (\alpha \cdot A_i) \circ X = \alpha a_i$.

c) Sind $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}^*$, so kann die Gleichung

$$\boxed{A_j \circ X = a_j} \quad \text{ersetzt werden durch} \quad \boxed{(A_j + \alpha A_i) \circ X = (a_j + \alpha a_i)},$$

ohne daß sich $\mathcal{L}$ ändert, denn in der Tat gilt

$$A_i \circ X = a_i \;\wedge\; A_j \circ X = a_j \;\Rightarrow\; A_i \circ X = a_i \;\wedge\; (A_j + \alpha A_i) \circ X = (a_j + \alpha a_i) \quad \text{sowie}$$
$$A_i \circ X = a_i \;\wedge\; (A_j + \alpha A_i) \circ X = (a_j + \alpha a_i) \;\Rightarrow\; A_i \circ X = a_i \;\wedge\; A_j \circ X = a_j,$$

da man bei einer Gleichung auf beiden Seiten Gleiches addieren oder auch subtrahieren darf.

d) Beachtet man noch, daß man in einer Gleichung stets Gleiches durch Gleiches ersetzen darf, so hat man mit b) und c) eine Begründung für die aus der Schule bekannten Verfahren mit dem Namen *Additionsmethode, Subtraktionsmethode, Einsetzungsmethode*, und in der Tat läßt sich $\mathcal{L}$ mit diesen Methoden stets bestimmen.

Solange wir es nur mit drei Variablen zu tun haben, lohnt es sich nicht, eine „allgemeine Lösungstheorie" zu entwickeln, und bei einer größeren Variablenzahl wird man ohnehin einen Computer einsetzen. Deshalb seien hier lediglich zwei *Beispiele* vorgeführt:

e) Bestimmung der Lösungsmenge $\mathcal{L}_{I,II}$ von

$$I: \quad \boxed{3x + 4y + 5z = 6} \quad \wedge \quad II: \quad \boxed{2x + 3y + 4z = 5}:$$

Ersetzen von I durch I–II liefert

$$III: \quad x + y + z = 1 \quad \wedge \quad II: \quad 2x + 3y + 4z = 5$$

Durch Auflösung von III nach x und Einsetzen in II entsteht

$$IV: \quad x = 1 - y - z \quad \wedge \quad V: \quad y = 3 - 2z,$$

und durch Einsetzen von V in IV folgt

$$VI: \quad \boxed{x = z - 2} \quad \wedge \quad V: \quad \boxed{y = 3 - 2z}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,II} &= \{(z-2, 3-2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2,3,0) + z \cdot (1,-2,1) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= (-2,3,0) + \mathbb{R}(1,-2,1) \in \mathbb{G}_3. \end{aligned}$$

Man beachte, daß die Darstellung von $\mathcal{L}_{I,II}$ nicht eindeutig ist;
z.B. ist $\mathcal{L}_{I,II} = (-1,1,1) + \mathbb{R}(2,-4,2)$ (warum ?).

f) Sind neben den Gleichungen I,II aus e) noch die Gleichungen

$$IX: \quad \boxed{x+2y+z=2} \quad \wedge \quad X: \quad \boxed{x+2y+3z=4}$$

gegeben, so kann man die entsprechenden Lösungsmengen aus der ersten Darstellung von $\mathcal{L}_{I,II}$ in e) leicht herleiten: Es ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{I,II,IX} &= \{(z-2, 3-2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \ \wedge \ (z-2)+2(3-2z)+z=2\} \\
&= \{(z-2, 3-2z, z) \mid z = 1\} = \{(-1,1,1)\}, \\
\mathcal{L}_{I,II,X} &= \{(z-2, 3-2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \ \wedge \ (z-2)+2(3-2z)+3z=4\} \\
&= \{(z-2, 3-2z, z) \mid z \in \mathbb{R} \ \wedge \ 0 \cdot z = 0\} = \mathcal{L}_{I,II} \\
\text{und} \qquad & \mathcal{L}_{I,II,IX,X} = \mathcal{L}_{I,II} \cap \mathcal{L}_{I,II,IX} = \{(-1,1,1)\}.
\end{aligned}$$

G. Determinanten und Unabhängigkeit von drei Vektoren

Wir benötigen die folgende Begriffsbildung:

35. Sind $a,b,c,d,e,f,g,h,k \in \mathbb{R}$ und sind $A := (a,b,c)$, $B := (d,e,f)$, $C := (g,h,k)$, so wird die reelle Zahl

(i) $$\det(A,B,C) := \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} := a \cdot \begin{vmatrix} e & h \\ f & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & g \\ f & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$$

die **Determinante** von (A,B,C) genannt.

Ausgehend von dem Schema $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}$ kann man sich die Berechnungsformel merken, indem man (in Gedanken) als Faktor für a bzw. b bzw. c im Schema streicht, was in der zu a bzw. b bzw. c gehörigen Zeile und Spalte liegt, und vom Rest die Determinante bildet:

$$a \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{d} & \cancel{g} \\ \cancel{b} & e & h \\ \cancel{c} & f & k \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & d & g \\ \cancel{b} & \cancel{e} & \cancel{h} \\ \cancel{c} & f & k \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a} & d & g \\ \cancel{b} & e & h \\ \cancel{c} & \cancel{f} & \cancel{k} \end{vmatrix}$$

Dabei ist mit den Vorzeichen gemäß „$+ \ - \ +$“ zu verfahren.

Wir erhalten

(ii) $$\det(A,B,C) \begin{aligned} &= (aek-ahf)-(bdk-bgf)+(cdh-cge) \ = \\ &= (aek-afh)-(dbk-dch)+(gbf-gce) \ = \end{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix},$$

d.h. es ist *gleichgültig*, ob man A, B, C (in dieser Reihenfolge) in das Schema als *Zeilen* oder als *Spalten* einträgt. Weiter folgt gemäß
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \arrow[dl] \\ C \arrow[u] & \end{tikzcd} :$$

(iii) $$\boxed{\det(A,B,C) = \det(B,C,A) = \det(C,A,B)},$$

denn es ist $\det(B,C,A) = (dhc-dbk)-(egc-eak)+(fgb-fah) = \det(A,B,C)$, d.h. die erste Gleichung gilt, und dies impliziert die zweite.

Aus (i) und 5. ergibt sich

(iv) $$\boxed{\det(A,B,C) = A \circ (B \times C)},$$

d.h. *die Determinate läßt sich durch Skalarprodukt und Kreuzprodukt berechnen!*

Mit (iii), (iv), 4. und 5. erhalten wir dann gemäß $\begin{tikzcd} A \arrow[dr] & & B \arrow[ll] \\ & C \arrow[ur] & \end{tikzcd}$:

(v) $\boxed{\det(A,B,C) = -\det(A,C,B) = -\det(B,A,C) = -\det(C,B,A)}$.

Man sagt, det *ist linear in jeder Komponente*, denn mit (iv), 4. und 5. ergibt sich

(vi)
$$\begin{aligned}
\det(\alpha A + \beta A', B, C) &= \alpha \cdot \det(A,B,C) + \beta \cdot \det(A',B,C),\\
\det(A, \alpha B + \beta B', C) &= \alpha \cdot \det(A,B,C) + \beta \cdot \det(A,B',C),\\
\det(A, B, \alpha C + \beta C') &= \alpha \cdot \det(A,B,C) + \beta \cdot \det(A,B,C')
\end{aligned}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $A', B', C' \in \mathbb{R}^3$. Aus (i), (iii),(iv) und 5.(vii) folgt

(vii) $\boxed{\det(A,A,B) = \det(A,B,A) = \det(B,A,A) = 0}$ sowie

(viii) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & k \end{vmatrix} = aek \;\wedge\; \begin{vmatrix} a & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = aek.$

36. Um etwas über die geometrische Bedeutung des Determinantenbegriffes für den $\mathbb{R}^3$ zu erfahren, setzen wir fest:

Punkte des $\mathbb{R}^3$ heißen **komplanar**, wenn sie gemeinsam einer Ebene angehören, sonst **nichtkomplanar**.

Drei *Vektoren* A, B, C des $\mathbb{R}^3$ heißen **(linear) unabhängig**,
wenn die vier Punkte $\mathbf{0}, A, B, C$ *nichtkomplanar* sind;
andernfalls werden A, B, C **(linear) abhängig** genannt.

Bemerkung. Die Vektoren $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann *abhängig*, wenn

(i) $\boxed{\mathbf{0} \in \{A,B,C\} \;\vee\; A \in \mathbb{R}B \;\vee\; C \in \mathbb{R}A + \mathbb{R}B}$

gilt, und genau dann *unabhängig*, wenn

(ii) $\boxed{\mathbf{0} \notin \{A,B,C\} \;\wedge\; A \notin \mathbb{R}B \;\wedge\; C \notin \mathbb{R}A + \mathbb{R}B}$

gilt, denn im Falle (i) bzw. (ii) sind $\mathbf{0}, A, B, C$ nach 22., 24., 25.(i) komplanar bzw. nichtkomplanar.

Als wichtig erweist sich nun

37. **Satz** *Für $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ gilt:*
A, B, C sind genau dann $\boxed{\textit{unabhängig}}$, *wenn* $\boxed{\det(A,B,C) \neq 0}$ *ist.*

Beweis: Nach 35.(iv) und 4.,5.,18. ist
$\det(A,B,C) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; A \circ (B \times C) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{0} \notin \{A,B,C\} \;\wedge\; B \notin \mathbb{R}C \;\wedge\; A \notin \mathbb{R}B + \mathbb{R}C$,
und mit 36.(ii) folgt dann die Behauptung. □

Damit gelangen wir zu

38. **Cramersche Regel** *(1. Fassung) Sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ mit* $\det(A,B,C) \neq 0$ *vorgegeben, so existiert genau ein Tripel $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit* $\boxed{x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C = D}$. *Es gilt*

$$(*) \qquad \boxed{x = \frac{\det(D,B,C)}{\det(A,B,C)} \;\wedge\; y = \frac{\det(A,D,C)}{\det(A,B,C)} \;\wedge\; z = \frac{\det(A,B,D)}{\det(A,B,C)}}.$$

Beweis: a) *Existenz:* Es sei $E := A \times B$. Nach 18.(iii) gibt es $a, b, c, u, v, w \in \mathbb{R}$ mit $C = aA + bB + cE$ und $D = uA + vB + wE$. Wegen 37. ist $C \notin \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, also $c \neq 0$. Es folgt $E = -\frac{a}{c}A - \frac{b}{c}B + \frac{1}{c}C$ und damit $D = \big(u - \frac{a}{c}w\big)A + \big(v - \frac{b}{c}w\big)B + \frac{w}{c}C$.
b) *Eindeutigkeit:* Ist $D = xA + yB + zC$, so führen 35.(vi) und 35.(vii) auf $\det(D, B, C) = x \cdot \det(A, B, C) \wedge \det(A, D, C) = y \cdot \det(A, B, C) \wedge \det(A, B, D) = z \cdot \det(A, B, C)$, d.h. x, y, z sind wie angegeben festgelegt. □

39. **Cramersche Regel** *(2. Fassung). Sind* $a, b, c, d, e, f, g, h, k, r, s, t \in \mathbb{R}$ *vorgegeben und ist* $\boxed{\det(A, B, C) \neq 0}$ *für* $A := (a, b, c), B := (d, e, f), C := (g, h, k)$, *so hat das Gleichungssystem*

$$(\Delta) \qquad \boxed{\begin{array}{ccccccc} x \cdot a & + & y \cdot d & + & z \cdot g & = & r \\ x \cdot b & + & y \cdot e & + & z \cdot h & = & s \\ x \cdot c & + & y \cdot f & + & z \cdot k & = & t \end{array}}$$

genau eine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Für* $D := (r, s, t)$ *ist diese durch* 38.(∗) *gegeben.*

Beweis: Wegen $(\Delta) \Leftrightarrow xA + yB + zC = D$ folgt die Behauptung aus 38. □

40. **Corollar.** *Für* $i \in \{1, 2, 3\}$ *sei* ε_i *eine Ebene mit der Gleichung* $A_i \circ X = a_i$, *wobei* $A_i \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ *und* $a_i \in \mathbb{R}$ *ist. Dann gilt:*
Es ist $|\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3| = 1$ *genau dann, wenn* $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$ *ist.*

Beweis: Ist $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, so führt 35.(ii) mit 39. auf $|\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3| = 1$. Ist $\det(A_1, A_2, A_3) = 0$, so führen 37.,36.(i) und 32. auf $|\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3| \neq 1$. □

H. Orthogonalität von Geraden und Ebenen

Bisher haben wir lediglich die Orthogonalität von Vektoren betrachtet, also von Pfeilen, die im Ursprung ansetzen. Dieses Konzept läßt sich mit Blick auf 28. und 32. wie folgt erweitern:

41. Sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ mit $B, D \neq \mathbf{0}$, so nennen wir die Geraden $\boxed{g = A + \mathbb{R}B}$ und $\boxed{h = C + \mathbb{R}D}$ **senkrecht** oder **orthogonal**, im Zeichen: $g \perp h$, wenn sie orthogonale Richtungsvektoren besitzen und sich treffen, d.h. wir gehen von

(i) $\boxed{g \perp h :\Leftrightarrow\ B \perp D \ \wedge\ g \cap h \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ h \perp g}$

aus. Nach 15.(v) und 27. sind orthogonale Geraden niemals parallel, und mithin gilt

(ii) $\boxed{g \perp h \ \Rightarrow\ |g \cap h| = 1}$.

Nach 30. und (ii) spannen orthogonale Geraden stets eine Ebene auf.

Die Gerade $\boxed{g = A + \mathbb{R}B}$ und die Ebene $\boxed{\varepsilon = C + D^{\perp}}$ heißen **senkrecht** oder **orthogonal**, in Zeichen: $g \perp \varepsilon$ oder $\varepsilon \perp g$, wenn es in ε wenigstens zwei nichtparallele Geraden gibt, die auf g senkrecht stehen.

Gemäß 18. und 32.(iv) bedeutet dies

(iii) $\boxed{g \perp \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \mathbb{R}B = \mathbb{R}D}$,

und mit 27. und 32. folgt:

(iv) $\boxed{g \perp \varepsilon \ \Rightarrow\ |g \cap \varepsilon| = 1}$,

(v) $\boxed{g \perp \varepsilon \;\Rightarrow\; (h \parallel g \;\Leftrightarrow\; h \perp \varepsilon) \quad \forall\, h \in \mathbb{G}_3}$,

(vi) $\boxed{g \perp \varepsilon \;\Rightarrow\; (\alpha \parallel \varepsilon \;\Leftrightarrow\; g \perp \alpha) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{E}_3}$.

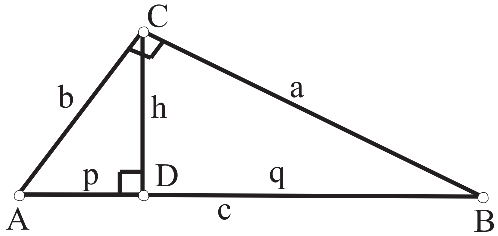
Die Ebenen $\boxed{\delta = A + B^{\perp}}$ und $\boxed{\varepsilon = C + D^{\perp}}$ heißen **senkrecht** oder **orthogonal**, in Zeichen: $\delta \perp \varepsilon$, wenn es in δ eine Gerade h mit $h \perp \varepsilon$ gibt. Mit (iii) und 32. folgt

(vii) $\boxed{\delta \perp \varepsilon \;\Leftrightarrow\; B \perp D \;\Leftrightarrow\; \varepsilon \perp \delta}$,

und wieder mit 32. dann

(viii) $\boxed{\delta \perp \varepsilon \;\Rightarrow\; \delta \cap \varepsilon \in \mathbb{G}_3}$.

Als besonders wichtig erweisen sich die folgenden Aussagen, die Verbindungen zwischen Distanz und Orthogonalität aufzeigen:



42. *Sind $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ mit $|\{A, B, C\}| = 3$ und ist $a = |B-C|$, $b = |C-A|$, $c = |A-B|$, so gilt*

(i) **Satz des Pythagoras.**

$$\boxed{\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 = c^2}.$$

Wenn $D \in \langle A,B\rangle$ mit $D \neq C \wedge \langle A,B\rangle \perp \langle C, D\rangle$ ist, so gibt es ein $p \in \mathbb{R}$ mit $D = A + \frac{p}{c}(B-A)$, und für $q := c-p$ und $h := |C-D|$ folgt $|p| = |A-D|$, $|q| = |B-D|$ sowie

(ii) **1. Kathetensatz des Euklid.** $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; a^2 = q \cdot c$.

(iii) **2. Kathetensatz des Euklid.** $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; b^2 = p \cdot c$.

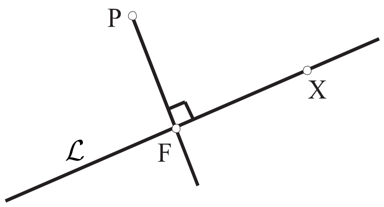
(iv) **1. Höhensatz des Euklid.** $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; h^2 = p \cdot q$.

(v) **2. Höhensatz des Euklid.** $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; a^{-2} + b^{-2} = h^{-2} \wedge D \in]A, B[$.

(vi) **Flächensatz des Euklid.** $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; a \cdot b = c \cdot h$.

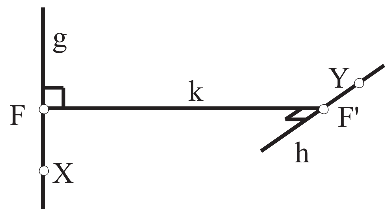
Beweis: (i): Es ist $\langle A, C\rangle \perp \langle C, B\rangle \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot (A-C) \circ (C-B) = 0 \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; [(A-C)+(C-B)]^2 = (A-C)^2 + (C-B)^2 \;\Leftrightarrow\; c^2 = b^2 + a^2$.

(ii) – (vi): Es ist $D = B + \frac{q}{c}(A-B)$ und damit $(\, p>0 \wedge q>0 \overset{10.10.}{\Leftrightarrow} D \in]A, B[\,)$. Überdies gilt $|A-D| = |p|$ und $|B-D| = |q|$, also auch $(*)$ $p+q = c \wedge a^2 \overset{(i)}{=} q^2+h^2 \wedge b^2 \overset{(i)}{=} p^2+h^2$. Damit folgt $[\, \langle A,C\rangle \perp \langle C,B\rangle \overset{(i)}{\Leftrightarrow} a^2+b^2 = c^2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} q^2+h^2+p^2+h^2 = (p+q)^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 = pq\,]$, $[\, h^2 = pq \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a^2 = q^2+pq \overset{(*)}{\Leftrightarrow} a^2 = qc \;\Rightarrow\; q>0\,]$, $[\, h^2 = pq \overset{(*)}{\Leftrightarrow} b^2 = p^2+pq \overset{(*)}{\Leftrightarrow} b^2 = pc \;\Rightarrow\; p>0\,]$, $[\, h^2 = pq \overset{p,q>0}{\Leftrightarrow} h^4 = p^2 \cdot q^2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} h^4 = (b^2-h^2)\cdot(a^2-h^2) \Leftrightarrow (b^2+a^2)\cdot h^2 = a^2 b^2 \Leftrightarrow a^{-2}+b^{-2} = h^{-2}\,]$, $[\, h^2 = pq \;\Leftrightarrow\; (qp-h^2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; q^2p^2+h^4 = 2qp\cdot h^2 \;\Leftrightarrow\; (q^2+h^2)\cdot(p^2+h^2) = (q+p)^2\cdot h^2 \;\Leftrightarrow$ $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} a^2b^2 = c^2h^2 \;\Leftrightarrow\; a\cdot b = c\cdot h\,]$. $\square$



43. **Satz.** *Sind $P \in \mathbb{R}^3$ und $\mathcal{L} \in \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{E}_3$ mit $P \notin \mathcal{L}$, so gibt es genau ein $F \in \mathcal{L}$ mit $\langle P, F\rangle \perp \mathcal{L}$. Für $X \in \mathcal{L}\backslash\{F\}$ ist $|P-F| < |P-X|$. Man nennt $\langle P, F\rangle$ das* **Lot von** *P* **auf** *$\mathcal{L}$, und F heißt* **Fußpunkt** *dieses Lotes. Die Zahl $|P-F|$ wird als der* **Abstand** *von P und $\mathcal{L}$ bezeichnet.*

Beweis: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^3$ mit $B \neq \mathbf{0}$. Ist $\mathcal{L} = A + \mathbb{R}B$ und $F := A + \lambda B \in \mathcal{L}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $(\langle P, F\rangle \perp \mathcal{L} \;\Leftrightarrow\; (P-F)\circ B = 0 \;\Leftrightarrow\; (P-A-\lambda B)\circ B = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = ((P-A)\circ B)/B^2)$. Ist $\mathcal{L} = A + B^{\perp}$ und $F \in \mathbb{R}^3\backslash\{P\}$, so ist $(\langle P, F\rangle \perp \mathcal{L} \;\Leftrightarrow\; F \in P + \mathbb{R}B)$, und für $\mu \in \mathbb{R}$ ist $P + \mu B \in \mathcal{L} \;\Leftrightarrow\; (P + \mu B - A) \circ B = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu = ((A-P) \circ B)/B^2)$. Damit ist die erste Aussage bewiesen, und die zweite folgt aus 42.(i). $\square$



44. **Satz.** *Sind $g, h \in \mathbb{G}_3$ mit $g \nparallel h$, so gibt es genau ein $k \in \mathbb{G}_3$ mit $g \perp k \;\wedge\; h \perp k$. Man nennt k das* **gemeinsame Lot von** *g* **und** *h. Für $\{F\} := g \cap k \;\wedge\; \{F'\} := h \cap k \;\wedge\; X \in g \;\wedge\; Y \in h$ gilt:*

$$(X \neq F \;\vee\; Y \neq F' \;\Rightarrow\; |X - Y| > |F - F'|).$$

Man nennt $|F - F'|$ den **Abstand von** *g* **und** *h.*

Beweis: Es sei $g = A + \mathbb{R}B$ und $h = C + \mathbb{R}D$ mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3 \wedge B \times D \neq \mathbf{0}$ (vgl.16.(iii)). Ist $F = A + \alpha B$ und $F' = C + \beta D$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist $F - F' \perp B, D \overset{18.}{\Leftrightarrow} \exists \delta \in \mathbb{R} : F - F' = \delta \cdot (B \times D) \;\Leftrightarrow\; \exists \delta \in \mathbb{R} : A - C = -\alpha B + \beta D + \delta(B \times D)$. Nach 18.(iii) gibt es genau ein Tripel $(\alpha, \beta, \delta) \in \mathbb{R}^3$, welches die letzte Gleichung erfüllt. Damit ist die erste Aussage bewiesen, und die zweite folgt für $X = F + \lambda B$ und $Y = F' + \mu D$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ aus $|X - Y|^2 = (X - Y)^2 = ((F - F') + (\lambda B - \mu D))^2 = (F - F')^2 + (\lambda B - \mu D)^2 \geq |F - F'|^2$ mit $((\lambda B - \mu D)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda B = \mu D \;\Leftrightarrow\; \lambda = \mu = 0)$. □

I. Kollineationen des Anschauungsraumes

45. Im weiteren erweist es sich als vorteilhaft, *die Anschauungsebene* $\mathbb{R}^2$ *als Teil des Anschauungsraumes* $\mathbb{R}^3$ zu betrachten, indem man von der *Identifikation*

$$\boxed{(x, y) = (x, y, 0) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}}$$

ausgeht. Dann ist $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \subset \mathbb{R}^3}$, und mit Blick auf Paragraph 9: 1.,3.,5.,7.,8.,10.,20. und Paragraph 10: 2.,6.,9.,26.,27.,31. erkennt man, daß Abstände, Strecken, Geraden, Pfeile, Vektoren, Parallelität und Parallelogramme der Anschauungsebene mit den entsprechenden Objekten und Begriffen des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmen, soweit sich letztere auf $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ beziehen.

Wegen der angegebenen Identifikation darf man die Geometrie des Anschauungsraumes nun als *Erweiterung* der Geometrie der Anschauungsebene verstehen.

Umgekehrt wird das *Konzept der Orthogonalität* nun *auch für die* Vektoren und Geraden der *Anschauungsebene verbindlich*, und *insbesondere gilt der Satz 42. auch für die Anschau-ungsebene*!

Im weiteren notieren wir $(1, 0, 0)$ als $\mathbf{1}$ und $(0, 1, 0)$ als $\mathbf{i}$.

46. Ist $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Bijektion, die jede Gerade aus $\mathbb{G}_3$ auf eine Gerade aus $\mathbb{G}_3$ abbildet, die also die Beziehung

$$\boxed{(*) \quad \alpha(\langle X, Y\rangle) = \langle \alpha(X), \alpha(Y)\rangle \quad \forall\;\; X, Y \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } X \neq Y}$$

erfüllt, so wird α eine **Kollineation von** $\mathbb{R}^3$ genannt. Die Menge aller Kollineationen von $\mathbb{R}^3$ wird mit Koll $(\mathbb{R}^3)$ bezeichnet. Es gilt

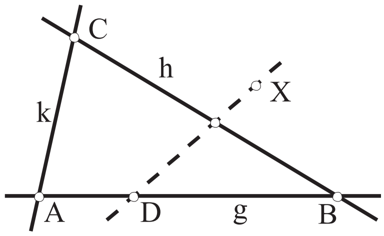
47. **Satz.** *Koll* $(\mathbb{R}^3)(\circ)$ *ist eine Gruppe mit* $id_{\mathbb{R}^3}$ *als neutralem Element, genannt* **Kollineationsgruppe von** $\mathbb{R}^3$.

Der *Beweis* entspricht dem Beweis von 9.28. mit $\mathbb{R}^3$ anstelle von $\mathbb{C}$. □

48. **Satz.** *Ist* $\alpha \in$ *Koll* $(\mathbb{R}^3)$, *so gilt:*

(i) $\{\alpha(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{E}_3\} = \mathbb{E}_3$,

(ii) $\mathcal{L} \parallel \mathcal{L}' \;\Leftrightarrow\; \alpha(\mathcal{L}) \parallel \alpha(\mathcal{L}') \quad \forall\; \mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{E}_3$.



Beweis: a) In einer Ebene ε des $\mathbb{R}^3$ seien drei nichtkollineare Punkte A, B, C gegeben. Es sei $g := \langle A, B\rangle$, $h := \langle B, C\rangle, k := \langle C, A\rangle$, $D \in g\backslash\{A, B\}$ und $X^*{:=}\alpha(X)\ \forall\, X \in \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{G}_3 \cup \mathbb{E}_3$. Die Punkte A^*, B^*, C^* sind nichtkollinear und spannen eine Ebene δ auf mit $g^* \cup h^* \cup k^* \subseteq \delta$ gemäß 25..

Wegen $D^* \in g^*\backslash\{A^*, B^*\}$ führen 25.,27. und 29. auf $(X \in \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \langle X, D\rangle \cap (h \cup k) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \langle X^*, D^*\rangle \cap (h^* \cup k^*) \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ X^* \in \delta)\ \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3\backslash\{D\}$, d.h. es ist $\varepsilon^* = \delta$.

b) Für $\eta \in \mathbb{E}$ ist $\alpha^{-1}(\eta) \in \mathbb{E}$ gemäß a) und 47., also $\eta = \alpha(\alpha^{-1}(\eta))$ gemäß a).

c) Aus a) und b) folgt (i), und mit 26. führt die Bijektivität von α dann auf (ii). □

49. **Fundamentalsatz** *zur Darstellung von Kollineationen des* $\mathbb{R}^3$*:*
Die Kollineationen des $\mathbb{R}^3$ *sind die Abbildungen des Typs*

$$\boxed{\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C + D}$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3 \ \wedge\ \det(A, B, C) \neq 0$.

Beweis: a) Nach 38. ist die angegebene Abbildung α eine Bijektion. Sind $a, b, c, d, e, f, \lambda{\in}\mathbb{R}$ mit $(d, e, f) \neq \mathbf{0}$, so ist nach 38. auch $dA{+}eB{+}fC \neq \mathbf{0}$, und es gilt $\alpha((a, b, c){+}\lambda{\cdot}(d, e, f)) = = \alpha((a + \lambda d, b + \lambda e, c + \lambda f)) = (a + \lambda d)A + (b + \lambda e)B + (c + \lambda f)C + D = \alpha((a, b, c)) + \lambda \cdot (dA + eB + fC)$, d.h. α ist ein Kollineation.

b) Jetzt sei φ eine beliebige Kollineation. Wir setzen $E := (0, 0, 1), A := \varphi(\mathbf{1}) - \varphi(\mathbf{0})$, $B := \varphi(\mathbf{i}) - \varphi(\mathbf{0}), C := \varphi(E) - \varphi(\mathbf{0})$ sowie $D := \varphi(\mathbf{0})$ und betrachten die Kollineation $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to xA{+}yB{+}zC{+}D$ (vgl.a)). Es gilt $\alpha(\mathbf{0}){=}\varphi(\mathbf{0}) \ \wedge\ \alpha(\mathbf{1}){=}\varphi(\mathbf{1}) \ \wedge\ \alpha(\mathbf{i}) = \varphi(\mathbf{i}) \ \wedge\ \alpha(E) = \varphi(E)$, und nach 47. ist $\beta := \alpha^{-1} \circ \varphi$ dann eine Kollineation, die die Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{i}, E$ festläßt. Nach 24. und 48. ist nun $\beta(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, d.h. $\beta|_{\mathbb{R}^2}$ ist eine Kollineation von $\mathbb{R}^2$, die $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{i}$ festläßt. Mit 9.37. führt dies auf $\beta(X) = X\ \forall\, X \in \mathbb{R}^2$. Wegen 29. und 48. läßt β nun auch alle Geraden $(X \parallel \langle \mathbf{0}, E\rangle)$ und $(X \parallel \langle \mathbf{1}, E\rangle)$ mit $X \in \mathbb{R}^2$ fest und schließlich dann – als Schnittpunkte dieser Geraden – alle Punkte des $\mathbb{R}^3$. Demnach ist $\beta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und damit $\varphi = \alpha$. □

50. **Corollar 1.** *Ist* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *eine Abbildung, so sind äquivalent:*
(i) Es gibt $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ *mit*

$$\det(A, B, C) \neq 0 \ \wedge\ f((x, y, z)) = xA + yB + zC \quad \forall\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(ii) f *ist eine Bijektion mit* $\boxed{f(X + \lambda \cdot Y) = f(X) + \lambda \cdot f(Y)}$ $\ \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) f *ist eine Kollineation mit* $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Beweis: ((i) $\Rightarrow$ (ii)) gilt nach Teil a) des Beweises von 49., ((ii) $\Rightarrow$ (iii)) folgt aus 10.(ii), und ((iii) $\Rightarrow$ (i)) gilt gemäß 49. □

51. Die Bijektionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die die Gleichung in 50.(ii) erfüllen, werden **lineare Bijektionen** von $\mathbb{R}^3$ genannt, und ihre Gesamtheit wird mit $\boxed{GL(\mathbb{R}^3)}$ bezeichnet, gelesen „Gruppe der linearen Bijektionen des $\mathbb{R}^3$“.
In der Tat ist $GL(\mathbb{R}^3)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Koll}(\mathbb{R}^3)(\circ)$ (vgl. 9.32).

52. In Analogie zu 9.21. werden die Kollineationen vom Typ $\boxed{\tau_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \to X + A}$ mit $A \in \mathbb{R}^3$ als **Translationen** oder **Verschiebungen** des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Man stellt fest, daß die eingerahmten Aussagen in 9.21 ganz entsprechend auch für den $\mathbb{R}^3$ gelten, wenn man überall „$\mathbb{C}$“ durch „$\mathbb{R}^3$“ ersetzt.
Insbesondere bilden die Translationen eine zu $\mathbb{R}^3(+)$ isomorphe abelsche Untergruppe $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}$ von $\mathrm{Koll}(\mathbb{R}^3)(\circ)$, und als Ergänzung zu 49. erhalten wir mit der gleichen Argumentation wie in 9.34.a):

53. **Corollar 2.** *Die Kollineationen des* $\mathbb{R}^3$ *sind die Abbildungen* $\boxed{\tau \circ f}$ *mit* $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}$ *und* $f \in GL(\mathbb{R}^3)$. *Hierbei sind* τ *und* f *durch* $\tau \circ f$ *eindeutig festgelegt.*

54. Ist $f \in GL(\mathbb{R}^3)$, so wird $\det f := \det(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1)))$ die *Determinante* von f genannt. Ist außerdem $\tau \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}$, so heißt $\det(\tau \circ f) := \det f$ die **Determinante von** $\tau \circ f$. Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich

55. **Determinantenmultiplikationssatz.**

$$\text{Es ist} \quad \boxed{\det(\alpha \circ \beta) = \det \alpha \cdot \det \beta} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{Koll}(\mathbb{R}^3).$$

Beweis: Da die eingerahmten Gleichungen in 9.34.b) auch für den Raum gelten, bedeutet es keine Einschränkung, von $\alpha, \beta \in GL(\mathbb{R}^3)$ auszugehen. Es sei $E{:=}(0,0,1)$, $\alpha(\mathbf{1}){=:}A$, $\alpha(\mathbf{i}){=:}B$, $\alpha(E){=:}C$, $\beta(\mathbf{1}){=:}(a,b,c)$, $\beta(\mathbf{i}){=:}(d,e,f)$, $\beta(E){=}(g,h,k)$. Dann ist $\det(\alpha \circ \beta) = \det(\alpha((a,b,c)), \alpha((d,e,f)), \alpha((g,h,k))) = \det(aA{+}bB{+}cC, dA{+}eB{+}fC, gA{+}hB{+}kC) \overset{1)}{=} \det(A,B,C) \cdot (aek - afh + bfg - bdk + cdh - ceg) = \det \alpha \cdot \det \beta$, wobei für 1) die Regeln 35.(vi),(vii) verwendet werden. □

Wir bezeichnen jedes Quadrupel (A,B,C,D) nichtkomplanarer Punkte des $\mathbb{R}^3$ als **geordnetes Tetraeder**. Damit folgt

56. **Transitivitätssatz.** *Sind* (A,B,C,D) *und* (A',B',C',D') *geordnete Tetraeder des* $\mathbb{R}^3$*, so existiert genau ein* $\alpha \in$ *Koll*$(\mathbb{R}^3)$ *mit*

$$\alpha(A) = A' \ \wedge\ \alpha(B) = B' \ \wedge\ \alpha(C) = C' \ \wedge\ \alpha(D) = D'.$$

Kurz: Die Kollineationen des $\mathbb{R}^3$ *sind tetraedertransitiv.*

Beweis: Wegen $C \notin \langle D,A,B\rangle \overset{22.}{=} D{+}\mathbb{R}(A{-}D){+}\mathbb{R}(B{-}D)$ ist $\det(A{-}D, B{-}D, C{-}D) \neq 0$, und ebenso ist $\det(A'-D', B'-D', C'-D') \neq 0$. Nach 49. sind

$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \to x(A-D) + y(B-D) + z(C-D) + D$ bzw.
$\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \to x(A'-D') + y(B'-D') + z(C'-D') + D'$

dann Kollineationen, die $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{i}, E := (0,0,1)$ auf D,A,B,C bzw. D',A',B',C' abbilden. Dies bedeutet, daß A,B,C,D durch die Kollineation $\beta \circ \alpha^{-1}$ auf A',B',C',D' abgebildet werden. Ist jetzt γ eine weitere Kollineation, die A,B,C,D auf A',B',C',D' abbildet, so ist $\beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha$ eine Kollineation, die $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{i}, E$ festläßt, und nach 50. gilt dann $\beta^{-1} \circ \gamma \circ \alpha = {} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$, also $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$. □

57. *Bemerkung.* Mit 56. erkennen wir, wie eine Kollineation α des $\mathbb{R}^3$ wirkt:
Das durch die „Grundpunkte“ $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ festgelegte Koordinatensystem wird durch α auf ein (evtl. versetztes und schräg verzerrtes) Koordinatensystem mit den „Grundpunkten“ $\alpha((0,0,0)), \alpha((1,0,0)), \alpha((0,1,0)), \alpha((0,0,1))$ abgebildet. Nach 48. bleiben dabei alle Parallelitäten von Geraden und Ebenen erhalten, ähnlich, wie wir es für den ebenen Fall bereits in 9.38. beobachtet haben, und wie dort ergibt sich für $A,B,C,D \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\alpha = \tau_D \circ f$ mit $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ die Aussage

$$(*) \quad \boxed{\alpha(A{+}\lambda(B{-}A){+}\mu(C{-}A)) = \alpha(A) + \lambda \cdot (\alpha(B){-}\alpha(A)){+}\mu \cdot (\alpha(C){-}\alpha(A))}\,.$$

11. Eigenschaften ebener geometrischer Abbildungen

In dem sehr lesenswerten Buch „5000 Jahre Geometrie“ von C. J. Scriba und P. Schreiber (ISBN 3-540–67924–3, Berlin 2000) findet sich auf Seite 300 die Bemerkung: „Aus heutiger Sicht ist die[se] Verzahnung von geometrischen und algebraischen Methoden Voraussetzung und Kern einer leistungsfähigen Mathematik.“

Die vorangehenden Abschnitte § 9 und § 10 dürfen als Ausgangspunkt einer solchen Verzahnung verstanden werden und sollen uns nun helfen, wichtige geometrische Abbildungen näher kennenzulernen.

A. Die Gruppe der Ähnlichkeiten von $\mathbb{C}$

Im weiteren betrachten wir Kollineationen von einem speziellen Typ, nämlich solche, die „distanztreu“ oder „maßstabstreu“ sind. Damit ist folgendes gemeint:

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **distanztreu**, wenn

(1) $|f(X) - f(Y)| = |X - Y| \quad \forall \;\; X, Y \in \mathbb{C}$

gilt, und **maßstabstreu**, wenn es ein $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ mit

(2) $|f(X) - f(Y)| = \mu \cdot |X - Y| \quad \forall \;\; X, Y \in \mathbb{C}$

gibt. Man nennt μ auch den **Maßstab** von f und erkennt aus (1) und (2), daß eine maßstabstreue Abbildung genau dann distanztreu ist, wenn sie den Maßstab 1 hat.

Die distanztreuen Abbildungen von $\mathbb{C}$ in sich heißen auch **Bewegungen von** $\mathbb{C}$, und die maßstabstreuen Abbildungen von $\mathbb{C}$ in sich werden **Ähnlichkeiten von** $\mathbb{C}$ genannt.

Z.B. erwartet man von einer guten Straßenkarte, daß sie das Straßennetz möglichst maßstabstreu wiedergibt und in diesem Sinne ein dem Netz ähnliches Bild liefert.

Wir zeigen

2. **Satz.** *Ist f_1 bzw. f_2 eine Ähnlichkeit mit dem Maßstab μ_1 bzw. μ_2, so ist $f_1 \circ f_2$ eine Ähnlichkeit mit dem Maßstab $\mu_1 \cdot \mu_2$.*

Beweis: Für $X, Y \in \mathbb{C}$ ist $|f_1 \circ f_2(X) - f_1 \circ f_2(Y)| = \mu_1 \cdot |f_2(X) - f_2(Y)| = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot |X - Y|$. □

3. **Satz.** *Ist $A \in \mathbb{C}^*$ und $B \in \mathbb{C}$, so ist die Abbildung* $\boxed{f_{A,B} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A \cdot X + B}$ *eine maßstabstreue Kollineation von $\mathbb{C}$ mit dem Maßstab $|A|$ und der Determinante $|A|^2 = A \cdot \overline{A} \in \mathbb{R}_+^*$. Man bezeichnet $f_{A,B}$ als* **gleichsinnige Ähnlichkeit von** $\mathbb{C}$.
Im Falle $A = 1$ ist $f_{A,B}$ eine Translation, und andernfalls gibt es genau ein $F \in \mathbb{C}$ mit $f_{A,B}(F) = F$, nämlich $F = B/(1 - A)$.

Beweis: Es ist $f_{A,B}(x+iy) = x \cdot A + y \cdot iA + B \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}$ mit $\det(f_{A,B}) \overset{9.35.}{=} \det(A, iA) \overset{9.12.(2)}{=}$ $= A\overline{A} \overset{8.27.f)}{=} |A|^2 > 0$. Nach 9.30. ist $f_{A,B}$ eine Kollineation, und es gilt $|f_{A,B}(X) - f_{A,B}(Y)| =$ $= |A \cdot X - A \cdot Y| \overset{8.27.l)}{=} |A| \cdot |X - Y| \quad \forall \;\; X, Y \in \mathbb{C}$. Ist $A \neq 1$, so ist $(AF + B = F \;\Leftrightarrow\; F = B/(1 - A))$. □

4. **Satz.** *Die gleichsinnigen Ähnlichkeiten von $\mathbb{C}$ bilden eine Untergruppe $\ddot{\mathbb{A}}^+$ der Gruppe Koll$(\mathbb{C})(\circ)$. Für $A, C \in \mathbb{C}^*$ und $B, D \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\boxed{f_{A,B} \circ f_{C,D} = f_{AC,AD+B}} \quad \text{sowie} \quad \boxed{f_{A,B}^{-1} = f_{A^{-1},-A^{-1}B}}.$$

Beweis: Es ist $\mathrm{id}_\mathbb{C} = f_{1,0} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ und $f_{A,B} \circ f_{C,D}(X) = A \cdot [CX + D] + B = f_{AC,AD+B}(X)$ für alle $X \in \mathbb{C}$ sowie $f_{A,B} \circ f_{A^{-1},-A^{-1}B} = f_{1,0} = f_{A^{-1},-A^{-1}B} \circ f_{A,B}$. □

5. **Transitivitätssatz** *für gleichsinnige Ähnlichkeiten. Sind $R, S, U, V \in \mathbb{C}$ mit $R{\neq}S$ und $U{\neq}V$, so gibt es genau ein $f \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $f(R) = U \ \wedge \ f(S) = V$.*

Beweis: Für $A, B \in \mathbb{C}$ gilt: $AR{+}B{=}U \ \wedge \ AS{+}B{=}V \ \Leftrightarrow \ B{=}U{-}AR{=}V{-}AS \ \Leftrightarrow$ $B{=}U{-}AR \wedge U{-}V{=}A(R{-}S) \ \Leftrightarrow \ A{=}(U{-}V)/(R{-}S) \in \mathbb{C}^* \wedge B{=}(VR{-}US)/(R{-}S)$. □

6. **Satz.** *Ist $A \in \mathbb{C}^*$ und $B \in \mathbb{C}$, so ist die Abbildung $\boxed{g_{A,B} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A \cdot \overline{X} + B}$ eine maßstabstreue Kollineation von $\mathbb{C}$ mit dem Maßstab $|A|$, mit der Determinante $-|A|^2 = -A \cdot \overline{A} \in \mathbb{R}^*_-$ und mit $g_{A,B}^{-1} = g_{\overline{A}^{-1},-\overline{A}^{-1}\overline{B}}$.*
Man bezeichnet $g_{A,B}$ als **gegensinnige Ähnlichkeit von** $\mathbb{C}$.

Beweis: Es ist $g_{A,B}(x + iy) = x \cdot A + y \cdot (-iA) + B \quad \forall \ x, y \in \mathbb{R}$ mit $\det(g_{A,B}) \overset{9.35.}{=} \det(A, -iA) \overset{9.12.(2)}{=} -A\overline{A} = -|A|^2 < 0$. Nach 9.30. ist $g_{A,B}$ eine Kollineation, und es gilt $|g_{A,B}(X) - g_{A,B}(Y)| = |A \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{Y}| = |A| \cdot |X - Y|$ sowie $A \cdot (\overline{\overline{A}^{-1}\overline{X} - \overline{A}^{-1}\overline{B}}) + B =$ $= X = \overline{A}^{-1}(\overline{A\overline{X} + B}) - \overline{A}^{-1}\overline{B} \quad \forall \ X, Y \in \mathbb{C}$. □

Im weiteren benötigen wir

7. **Lemma.** *Sind $X, Y \in \mathbb{C}$ mit $|X| = |Y| \ \wedge \ |X - 1| = |Y - 1|$, so ist $Y \in \{X, \overline{X}\}$.*

Beweis: Gemäß 8.27.f) gilt $X\overline{X} = Y\overline{Y} \ \wedge \ (X - 1) \cdot (\overline{X} - 1) = (Y - 1) \cdot (\overline{Y} - 1)$ und damit $X\overline{X} = Y\overline{Y} \ \wedge \ \overline{Y} = X + \overline{X} - Y$. Durch Einsetzen führt dies auf $X\overline{X} = Y \cdot (X + \overline{X} - Y)$, d.h. es ist $0 = (Y - \overline{X}) \cdot (X - Y)$ und damit $Y \in \{X, \overline{X}\}$. □

Obwohl dies von der Definition her nicht vorausgesetzt wird, impliziert die folgende Aussage, daß jede Ähnlichkeit eine Bijektion ist:

8. **Satz.** *Jede Ähnlichkeit ist entweder gleichsinnig oder gegensinnig und damit insbesondere eine Kollineation.*

Beweis: Gegeben sei eine beliebige Ähnlichkeit h von $\mathbb{C}$ mit dem Maßstab μ. Dann ist $|h(1){-}h(0)| = \mu{\cdot}|1{-}0| = \mu \neq 0$, also $h(1) \neq h(0)$, und nach 5. gibt es eine Ähnlichkeit $f = f_{A,B} \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $f(0) = h(0) \ \wedge \ f(1) = h(1)$. Nach 2. und 4. ist $f^{-1} \circ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X'$ nun eine Ähnlichkeit mit $0' = 0 \wedge 1' = 1$, und wegen $|1'{-}0'| = 1 = 1{\cdot}|1{-}0|$ hat $f^{-1}{\circ}h$ den Maßstab 1. Für $X \in \mathbb{C}$ folgt dann $|X'| = |X'{-}0'| = |X{-}0| = |X| \wedge |X'{-}1| = |X'{-}1'| = |X - 1|$, also $X' \in \{X, \overline{X}\}$ gemäß 7.. Gäbe es nun $U, V \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit $U' = U \ \wedge \ V' = \overline{V}$, so erhielten wir $(U - V) \cdot (\overline{U} - \overline{V}) = |U - V|^2 = |U - \overline{V}|^2 = (U - \overline{V}) \cdot (\overline{U} - V)$, also $\overline{U} \cdot (\overline{V} - V) = U \cdot (\overline{V} - V)$ und damit $\overline{U} = U$ im Widerspruch zu $U \notin \mathbb{R}$. Mithin gilt entweder $f^{-1} \circ h = \mathrm{id}_\mathbb{C}$ oder $f^{-1} \circ h(X) = \overline{X} \quad \forall \ X \in \mathbb{C}$, also $h = f \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ oder $h(X) = A \cdot \overline{X} + B \quad \forall \ X \in \mathbb{C}$. Wegen der Determinantenbedingung in 3. und 6. ist keine gleichsinnige Ähnlichkeit gegensinnig. □

9. **Satz.** *Ist* $\ddot{\mathbb{A}}^-$ *die Menge der gegensinnigen Ähnlichkeiten und* $\ddot{\mathbb{A}}$ *die Menge aller Ähnlichkeiten von* $\mathbb{C}$, *so gilt:*
   (i) $\ddot{\mathbb{A}}^- \cup \ddot{\mathbb{A}}^+ = \ddot{\mathbb{A}} \ \wedge\ \ddot{\mathbb{A}}^- \cap \ddot{\mathbb{A}}^+ = \emptyset$.
   (ii) $\ddot{\mathbb{A}}$ *ist eine Untergruppe von* $\mathrm{Koll}(\mathbb{C})(\circ)$.
   (iii) $g_{1,0}$ *ist die Konjugation* κ *von* $\mathbb{C}$.
   (iv) *Für* $A \in \mathbb{C}^* \ \wedge\ B \in \mathbb{C}$ *gilt* $g_{A,B} = f_{A,B} \circ \kappa = \kappa \circ f_{\overline{A},\overline{B}}$.
   (v) $f \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \ \wedge g, g' \in \ddot{\mathbb{A}}^- \ \Rightarrow\ f \circ g, g \circ f \in \ddot{\mathbb{A}}^- \ \wedge g \circ g' \in \ddot{\mathbb{A}}^+$.

Beweis: (i) folgt aus 8. und (ii) aus 2.,4.,6. und 8.. Offenbar sind auch (iii) und (iv) gültig, und (iv) impliziert (v). □

10. **Transitivitätssatz** *für gegensinnige Ähnlichkeiten. Sind* $R, S, U, V \in \mathbb{C}$ *mit* $R \neq S$ *und* $U \neq V$, *so gibt es genau ein* $g \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ *mit* $g(R) = U \ \wedge\ g(S) = V$.

Beweis: Für $A, B \in \mathbb{C}$ gilt: $A\overline{R}{+}B{=}U \ \wedge\ A\overline{S}{+}B{=}V \ \Leftrightarrow\ A = (U{-}V)/(\overline{R}{-}\overline{S}) \in \mathbb{C}^* \ \wedge$
$\wedge\ B = (V\overline{R} - U\overline{S})/(\overline{R} - \overline{S})$ (vgl. d. Beweis von 5.). □

B. Orthogonalität und Ähnlichkeiten in $\mathbb{C}$

Nach 10.41 und 10.45 ist die Orthogonalität für Vektoren und Geraden von $\mathbb{C}$ bereits erklärt.

Neben der Darstellung mit Hilfe des Skalarproduktes stehen uns in $\mathbb{C}$ aber weitere Möglichkeiten zur Verfügung, denn wir erhalten

11. **Satz.** *Für* $X, Y \in \mathbb{C}$ *gilt:*
   (i) $X \circ Y = \frac{1}{2}(X \cdot \overline{Y} + \overline{X} \cdot Y)$,
   (ii) $X \circ X = |X|^2 = X \cdot \overline{X}$,
   (iii) $X \perp Y \ \Leftrightarrow\ X \cdot \overline{Y} \in \mathbb{R}\, i$,
   (iv) $X \perp Y \ \Leftrightarrow\ Y = 0 \ \vee\ X \in \mathbb{R}\, iY$,
   (v) $X \perp iX \quad \wedge \quad X \perp -iX$,
   (vi) $X \neq Y \ \Rightarrow\ s_{X,Y} := (m_{X,Y} \cap \mathbb{C}) \in \mathbb{G}$,
   (vii) $X \neq Y \ \Rightarrow\ s_{X,Y} = \frac{1}{2}(X{+}Y) + \mathbb{R}\, i\,(X{-}Y)$.

Ist $X \neq Y$, *so wird* $s_{X,Y}$ *auch die* **Symmetrieachse** *oder die* $\mathbb{C}$*–Mittelsenkrechte von* $\{X, Y\}$ *genannt.*

Beweis: Ist $X = x{+}iy$ und $Y = u{+}iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, so ist $X{\cdot}\overline{Y} = (xu{+}yv){+}i(yu{-}xv)$, d.h. es gilt (i) und (ii) und nach 8.27.d) auch (iii). Ist $Y \neq 0$, so ist $X \cdot \overline{Y} \in \mathbb{R}\, i \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\ X \in \mathbb{R}\,\dfrac{i}{\overline{Y}} = \mathbb{R}\,\dfrac{i}{Y\overline{Y}}Y = \mathbb{R}\, iY$. Mithin gelten auch (iv) und (v).

Ist nun $X \neq Y$, so ist $m_{X,Y}$ nach 10.19. eine Ebene des $\mathbb{R}^3$ mit $\frac{1}{2}(X + Y) \in m_{X,Y} \cap \mathbb{C} \ \wedge$
$\wedge\ X \notin m_{X,Y}$, und mit 10.33. folgt (vi). Für $U \in \mathbb{C}$ führt 10.19.(3) mit (iv) und (vi) auf $U \in s_{X,Y} \ \Leftrightarrow\ U - \frac{1}{2}(X{+}Y) \in \mathbb{R}\, i(X{-}Y)$, d.h. es gilt (vii). □

12. **Corollar 1.** *Ist $A \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}^*$, so ist jede zu $A + \mathbb{R}B$ orthogonale Gerade in der Form $C + \mathbb{R}iB$ mit $C \in \mathbb{C}$ darstellbar. Insbesondere bilden die zu $A + \mathbb{R}B$ orthogonalen Geraden stets ein Parallelbüschel.*

Beweis: 11.(iv), 10.27.,9.19.b). □

13. **Corollar 2.** Es gilt $\mathbb{R} \perp \mathbb{R}i$ und $\mathbb{R}(1, m) \perp \mathbb{R}(1, -\frac{1}{m}) \quad \forall \ m \in \mathbb{R}^*$.

Beweis: 11.(v) und 10.4.. □

Mit 11. erhalten wir nun

14. **Satz** *Eine Kollineation α von $\mathbb{C}$ ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn sie orthogonalitätstreu ist, d.h. wenn sie die Bedingung*
$(*) \quad g \perp h \ \Leftrightarrow \ \alpha(g) \perp \alpha(h) \quad \forall \ g, h \in \mathbb{G}$
erfüllt.

Beweis: a) Ist α orthogonalitätstreu und ist α wie in 9.30. gegeben, so ist $\langle \alpha(0), \alpha(1) \rangle \perp \langle \alpha(0), \alpha(i) \rangle$ und $\langle \alpha(0), \alpha(1{+}i) \rangle \perp \langle \alpha(1), \alpha(i) \rangle$, also $\alpha(1) - \alpha(0) \perp \alpha(i) - \alpha(0)$ und $\alpha(1 + i) - \alpha(0) \perp \alpha(i) - \alpha(1)$ und damit $A \perp B \ \wedge \ A + B \perp B - A$. Nach 11.(iv) gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $B = \lambda A i$, und aus $-A \circ A + B \circ B = (A + B) \circ (B - A) = 0$ folgt $|A| = |B|$, also $|\lambda| = 1$. Für $\lambda = 1$ ist $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^+$, und für $\lambda = -1$ ist $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^-$.

b) Sind $A, B, R, S, U, V \in \mathbb{C}$ mit $A \neq 0 \ \wedge \ R \neq S \ \wedge \ U \neq V$, so ist $\langle R, S \rangle \perp \langle U, V \rangle \ \Leftrightarrow$ $S - R \perp V - U \overset{11.(iii)}{\Leftrightarrow} (S - R) \cdot (\overline{V - U}) \in \mathbb{R}i \ \Leftrightarrow \ A \cdot (S - R) \cdot \overline{A \cdot (V - U)} \in \mathbb{R}i \overset{11.(iii)}{\Leftrightarrow}$ $AS - AR \perp AV - AU \ \Leftrightarrow \ \langle AR + B, AS + B \rangle \perp \langle AU + B, AV + B \rangle$. Demnach ist jedes $f \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ orthogonalitätstreu (vgl.3.), und analog ergibt sich dies für jedes $g \in \ddot{\mathbb{A}}^-$. □

C. Die Gruppe der Bewegungen von $\mathbb{C}$

15. Definitionsgemäß ist jede Bewegung eine distanztreue Ähnlichkeit mit Maßstab 1 und nach 8. dann insbesondere eine Kollineation.

Eine Bewegung heißt **gerade**, wenn sie eine gleichsinnige Ähnlichkeit ist, sonst **ungerade**.

Die *geraden Bewegungen* sind gemäß 3. die Abbildungen des Typs

(i) $\boxed{f_{A,B} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A \cdot X + B \text{ mit } A \in \mathbb{E} \ \wedge \ B \in \mathbb{C}}$

(vgl.8.25); sie haben sämtlich die Determinante +1.

Die *ungeraden Bewegungen* sind gemäß 6. und 8. die Abbildungen des Typs

(ii) $\boxed{g_{A,B} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A \cdot \overline{X} + B \text{ mit } A \in \mathbb{E} \ \wedge \ B \in \mathbb{C}}$;

sie haben sämtlich die Determinante -1.

Ist $\mathbb{B}^+$ bzw. $\mathbb{B}^-$ die Menge der geraden bzw. ungeraden Bewegungen von $\mathbb{C}$ und bezeichnet $\mathbb{B}$ die Menge aller Bewegungen von $\mathbb{C}$, so folgt:

16. **Satz.** *Es ist $\mathbb{B} = \mathbb{B}^+ \cup \mathbb{B}^-$ und $\mathbb{B}^+ \cap \mathbb{B}^- = \emptyset$.*
$\mathbb{B}^+$ ist Untergruppe von $\ddot{\mathbb{A}}^+(\circ)$, und $\mathbb{B}$ ist Untergruppe von $\ddot{\mathbb{A}}$ $(\circ)$.
Die Menge $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ der Translationen von $\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{B}^+$.

Beweis: 2.,4.,6.,9. und 9.21.. □

17. Punktmengen L, M von $\mathbb{C}$ heißen **kongruent** bzw. **gleichsinnig kongruent** bzw. **gegensinnig kongruent**, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{B}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{B}^+$ bzw. $\alpha \in \mathbb{B}^-$ gibt mit $\alpha(L) = M$. Entsprechend werden n–tupel $(A_1, \ldots, A_n), (B_1, \ldots, B_n)$ mit $A_i, B_i \in \mathbb{C}$ für $n \geq 2$ **kongruent** bzw. **gleichsinnig kongruent** bzw. **gegensinnig kongruent** genannt, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{B}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{B}^+$ bzw. $\alpha \in \mathbb{B}^-$ gibt mit $\alpha(A_i) = B_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Kongruenz und gleichsinnige Kongruenz besitzt die Grundeigenschaften einer Äquivalenzrelation, da $\mathbb{B}$ und $\mathbb{B}^+$ Gruppen sind.

Kongruenz ist die beste Beziehung, die zwischen verschiedenen Figuren bestehen kann, denn sie bedeutet „Übereinstimmung in allen Stücken“. Deshalb wird Kongruenz auch gern mit „Deckungsgleichheit“ übersetzt, da sich Bild und Urbild verzerrungsfrei aufeinander beziehen lassen.

D. Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen

18. Es ist üblich, Bewegungen anhand dessen zu unterscheiden, was „festgelassen“ wird. Dazu definieren wir allgemein:

Ist α eine Kollineation von $\mathbb{C}$ oder von $\mathbb{R}^3$, so wird ein Punkt X als **Fixpunkt von** α bezeichnet, wenn $\alpha(X) = X$ ist.

Entsprechend wird eine Gerade g eine **Fixgerade von** α genannt, wenn $\alpha(g) = g$ ist, wenn also g „als Ganzes“ (nicht unbedingt elementweise) festbleibt.

Beispiel: $\mathbb{R}$ ist Fixgerade der Translation $\tau_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X + 1$, aber τ_1 hat keinen Fixpunkt.

Für jede Kollineation α gilt:

(i) Wenn ein Punkt Y der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Fixgeraden g, h von α ist, so ist $\alpha(Y) \in \alpha(g) \cap \alpha(h) = g \cap h = \{Y\}$, d.h. dann ist Y ein Fixpunkt von α.

(ii) Wenn α einen Fixpunkt X und eine Fixgerade g hat, dann ist auch $(X\|g)$ eine Fixgerade von α wegen $(X\|g) = (\alpha(X)\|\alpha(g)) = \alpha(X\|g)$.

Darüberhinaus erhalten wir

19. **Satz.** *Ist α eine Kollineation von $\mathbb{C}$ oder von $\mathbb{R}^3$, so gilt:*
(i) Sind R, S zwei verschiedene Fixpunkte von α, so ist $\alpha(X) = X \quad \forall\, X \in \langle R, S\rangle$.
(ii) Sind R, S, T nichtkollineare Fixpunkte von α, so ist $\alpha(X) = X \quad \forall\, X \in \langle R, S, T\rangle$.

Beweis: 9.37., 9.38.(∗), 10.57.(∗). □

20. Wir legen fest:

(i) Eine Bewegung δ heißt **Drehung um den Punkt** D, wenn D der einzige Fixpunkt von δ ist, oder wenn $\delta = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ist.

(ii) Eine Bewegung σ heißt **Spiegelung an der Geraden** g, wenn g die Menge aller Fixpunkte von σ ist.

(iii) Eine Bewegung heißt **Gleitspiegelung**, wenn sie weder Translation noch Drehung noch Spiegelung ist.

Mit (i)–(iii) erhalten wir eine übersichtliche Einteilung der Bewegungen, denn es gilt:

21. **Satz.** *Sind $C, D \in \mathbb{C}$ mit $D \neq 0$, so existiert zur Geraden $g = C + \mathbb{R}D$ genau eine Spiegelung $\tilde{g}$ mit der Fixpunktmenge g. Es gilt:*

(i) $\boxed{\tilde{g} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \frac{D}{\overline{D}}(\overline{X} - \overline{C}) + C}$.

(ii) $\tilde{g} = \tilde{g}^{-1} \ \wedge \ \tilde{g} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

(iii) $g = s_{X,\tilde{g}(X)} \ \forall X \in \mathbb{C} \backslash g$.

(iv) $R, S \in \mathbb{C} \ \wedge \ R \neq S \ \wedge \ g = s_{R,S} \ \Rightarrow \ S = \tilde{g}(R)$.

(v) $\tilde{g}(h) = h \ \Leftrightarrow \ h = g \vee h \perp g \quad \forall \ h \in \mathbb{G}$.

(vi) $\widetilde{\alpha(g)} = \alpha \circ \tilde{g} \circ \alpha^{-1} \quad \forall \, \alpha \in \ddot{\mathbb{A}}$.

Beweis: $\tilde{g}$ sei durch (i) definiert. a) Wegen $|D/\overline{D}| = 1$ ist $\tilde{g} \in \mathbb{B}^-$ mit $\tilde{g}(C + \lambda D) = C + \lambda D \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$. Hätte $\tilde{g}$ einen weiteren Fixpunkt, so wäre $\tilde{g} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathbb{B}^+$ gemäß 19. Nach 5. und 10. ist $\tilde{g}$ die einzige Ähnlichkeit mit g als Fixpunktmenge.

b) Aus (i) folgt $\tilde{g}(\tilde{g}(X)) = X \quad \forall \ X \in \mathbb{C}$, also (ii), und (iii) gilt, da $(|X - U| = |\tilde{g}(X) - \tilde{g}(U)| = |\tilde{g}(X) - U| \quad \forall \ U \in g)$ auf $g \subseteq s_{X,\tilde{g}(X)} \quad \forall \ X \in \mathbb{C} \backslash g$ führt (vgl.11.(vi)).

c) Sind $R, S \in \mathbb{C}$ mit $R \neq S$ und ist $g = s_{R,S}$, so gilt $g = \frac{1}{2}(R + S) + \mathbb{R}i(R - S)$ gemäß 11.(vii), und mit $\tilde{g}(R) = -\frac{R-S}{\overline{R}-\overline{S}}\left(\overline{R} - \frac{\overline{R}+\overline{S}}{2}\right) + \frac{R+S}{2} = -\frac{R-S}{2} + \frac{R+S}{2} = S$ folgt (iv).

d) Es gilt $\tilde{g}(g) = g$. Da $\tilde{g}$ orthogonalitätstreu ist, ergibt sich $\tilde{g}(U + \mathbb{R}iD) = \tilde{g}(U) + \mathbb{R}iD = U + \mathbb{R}iD \quad \forall \ U \in g$, also $\tilde{g}(h) = h$ für $h \in \mathbb{G}$ mit $h \perp g$. Hätte $\tilde{g}$ noch weitere Fixgeraden, so hätte $\tilde{g}$ nach 18.(i) auch weitere Fixpunkte. Damit ist (v) gezeigt.

e) Es seien $U, V \in g$ mit $U \neq V$. Da $\widetilde{\alpha(g)}$ und $\alpha \circ \tilde{g} \circ \alpha^{-1}$ nach 9.(v) Elemente von $\ddot{\mathbb{A}}^-$ sind, die $\alpha(U)$ und $\alpha(V)$ festlassen, ist (vi) gemäß 10. gültig. □

22. **Corollar 1.** *Ist $\alpha \in \mathbb{B}^-$ und besitzt α (wenigstens) einen Fixpunkt, so ist α eine Spiegelung.*

Beweis: Es sei $A \in \mathbb{C}$ mit $\alpha(A) = A$. Wegen $\alpha \in \mathbb{B}^-$ gibt es ein $B \in \mathbb{C}$ mit $\alpha(B) \neq B$. Hierbei ist $|B-A| = |\alpha(B)-A|$, also $A \in g := s_{B,\alpha(B)}$. Mit 21.(iv) folgt $\tilde{g}(B) = \alpha(B)$, und dann führt $\tilde{g}(A) = A = \alpha(A)$ mit 10. auf $\tilde{g} = \alpha$. □

23. **Corollar 2.** *Jede gerade Bewegung ist entweder Drehung oder Translation. Jede ungerade Bewegung ist entweder Spiegelung oder Gleitspiegelung.*

Beweis: 3.,20.,22.. □

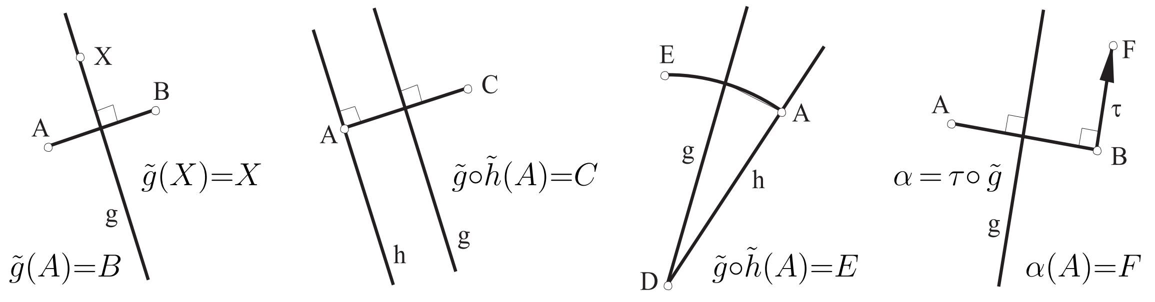
24. **Corollar 3.** *Jede gerade Bewegung ist ein Produkt von zwei Spiegelungen, jede ungerade ein Produkt von drei Spiegelungen.*

Beweis: a) Ist $\delta \in \mathbb{B}^+$, so gibt es nach 21. ein $g \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{g}(\delta(0)) = 0$. Nun ist $\tilde{g} \circ \delta \in \mathbb{B}^-$ mit Fixpunkt 0, und nach 22. ist dann $\tilde{g} \circ \delta = \tilde{h}$ für ein $h \in \mathbb{G}$, also $\delta = \tilde{g} \circ \tilde{h}$.

b) Ist $\alpha \in \mathbb{B}^-$, so ist $\kappa \circ \alpha \in \mathbb{B}^+$, also $\kappa \circ \alpha \overset{a)}{=} \tilde{a} \circ \tilde{b}$ mit $a, b \in \mathbb{G}$ und damit $\alpha = \kappa \circ \tilde{a} \circ \tilde{b}$. □

25. **Satz.** *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \| h$, so ist $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ eine Translation.*
Sind $g, h \in \mathbb{G}$ und gibt es ein $D \in g \cap h$, so ist $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ eine Drehung um D.

Beweis: Ist $a = C + \mathbb{R}D$ und $b = A + \mathbb{R}D$ mit $A, C \in \mathbb{C} \ \wedge \ D \in \mathbb{C}^*$, so ist $\tilde{a} \circ \tilde{b}(X) = \frac{D}{\overline{D}}\Big(\big[\overline{\tfrac{D}{\overline{D}}(\overline{X} - \overline{A}) + A} \big] - \overline{C} \Big) + C = X - A + C + \frac{D}{\overline{D}}(\overline{A} - \overline{C}) \ \ \forall \ X \in \mathbb{C}$, also $\tilde{a} \circ \tilde{b} \in \mathcal{T}_{\mathbb{C}}$. Wenn es ein $D \in g \cap h$ gibt, ist $\tilde{g} \circ \tilde{h}(D) = D$. □



Spiegelung *Translation* *Drehung* *Gleitspiegelung*

26. **Satz.** *Ist α eine Gleitspiegelung, so gibt es genau eine Gerade g und genau eine Translation $\tau \neq id_{\mathbb{C}}$ mit*

$$\boxed{\alpha = \tilde{g} \circ \tau = \tau \circ \tilde{g} \ \wedge \ \tau(g) = g \ \wedge \ \alpha \circ \alpha = \tau \circ \tau}.$$

Man nennt g die **Achse** *und τ den* **Schub** *von α.*

Beweis: Es sei $\alpha(X) = A\overline{X} + B \ \ \forall \ X \in \mathbb{C}$ mit $A \in \mathbb{E}$ und $B \in \mathbb{C}$. Dann ist $\alpha \circ \alpha(X) = A(\overline{A\overline{X} + B}) + B = X + A\overline{B} + B \ \ \forall \ X \in \mathbb{C}$, also $\alpha \circ \alpha = \tau \circ \tau$ für $\tau := \tau_{(A\overline{B}+B)/2}$. Es folgt $\tau^{-1} \circ \alpha(B/2) = A(\overline{B}/2) + B - (A\overline{B} + B)/2 = B/2$, und nach 22. gibt es dann ein $g \in \mathbb{G}$ mit $\tau^{-1} \circ \alpha = \tilde{g}$, also mit $\alpha = \tau \circ \tilde{g}$ und mit $\alpha^{-1} \circ \tau = \tilde{g}^{-1} = \tilde{g}$ (vgl.7.10.(v)). Es folgt $\alpha = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ \alpha) = \alpha^{-1} \circ \tau \circ \tau = \tilde{g} \circ \tau$ und damit $\tau \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tau$, also $\tilde{g} = \tau \circ \tilde{g} \circ \tau^{-1} \overset{21.(vi)}{=} \widetilde{\tau(g)}$ und $g = \tau(g)$. Wegen $\tau \circ \tau = \alpha \circ \alpha$ ist τ durch α festgelegt, damit aber auch g wegen $\tilde{g} = \tau^{-1} \circ \alpha$. Wäre $\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, so wäre α eine Spiegelung. □

27. Die folgende Tabelle liefert einen Überblick über verschiedene Kollineationen der Anschauungsebene (von denen einige noch zu definieren sind):

Kollineationen von $\mathbb{C}$

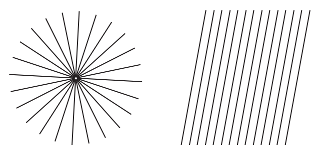
Stauchungen
Scherungen

gleichsinnige Ähnlichkeiten	**gegensinnige Ähnlichkeiten**
zentrische Streckungen	
gerade Bewegungen	**ungerade Bewegungen**
Translationen Drehungen Punktspiegelungen	Spiegelungen Gleitspiegelungen

E. Der Dreispiegelungssatz

Viele elementargeometrische Sätze lassen sich sehr elegant mit Hilfe von Spiegelungen beweisen (vgl. F. Bachmann, „Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff“, Berlin 1973).

Um eine der zentralen Aussagen aus diesem Bereich zu formulieren, setzen wir fest:



28. Wir sagen, Geraden von $\mathbb{C}$ **liegen im Büschel**, wenn sie einen gemeinsamten Punkt besitzen, oder wenn sie paarweise parallel sind.

Mit dieser Redeweise folgt

29. **Dreispiegelungssatz.** *Für $g, h, k \in \mathbb{G}$ gilt:*

(i) Liegen g, h, k im Büschel, so ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ eine Spiegelung.

(ii) Ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{m}$ mit $m \in \mathbb{G}$, so ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{k} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g}$, und g, h, k, m liegen im Büschel

Beweis: a) Gibt es ein $D \in g \cap h \cap k$, so ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ nach 22. wegen $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(D) = D$ eine Spiegelung.

b) Ist $g \| h \| k$, so sind $\tau := \tilde{g} \circ \tilde{h}$ und $\sigma := \tilde{h} \circ \tilde{k}$ nach 25. Translationen, und für $X \in k$ und $Y := \tau(X)$ folgt $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(X) = Y$ sowie $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(Y) = \tilde{g} \circ \sigma \circ \tau(X) \overset{9.21.(i)}{=} \tilde{g} \circ \tau \circ \sigma(X) = \tilde{g} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}(X) = X$. Demnach vertauscht $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ die Punkte X, Y und hat deren Mitte $\frac{1}{2}(X+Y)$ gemäß 9.38 als Fixpunkt. Nach 22. ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ dann eine Spiegelung.

c) Aus a) und b) folgt (i).

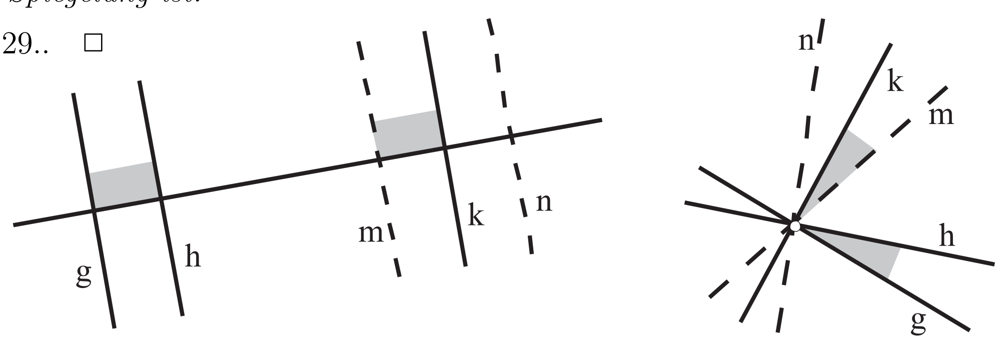
d) Es sei $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k} = \tilde{m}$ vorausgesetzt. Dann gilt $\tilde{k} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g} = \tilde{m}^{-1} = \tilde{m} = \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ sowie $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k} \ \wedge \ \tilde{g} \circ \tilde{m} = \tilde{h} \circ \tilde{k}$. Ist nun $g \cap h = \{D\}$ mit $D \in \mathbb{C}$, so ist D der einzige Fixpunkt von $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$, und mit 25. folgt $D \in g \cap h \cap k \cap m$, also (ii).

Analog ergibt sich (ii) im Falle $m \nparallel g \vee h \nparallel k$, und andernfalls gilt $g \| h \| k \| m$. $\square$

Bemerkung. Im Teil b) des Beweises von 29. kann man auch dadurch zum Ziel gelangen, daß man sich g, h, k in der Form $g = A + \mathbb{R}D$, $h = B + \mathbb{R}D$, $k = C + \mathbb{R}D$ mit $A, B, C \in \mathbb{C}$ und $D \in \mathbb{C}^*$ vorgegeben denkt und für $m := (A - B + C) + \mathbb{R}D$ die Identität $\tilde{g} \circ \tilde{h}(C) = \tilde{m} \circ \tilde{k}(C)$ bestätigt, denn mit 9.21.(v) und 25. führt dies auf $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$.

30. **Corollar 1.** *Geraden g, h, k von $\mathbb{C}$ liegen genau dann im Büschel, wenn $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ eine Spiegelung ist.*

Beweis: 29.. $\square$



31. **Corollar 2.** *Liegen $g, h, k \in \mathbb{G}$ im Büschel, so gibt es genau eine Gerade m mit $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$ und genau eine Gerade n mit $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{n}$, und die Geraden g, h, k, m, n liegen im Büschel.*

Beweis: Nach 21. und 29. sind m und n durch $\tilde{m} = \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{k}$ und $\tilde{n} = \tilde{k} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h}$ festgelegt und liegen mit g, h, k im Büschel. □

Zum Beweis des nachfolgenden Corollars 3 benötigen wir

32. **Lemma.** *Zu $g, h \in \mathbb{G}$ existiert stets ein $s \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{s}(g) = h$.*

Beweis: Es sei $g \neq h$, denn sonst kann man $s := g$ wählen. a) Ist $g \nparallel h$, so gibt es $A, B \in \mathbb{C}^*$ und $D \in \mathbb{C}$ mit $g = D + \mathbb{R}A$ und $h = D + \mathbb{R}B$, und dann sei $X := D + A$ sowie $Y := D + B \cdot |A|/|B|$. Es folgt $X \in g$ und $Y \in h$ mit $|X - D| = |A| = |Y - D|$, also mit $D \in s := s_{X,Y}$, und wegen $\tilde{s}(X) \overset{21.}{=} Y$ ist dann $\tilde{s}(g) = h$. b) Ist $g \cap h = \emptyset$, so gibt es ein $k \in \mathbb{G}$ mit $k \perp g \ \wedge \ k \perp h$, und für $\{X\} := k \cap g \ \wedge \ \{Y\} := k \cap h \ \wedge \ s := s_{X,Y}$ ergibt sich $\tilde{s}(X) \overset{21.}{=} Y \ \wedge \ \tilde{s}(k) = k \ \wedge \ \tilde{s}(g) \overset{14.}{=} h$. □

Damit folgt

33. **Corollar 3.** *Sind $g, h, k, m \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{m} \circ \tilde{k}$, so gibt es eine gerade Bewegung δ mit $\delta(g) = m \ \wedge \ \delta(h) = k$.*

Beweis: Gemäß 32. sei $s \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{s}(g) = m$. Nach 21. ist $\tilde{s} \circ \tilde{g} \circ \tilde{s} = \widetilde{s(g)} = \tilde{m}$, und für $\delta := \tilde{s} \circ \tilde{g}$ erhalten wir dann $\delta(g) = \tilde{s}(g) = m$ sowie $\widetilde{\delta(h)} \overset{21.}{=} \delta \circ \tilde{h} \circ \delta^{-1} = \tilde{s} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g} \circ \tilde{s} =$ $= \tilde{s} \circ \tilde{m} \circ \tilde{k} \circ \tilde{g} \circ \tilde{s} \overset{29.}{=} \tilde{k} \circ \tilde{m} \circ \tilde{s} \circ \tilde{g} \circ \tilde{s} = \tilde{k} \circ \tilde{m} \circ \tilde{m} = \tilde{k}$, also $\delta(h) = k$. □

Mit 21.–25. und 29.–33. haben wir einige grundlegende Aussagen über *Spiegelungen* vor Augen. Als eine besonders wichtige Aussage über *Drehungen* notieren wir nun

34. **Satz.** *Für jedes $D \in \mathbb{C}$ bilden die Drehungen um D eine abelsche Gruppe Dreh $(D)(\circ)$. Es ist Dreh$(D) = \{f_{A,D-AD} \mid A \in \mathbb{E}\}$ mit $\boxed{f_{A,D-AD}(X) = A \cdot (X - D) + D \quad \forall\, X \in \mathbb{C}}$, und $\varphi : \mathbb{E}(\cdot) \to \text{Dreh}(D)(\circ) : A \to f_{A,D-AD}$ ist ein Gruppenisomorphismus. Der Punkt A von $\mathbb{E}$ wird auch der* **Drehwert** *von $f_{A,D-AD}$ genannt.*

Beweis: Nach 3. und 15. besteht Dreh (D) genau aus den angegebenen Abbildungen $f_{A,D-AD}$ mit $A \in \mathbb{E}$, d.h. φ ist surjektiv. Sind $A_1, A_2 \in \mathbb{E}$ mit $f_{A_1,D-A_1D} = f_{A_2,D-A_2D}$, so ist $A_1 + D = f_{A_1,D-A_1D}(1+D) = f_{A_2,D-A_2D}(1+D) = A_2 + D$, also $A_1 = A_2$, und mithin ist φ injektiv. Wegen $\varphi(A_1) \circ \varphi(A_2) = f_{A_1,D-A_1D} \circ f_{A_2,D-A_2D} \overset{4.}{=} f_{A_1 \cdot A_2, D - A_1 \cdot A_2 \cdot D} = \varphi(A_1 \cdot A_2)$ ist φ dann ein Isomorphismus, und mit 7.8. folgt die Behauptung. □

35. Zum Drehwert 1 gehört in 34. die sog. 0°–**Drehung um** D, also $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Die Drehung um D mit dem Drehwert i bzw. $-i$ bzw. -1 wird 90°–**Drehung** bzw. −90°–**Drehung** bzw. 180°–**Drehung um** D genannt, denn nach 9.38. und 11.(v) wird jede Gerade durch eine 90°–Drehung und ebenso durch eine −90°–Drehung auf eine dazu senkrechte Gerade abgebildet, während die 180°–*Drehung* $\boxed{\tilde{D} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to -X + 2D}$ für $D \in \mathbb{C}$ wegen $\tilde{D}(D+Y) = D - Y \ \ \forall\, Y \in \mathbb{C}$ alle Geraden durch D festläßt und deshalb jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade abbildet.

Die gerade Bewegung $\tilde{D}$ ist zugleich Drehung mit dem Drehwert -1 und zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor -1 (vgl. 9.24.), und wegen

(i) $\boxed{\tilde{D} \circ \tilde{D} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \ \wedge\ \tilde{D} = \tilde{D}^{-1}}$

wird $\tilde{D}$ für $D \in \mathbb{C}$ auch die **Punktspiegelung an** D genannt.

Nach 3. ist D der einzige Fixpunkt von $\tilde{D}$, und deshalb sind die Geraden durch D gemäß 18.(i) auch die sämtlichen Fixgeraden von $\tilde{D}$.

Wir setzen $\widetilde{\mathbb{C}} := \{\, \tilde{X} \mid X \in \mathbb{C}\}$. Für $A, B, C \in \mathbb{C}$ erhalten wir dann

(ii) $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} = (A - B + C)^{\sim} = \tilde{C} \circ \tilde{B} \circ \tilde{A}$,

(iii) $\tilde{A} \circ \tilde{B} = \tau_{2\cdot(A-B)} \ \wedge\ \tau_A = (A/2)^{\sim} \circ \tilde{0}$,

(iv) $\tilde{A} \circ \tilde{B} = \tilde{B} \circ \tilde{A} \ \Leftrightarrow\ A = B$,

(v) $(\widetilde{\mathbb{C}} \cup \mathcal{T}_{\mathbb{C}})(\circ)$ ist eine Gruppe.

Zum *Beweis* vgl. man die Übungen.

36. Ist $\varphi \in$ Koll $(\mathbb{C})$, so wird φ **involutorisch** genannt, wenn $\varphi = \varphi^{-1} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ist, wenn also $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \neq \varphi$ gilt.

Wir wissen bereits, daß die Spiegelungen und die Punktspiegelungen involutorische Kollineationen sind.

Um festzustellen, ob es noch weitere involutorische Ähnlichkeiten gibt, bemerken wir zunächst folgendes:

Ist $\varphi \in$ Koll $(\mathbb{C})$ *involutorisch*, so ist $\varphi(\{X, \varphi(X)\}) = \{\varphi(X), X\}\ \forall X \in \mathbb{C}$, und die Mittentreue von φ (vgl. 9.38., 10.19.) impliziert dann $\varphi\big(\frac{1}{2}(X + \varphi(X))\big) = \frac{1}{2}(X + \varphi(X))$ $\forall\, X \in \mathbb{C}$, d.h. bei einer *involutorischen Kollineation* ist die Mitte zwischen Bild und Urbild *stets ein Fixpunkt*!

Ist $Y \in \mathbb{C}$ mit $Y \neq \varphi(Y)$, so folgt außerdem, daß $\langle Y, \varphi(Y)\rangle$ eine Fixgerde von φ ist, wenn φ involutorisch ist.

Damit erhalten wir

37. **Satz.** *Die Punktspiegelungen sind die gleichsinnigen involutorischen Ähnlichkeiten von $\mathbb{C}$, und die Spiegelungen (an Geraden) sind die gegensinnigen involutorischen Ähnlichkeiten von $\mathbb{C}$.*

Beweis: Ist φ eine involutorische Ähnlichkeit, so hat φ nach 2. einen Maßstab μ mit $\mu^2 = 1$, denn es ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$. Wegen $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ bedeutet dies $\mu = 1$, d.h. φ ist eine Bewegung. Nach 36. hat φ (wenigstens) einen Fixpunkt, d.h. im Falle $\varphi \in \mathbb{B}^-$ ist φ gemäß 22. eine Spiegelung, und im Falle $\varphi \in \mathbb{B}^+$ hat φ gemäß 3. genau einen Fixpunkt D. Im letzteren Fall führt 36. auf $\frac{1}{2}(X + \varphi(X)) = D\ \ \forall\, X \in \mathbb{C}$. d.h. es ist $\varphi = \tilde{D}$. □

38. **Corollar.** *Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \neq h$, so sind äquivalent:*

(i) $\tilde{g} \circ \tilde{h}$ *ist eine Punktspiegelung.*

(ii) $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \tilde{g}$.

(iii) $g \perp h$.

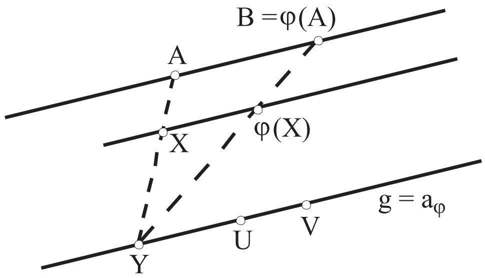
Beweis: Nach 37. ist (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Ferner ist (ii) $\Leftrightarrow$ $\tilde{g} \circ \tilde{h} \circ \tilde{g} = \tilde{h} \overset{21.}{\Leftrightarrow} \widetilde{g(h)} = \tilde{h} \Leftrightarrow \tilde{g}(h) = h \overset{21.}{\Leftrightarrow}$ (iii). $\square$

F. Scherungen und Stauchungen

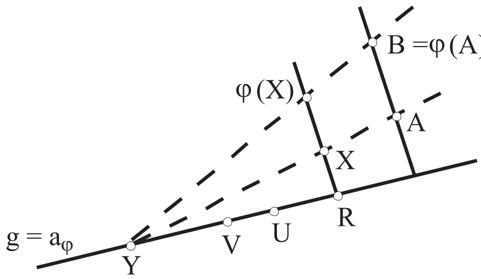
39. Eine Kollineation φ von $\mathbb{C}$ heißt **axial**, wenn ihre Fixpunktmenge eine Gerade a_φ ist. Hierbei wird a_φ auch die **Achse von** φ genannt, und φ wird als axiale Kollineation **über** a_φ bezeichnet.

Wir zeigen zunächst

40. **Satz.** *Ist $g \in \mathbb{G}$ und sind $A, B \in \mathbb{C}\backslash g$ mit $A \neq B$, so existiert genau eine axiale Kollineation φ mit $a_\varphi = g$ als Achse und mit $\varphi(A) = B$. Die Fixgeraden von φ sind g und die zu $\langle A, B\rangle$ parallelen Geraden.*



Scherung



Stauchung

Beweis: Es seien $U, V \in g$ mit $U \neq V$. Nach 9.37. gibt es genau ein $\varphi \in$ Koll $(\mathbb{C})$ mit $\varphi(U) = U \;\wedge\; \varphi(V) = V \;\wedge\; \varphi(A) = B$, und nach 19. ist g dann die Fixpunktmenge a_φ von φ.

Für jedes $X \in \mathbb{C}\backslash g$ ist $\langle X, \varphi(X)\rangle$ eine Fixgerade von φ, denn im Falle $\langle X, \varphi(X)\rangle \| g$ ist $\varphi(X) \in \varphi(\langle X, \varphi(X)\rangle) \| \varphi(g) = g$, also $\varphi(\langle X, \varphi(X)\rangle) = \langle X, \varphi(X)\rangle$ gemäß 9.17.(iv), und wenn es ein $R \in \langle X, \varphi(X)\rangle \cap g$ gibt, dann ist $\varphi(\langle X, \varphi(X)\rangle) = \varphi(\langle R, X\rangle) = \langle R, \varphi(X)\rangle = \langle X, \varphi(X)\rangle$.

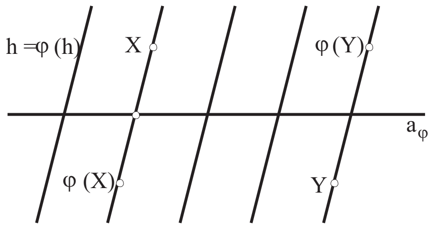
Ist $Y \in g\backslash\langle A, B\rangle$ und ist $X \in \langle A, Y\rangle\backslash\{Y\}$, so führt die Teilverhältnistreue von φ (vgl. 9.38.) mit 9.26 auf $\langle X, \varphi(X)\rangle \parallel \langle A, B\rangle$. Dies impliziert, daß alle zu $\langle A, B\rangle$ parallelen Geraden von φ festgelassen werden, und nach 18.(i) kann es dann keine weiteren Fixgeraden geben. $\square$

41. Eine axiale Kollineation φ mit der Achse a_φ heißt **Scherung**, falls die Fixgeraden von φ zu a_φ parallel sind, sonst **Stauchung**.

(Hinweis: Bei einer Stauchung werden die Punkte - je nach Art der Abbildung - zur Achse hin „gestaucht“ oder aber von der Achse weg „gestreckt“. Deshalb ist der Name nur teilweise anschaulich zutreffend.)

Bei Stauchungen können wir unterscheiden zwischen **Orthostauchungen**, bei denen die zu a_φ senkrechten Geraden Fixgeraden von φ sind, und den übrigen Stauchungen, die wir auch als **Schrägstauchungen** bezeichnen. Über diese Vereinbarungen hinaus wird auch $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ als **Scherung**, als **Stauchung** und als **Orthostauchung** mit g als Achse $\forall g \in \mathbb{G}$ bezeichnet.

Eine axiale Kollineation φ wird **Schrägspiegelung** genannt, wenn sie *involutorisch* und keine gewöhnliche Spiegelung ist.

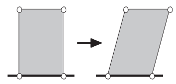


Da die Mitte zwischen Bild und Urbild bei einer Schrägspiegelung nach 36. stets ein Punkt von a_φ ist, ist jede Schrägspiegelung eine spezielle Schrägstauchung, nach 37. aber keine Ähnlichkeit.

42. Die axialen Kollineationen mit der speziell gewählten Achse $\mathbb{R}$ lassen sich algebraisch leicht darstellen:

(i) Die Scherungen über $\mathbb{R}$ sind die Abbildungen des Typs

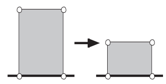
$$\boxed{\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + (a+i) \cdot y} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R};$$



sie haben sämtlich die Determinante $\det \alpha = \det(1, a+i) = 1$.

(ii) Die Orthostauchungen über $\mathbb{R}$ sind die Abbildungen des Typs

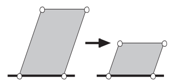
$$\boxed{\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + (b \cdot i) \cdot y} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R}^*;$$



hierbei ist $\det \beta = b$.

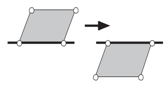
(iii) Die Schrägstauchungen über $\mathbb{R}$ sind die Abbildungen des Typs

$$\boxed{\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + (a+ib) \cdot y}$$



mit $a \in \mathbb{R}^* \;\wedge\; b \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$; hierbei ist $\det \gamma = b$.

(iv) Die Schrägspiegelungen über $\mathbb{R}$ sind die Abbildungen des Typs



$$\boxed{\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + (a-i) \cdot y} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^*;$$

sie haben sämtlich die Determinante $\det \sigma = \det(1, a-i) = -1$.

Wie man sieht, ist hier jede Schrägstauchung ein Produkt aus einer Scherung und einer Orthostauchung; dieser Zusammenhang gilt für jede Achse.

Wenn φ und α Kollineationen sind und wenn φ durch $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ ersetzt wird, so sagt man, φ wird mit α **transformiert**. Hierzu zeigen wir

43. **Satz.** *Sind φ, α Elemente von Koll $(\mathbb{C})$ oder von Koll $(\mathbb{R}^3)$ und ist F ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene, so gilt:*

$$\boxed{\varphi(F) = F \;\Leftrightarrow\; (\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1})(\alpha(F)) = \alpha(F)},$$

d.h. F ist genau dann Fixelement von φ, wenn $\alpha(F)$ Fixelement von $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ ist.

Beweis: Es ist $(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1})(\alpha(F)) = \alpha(\varphi(F))$ und $(\varphi(F) = F \;\Leftrightarrow\; \alpha(\varphi(F)) = \alpha(F))$. □

44. **Corollar.** *Für $\varphi, \alpha \in$ Koll $(\mathbb{C})$ gilt:*

(i) φ ist genau dann axial mit der Achse a_φ, wenn $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ axial mit der Achse $\alpha(a_\varphi)$ ist.

(ii) φ ist genau dann eine Scherung über a_φ, wenn $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ eine Scherung über $\alpha(a_\varphi)$ ist.

(iii) Jede Scherung hat die Determinante $+1$.

Beweis: (i) und (ii) folgen direkt aus 43. und aus der Parallelitätstreue von α.

(iii): φ sei eine Scherung mit der Achse a_φ, und es seien $U, V \in a_\varphi$ mit $U \neq V$. Nach 5. gibt es ein $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $\alpha(U) = 0 \;\wedge\; \alpha(V) = |V - U|$. Wegen $|\alpha(V) - \alpha(U)| = |V - U|$ ist $\alpha \in \mathbb{B}^+$, und nach (ii) ist $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$ eine Scherung über $\mathbb{R}$. Mit 42.(i), 9.35. und 15. folgt $1 = \det(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}) = \det \alpha \cdot \det \varphi \cdot \det \alpha^{-1} = \det \varphi$. □

Die Sonderrolle der Scherungen und Orthostauchungen wird hervorgehoben durch

45. **Satz.** *Jede Kollineation von $\mathbb{C}$ läßt sich darstellen als Produkt aus einer gleichsinnigen Ähnlichkeit, einer Orthostauchung über $\mathbb{R}$ und einer Scherung über $\mathbb{R}$.*

Beweis: Es sei $\varphi \in$ Koll $(\mathbb{C})$. Nach 5. gibt es ein $f \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $f(0) = \varphi(0) \;\wedge\; f(1) = \varphi(1)$, also mit $f^{-1} \circ \varphi(0) = 0 \;\wedge\; f^{-1} \circ \varphi(1) = 1$. Wir setzen $f^{-1} \circ \varphi(i) =: a + ib$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^*$. Für die Scherung $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + (a + i)y$ und die Orthostauchung $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x + iy \to x + biy$ ergibt sich $\beta \circ \alpha(0) = 0 \;\wedge\; \beta \circ \alpha(1) = 1 \;\wedge\; \beta \circ \alpha(i) = a + ib$. Nach 9.37. bedeutet dies $\beta \circ \alpha = f^{-1} \circ \varphi$, also $f \circ \beta \circ \alpha = \varphi$. □

Ergänzend notieren wir

46. **Satz.** *Jede Ähnlichkeit von $\mathbb{C}$ ist darstellbar als Produkt aus einer Bewegung und einer zentrischen Streckung.*

Beweis: Ist $A \in \mathbb{C}^*$ und $B \in \mathbb{C}$, so ist

$$f_{A,B}(X) = A \cdot X + B = (A/|A|) \cdot (|A| \cdot X) + B = f_{A/|A|,B} \circ \sigma_{0,|A|}(X) \text{ und}$$
$$g_{A,B}(X) = A \cdot \overline{X} + B = (A/|A|) \cdot (\overline{|A| \cdot X}) + B = g_{A/|A|,B} \circ \sigma_{0,|A|}(X) \quad \forall \; X \in \mathbb{C}. \quad \square$$

G. Das Determinantenmaß

Zur Flächenmessung gibt es umfangreiche und schwierige Untersuchungen, die wir im Rahmen dieser Vorlesung kaum bringen können. Das mag überraschen, da wir doch intuitiv eine recht deutliche Vorstellung von dem haben, was „Fläche" bedeutet.

Um mit wenig Aufwand weitrechende Ergebnisse zu erhalten, wählen wir den folgenden Ansatz:

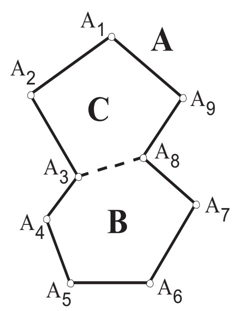
47. Ist $\mathbf{A} := (A_1, \ldots, A_n)$ ein n-tupel von Punkten der Anschauungsebene $\mathbb{C}$ mit $n \geq 2$, so wird die reelle Zahl

$$\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{A} := \tfrac{1}{2}(\det(A_1, A_2) + \det(A_2, A_3) + \cdots + \det(A_{n-1}, A_n) + \det(A_n, A_1))}$$

das **Determinantenmaß von A** genannt. Ferner wird

$$\boxed{\mathbf{Rd}(\mathbf{A}) := [A_1, A_2] \cup [A_2, A_3] \cup \cdots \cup [A_{n-1}, A_n] \cup [A_n, A_1]}$$

als der **Rand von A** bezeichnet.



n = 9, r = 3, s = 8

Als erste *Haupteigenschaft* beweisen wir

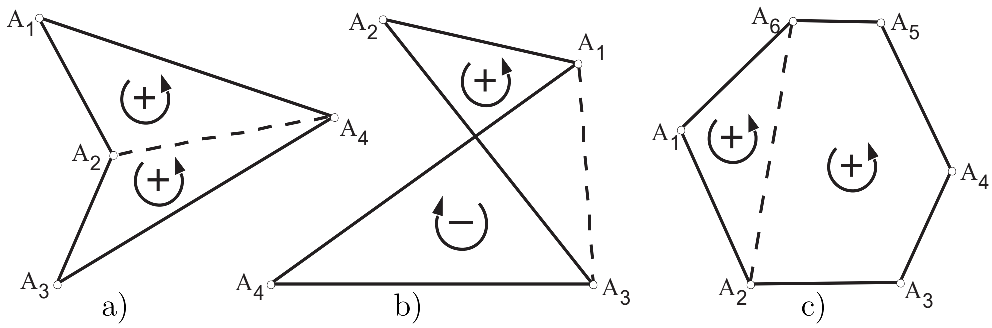
48. **Zerlegungssatz.** *Ist* $\mathbf{A} := (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{C}^n$ *mit* $n \geq 2$ *und ist* $\mathbf{B} := (A_r, A_{r+1}, \ldots, A_s)$ *sowie* $\mathbf{C} := (A_s, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_r)$ *mit* $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ *und* $r < s$, *so ist* $\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{B} + \mathcal{D}et\,\mathbf{C} = \mathcal{D}et\,\mathbf{A}}$.

(Zur Verdeutlichung werden in Figuren stets die Ränder mit eingezeichnet.)

Beweis: Wegen $\det(X,Y) = -\det(Y,X)\ \ \forall\ X,Y \in \mathbb{C}$ ist $\mathcal{D}et\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\det(A_r, A_{r+1}) + \cdots + \det(A_{s-1}, A_s) + \det(A_s, A_r)] + \frac{1}{2}[\det(A_s, A_{s+1}) + \cdots + \det(A_n, A_1) + \cdots + \det(A_{r-1}, A_r) + \det(A_r, A_s)] = \mathcal{D}et\mathbf{B} + \mathcal{D}et\mathbf{C}$. □

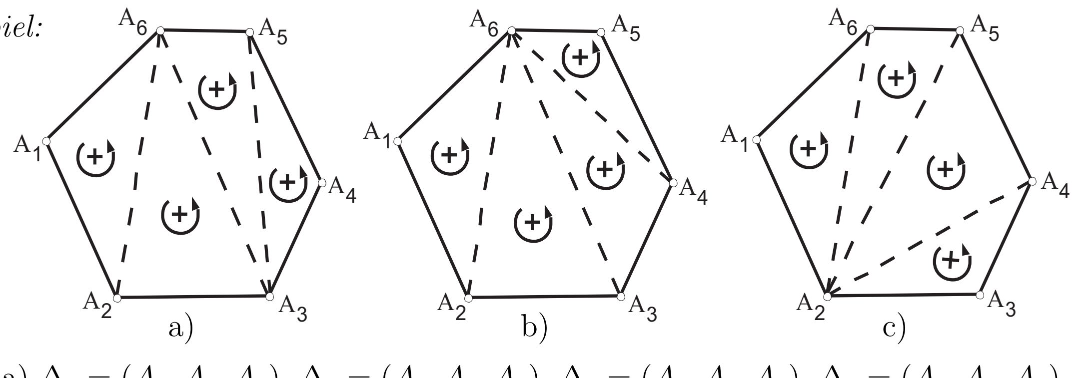
49. In 48. wird $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ eine **echte Zerlegung** von $\mathbf{A}$ in die **Teile** $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ genannt, wenn $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^j \ \wedge\ \mathbf{C} \in \mathbb{C}^k$ mit $3 \le j \le n-1 \ \wedge\ 3 \le k \le n-1$ ist, wenn also $\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ weniger Ecken als $\mathbf{A}$ haben.

Im Falle $n \ge 4$ sind echte Zerlegungen von $\mathbf{A}$ offenbar möglich; man kann z.B. $\mathbf{B} := (A_2, A_3, \ldots, A_n)$ und $\mathbf{C} := (A_n, A_1, A_2)$ oder auch $\mathbf{B} := (A_1, A_2, A_3)$ und $\mathbf{C} := (A_3, \ldots, A_n, A_1)$ wählen.



Die bei einer echten Zerlegung erhaltenen Teile können, soweit sie wenigstens 4 Ecken haben, abermals echt zerlegt werden. Indem man diesen Zerlegungsprozess so weit wie möglich weiterführt — z.B., indem man bei jedem einzelnen Zerlegungsprozess ein Tripel abspaltet, so daß das Restteil dann eine Ecke weniger hat — , gelangt man zu einer Zerlegung von $\mathbf{A}$ in lauter Tripel $\Delta_1, \ldots, \Delta_t$, die jeweils aus drei der Ecken $A_1, \ldots, A_n$ von $\mathbf{A}$ gebildet sind; hierbei ist $t = n-2$, wenn $n \ge 3$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ ist. Man bezeichnet $(\Delta_1, \ldots, \Delta_t)$ für $t = n-2 \ge 1$ als eine **Triangulierung** von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$.

Beispiel:



a) $\Delta_1 = (A_3, A_4, A_5)$, $\Delta_2 = (A_5, A_6, A_3)$, $\Delta_3 = (A_6, A_2, A_3)$, $\Delta_4 = (A_6, A_1, A_2)$,
b) $\Delta_1' = (A_4, A_5, A_6)$, $\Delta_2' = (A_6, A_3, A_4)$, $\Delta_3' = (A_6, A_2, A_3)$, $\Delta_4' = (A_6, A_1, A_2)$,
c) $\Delta_1'' = (A_2, A_3, A_4)$, $\Delta_2'' = (A_5, A_6, A_2)$, $\Delta_3'' = (A_2, A_4, A_5)$, $\Delta_4'' = (A_6, A_1, A_2)$.

Für $n \ge 4$ hat $\mathbf{A}$ stets mehrere mögliche Triangulierungen, aber ganz gleich, wie diese gewählt werden, nach Satz 48 gilt:

50. **Triangulierungssatz.** *Ist* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ *mit* $n \ge 3$ *und ist* $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2}$ *eine Triangulierung von* $\mathbf{A}$, *so ist* $\boxed{\mathcal{D}et\,\mathbf{A} = \mathcal{D}et\,\Delta_1 + \mathcal{D}et\,\Delta_2 + \cdots + \mathcal{D}et\,\Delta_{n-2}}$.

Weiter zeigen wir

51. **Satz.** Für $(A,B,C) \in \mathbb{C}^3$ gilt:

(i) $\mathcal{D}et(A,B,C) = \frac{1}{2} \cdot \det(B-A, C-A)$.

(ii) $\mathcal{D}et(A,B,C) = 0 \;\Leftrightarrow\; A,B,C$ sind kollinear.

Beweis: (i) Nach 9.12. ist $\frac{1}{2} \cdot \det(B-A,C-A) = \frac{1}{2} \cdot (\det(B,C) - \det(B,A) - \det(A,C) + \det(A,A)) = \frac{1}{2} \cdot (\det(B,C) + \det(A,B) + \det(C,A)) = \mathcal{D}et(A,B,C)$.
(ii) folgt aus (i) und 9.12.(8). □

52. **Satz.** *Für $(A_1,\dots,A_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ gilt:*

(i) *Es ist $\mathcal{D}et(A_1,\dots,A_n) = \mathcal{D}et(A_r,\dots,A_n,A_1,\dots,A_{r-1}) \;\; \forall\, r \in \{2,\dots,n\}$, d.h. eine „zyklische“ Vertauschung der Ecken läßt das Determinantenmaß unverändert. Dagegen ändert sich bei einer „antizyklischen“ Vertauschung das Vorzeichen, denn es gilt*

(ii) Es ist $\mathcal{D}et(A_n,A_{n-1},\dots,A_2,A_1) = -\mathcal{D}et(A_1,\dots,A_n)$.

Beweis: (i) folgt direkt aus 47., und (ii) ergibt sich aus 47. in Verbindung mit 9.12.(3). □

Ist $\mathbf{A} = (A_1,\dots,A_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$ und ist $\varphi \in \mathrm{Koll}(\mathbb{C})$, so sei

$$\varphi(\mathbf{A}) := (\varphi(A_1),\dots,\varphi(A_n)).$$

Damit ergibt sich als weitere *Haupteigenschaft* des Determinantenmaßes:

53. **Satz.** *Ist φ eine Kollineation von $\mathbb{C}$ und ist $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 2$, so ist*

$$\boxed{\mathcal{D}et\ \varphi(\mathbf{A}) = \det\varphi \cdot \mathcal{D}et\,\mathbf{A}}.$$

Beweis: Nach 50. ist es hinreichend, den Satz für $\Delta = (A,B,C) \in \mathbb{C}^3$ zu beweisen:

a) Ist τ die Translation $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X + U$ mit $U \in \mathbb{C}$, so ist
$\mathcal{D}et\ \tau(\Delta) \overset{51.}{=} \frac{1}{2} \cdot \det(\tau(B)-\tau(A), \tau(C)-\tau(A)) = \frac{1}{2} \cdot \det(B-A, C-A) \overset{51.}{=} \mathcal{D}et(A,B,C)$.

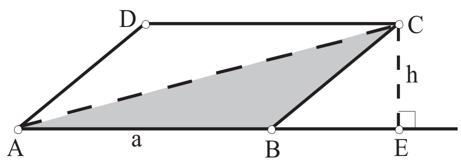
b) Ist $\alpha \in GL(\mathbb{C})$, so führt 51.(ii) auf $\mathcal{D}et\ \alpha(\Delta) = 0 = \mathcal{D}et\Delta$, falls A,B,C kollinear sind. Ist dies nicht der Fall, so gibt es nach 9.37. ein $\beta \in GL(\mathbb{C})$ mit $\beta(1) = B-A \wedge \beta(i) = C-A$, und dann führen 51. und 9.35. auf $\mathcal{D}et\ \alpha(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \det(\alpha(B) - \alpha(A), \alpha(C) - \alpha(A)) = \frac{1}{2} \cdot \det(\alpha \circ \beta(1), \alpha \circ \beta(i)) = \frac{1}{2} \cdot \det(\alpha \circ \beta) = \frac{1}{2} \cdot \det\alpha \cdot \det\beta = \det\alpha \cdot \frac{1}{2}\det(\beta(1),\beta(i)) = \det\alpha \cdot \frac{1}{2}\det(B-A, C-A) = \det\alpha \cdot \mathcal{D}et\Delta$.

c) Aus a), b) und 9.33. folgt die Behauptung. □

54. **Corollar 1.** *Das Determinantenmaß bleibt unverändert bei Anwendung einer geraden Bewegung oder einer Scherung.*
Es ändert lediglich sein Vorzeichen bei Anwendung einer ungeraden Bewegung.

Beweis: 53., 15., 44.(iii). □

55. **Corollar 2.** *Ist (A,B,C,D) ein Parallelogramm von $\mathbb{C}$ und ist E der Fußpunkt des Lotes von C auf $\langle A,B\rangle$, so gilt für $a := |A-B|$ und $h := |C-E|$:*



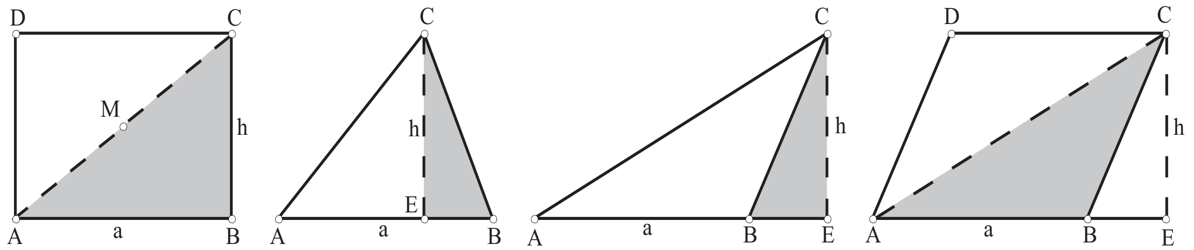
(i) Es ist $|\mathcal{D}et\,(A,B,C,D)| = a \cdot h$.

(ii) Es ist $|\mathcal{D}et\,(A,B,C)| = \frac{1}{2}a \cdot h$.

Beweis: Nach Anwendung einer Bewegung dürfen wir gemäß 54. o.B.d.A. von $A = 0$, $B = a, D = d+h\cdot i$ und $C = a+d+h\cdot i$ mit $d \in \mathbb{R}$ ausgehen. Da die Dreiecke (A, B, C) und (C, D, A) vermittels der Punktspiegelung an $\frac{1}{2}(A+C)$ kongruent sind, folgt mit 50., 51. und 54.: $|\mathcal{D}et(A, B, C, D)| = 2 \cdot |\mathcal{D}et(A, B, C)| = |\det(B-A, C-A)| = |\det(a, d+hi)| = a \cdot h$. $\square$

H. Flächenmessung und Orientierung

56. a) Ist (A, B, C, D) ein **Rechteck**, also ein Parallelogramm mit $\langle A, B\rangle \perp \langle B, C\rangle$, so ist es aufgrund unserer intuitiven Vorstellungen vom Flächenbegriff naheliegend, die Fläche von (A, B, C, D), die wir anschaulich als das vom Rand umschlossene Gebiet deuten, durch die Zahl $|A - B| \cdot |B - C|$ zu messen (Figur (i)). Dies wird in Schulbüchern in der Regel ausführlich motiviert, und wir werden diesen Ansatz sinnvollerweise übernehmen.



(i) (ii) (iii) (iv)

b) Da sich das Rechteck (A, B, C, D) vermittels der Punktspiegelung an $M{:=}\frac{1}{2}(A+C)$ in die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke (A, B, C) und (C, D, A) zerlegen läßt, ordnet man dem rechtwinkligen Dreieck (A, B, C) den Flächenwert $\frac{1}{2}\, a \cdot h$ mit $a := |A-B|$ und $h := |B-C|$ zu (Figur (i)). Da sich der Flächenwert für ein beliebiges Dreieck aus Summe oder Differenz der Flächenwerte zweier rechtwinkliger Dreiecke ermitteln läßt (Figur (ii), (iii)) und da sich ein Parallelogramm aus zwei gleichsinnig kongruenten Dreiecken zusammensetzen läßt (Figur (iv)), betrachtet man die Zahl „*Grundseite mal Höhe*“ für Parallelogramme und „ $\frac{1}{2}$*Grundseite mal Höhe*“ für Dreiecke als Maß für die Größe der Fläche.

c) Aus b) erkennen wir mit 55., daß der *Absolutbetrag des Determinantenmaßes* für Dreiecke und für Parallelogramme *genau das zugehörige Flächenmaß* liefert.

Deshalb legen wir nun mit Blick auf den Triangulierungssatz 50. fest:

57. Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 3$ und ist $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2})$ eine Triangulierung von $\mathbf{A}$, so wird $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2})$ **schlicht** genannt, wenn entweder

(α) $\boxed{\mathcal{D}et\Delta_k \geq 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n-2}$ oder (β) $\boxed{\mathcal{D}et\Delta_k \leq 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n-2}$

gilt, wenn also die Determinantenmaße keine unterschiedlichen Vorzeichen aufweisen.

Ferner wird $\mathbf{A}$ genau dann als **orientiert** bezeichnet, wenn $\mathbf{A}$ wenigstens *eine* schlichte Triangulierung besitzt.

Wenn $\mathbf{A}$ orientiert ist, dann wird $\boxed{F(\mathbf{A}) := |\mathcal{D}et\mathbf{A}|}$ das **Flächenmaß von A** genannt.

Anschaulich stellt man sich hierbei vor, daß $F(\mathbf{A})$ die Größe des von $\mathbf{Rd}(\mathbf{A})$ „umschlossenen Gebietes“ mißt, welches durch die Dreiecke einer schlichten Triangulierung festgelegt ist. Dabei deutet man die Punktmenge $[R, S, T] := \bigcup_{X \in [S,T]} [R, X]$ als die **Fläche** eines *einzelnen* zugehörigen Tripels (R, S, T).

Ist $\mathbf{A}$ orientiert, so heißt $\mathbf{A}$ **positiv orientiert** im Falle $\mathcal{D}et\,\mathbf{A} > 0$ und **negativ orientiert** im Falle $\mathcal{D}et\,\mathbf{A} < 0$.

Als wichtiges Ergebnis notieren wir

58. **Hauptsatz der Flächenmessung.**

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 3$ und ist $\mathbf{A}$ orientiert, so gilt:

(i) Es ist $\boxed{F(\mathbf{A}) = F(\Delta_1) + F(\Delta_2) + \cdots + F(\Delta_{n-2})}$
für jede schlichte Triangulierung $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2})$ von $\mathbf{A}$.

(ii) Ist $(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ eine Zerlegung von $\mathbf{A}$ mit $\mathcal{D}et\mathbf{B} \cdot \mathcal{D}et\mathbf{C} \geq 0$ und sind $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ orientiert, so ist $\boxed{F(\mathbf{A}) = F(\mathbf{B}) + F(\mathbf{C})}$.

(iii) Ist φ eine Kollineation von $\mathbb{C}$, so ist $F(\varphi(\mathbf{A})) = |\det \varphi| \cdot F(\mathbf{A})$.

Beweis: 48., 50., 53., 57.. □

59. Nach 58.(iii) ist die Determinante einer Kollineation φ vom Betrag her genau der Flächenverzerrungsfaktor für Figuren bei Anwendung von φ.

Insbesondere bedeutet dies, daß *jede Bewegung und jede Scherung flächentreu* ist.

Nachdem wir mit Hilfe des *Determinantenmaßes* wichtige Aussagen zur Flächenmessung gewonnen haben, wenden wir uns nun der überraschenden Tatsache zu, daß dieses Maß — aufgrund seines Vorzeichens — auch einiges über **Orientierung** aussagt.

Dazu zeigen wir zunächst

60. **Satz über Orientierung.** *Es gilt:*

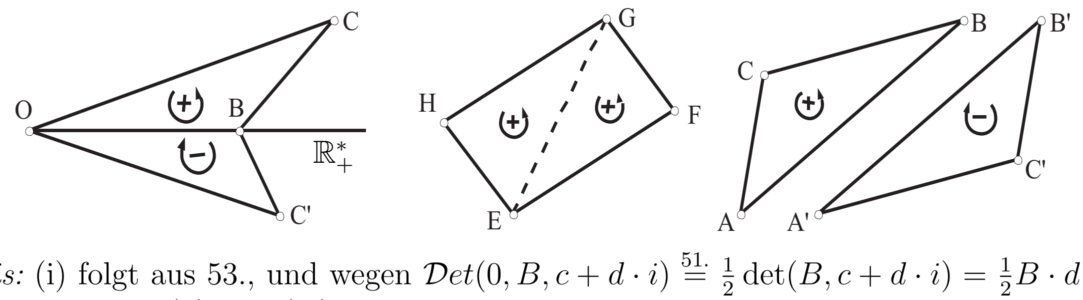
(i) Kollineationen mit positiver Determinante erhalten die Orientierung, und Kollineationen mit negativer Determinante kehren die Orientierung um.

(ii) Die Dreiecke $(0, B, C)$ mit $B \in \mathbb{R}_+^*$ und $Im(C) > 0$ sind **positiv** *orientiert.*

(iii) *Die Dreiecke $(0, B, C)$ mit $B \in \mathbb{R}_+^*$ und $Im(C) < 0$ sind* **negativ** *orientiert.*

(iv) Jedes geordnete Dreieck und jedes Parallelogramm ist orientiert.

(v) Ein Parallelogramm (E, F, G, H) ist genau dann positiv orientiert, wenn dies für (E, F, G) zutrifft.

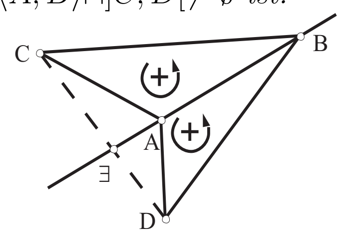


Beweis: (i) folgt aus 53., und wegen $\mathcal{D}et(0, B, c + d \cdot i) \overset{51.}{=} \frac{1}{2}\det(B, c + d \cdot i) = \frac{1}{2}B \cdot d$ für $B, c, d \in \mathbb{R}$ gelten (ii) und (iii).
Ist (E, F, G, H) ein Parallelogramm, so ist $((E, F, G), (G, H, E))$ eine Triangulierung aus gleichsinnig kongruenten Dreiecken (vermittels der Punktspiegelung an $\frac{1}{2}(E + G)$). Damit folgen die verbleibenden Aussagen. □

61. Ist ein geordnetes Dreieck (A, B, C) *positiv orientiert*, so wird sein Rand gemäß $A \to B \to C \to A$ anschaulich „gegen den Uhrzeigersinn" durchlaufen. Dagegen entspricht eine *negative Orientierung* anschaulich einer Randdurchlaufung „*im Uhrzeigersinn.*"

Ergänzend zeigen wir

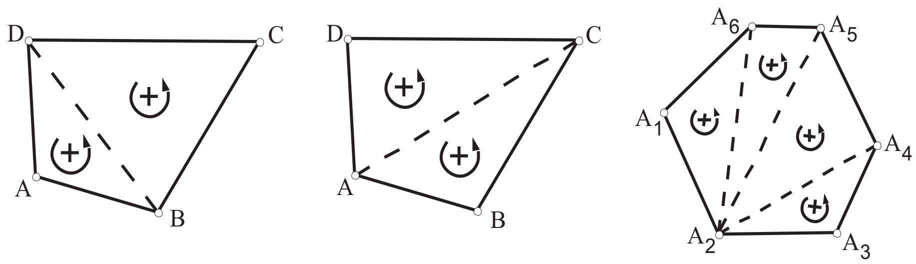
62. **Satz.** *Geordnete Dreiecke (A, B, C), (B, A, D) sind genau dann gleichorientiert, wenn $\langle A, B\rangle \cap]C, D[\neq \emptyset$ ist.*



Beweis: Nach Anwendung einer gleichsinnigen Bewegung dürfen wir gemäß 54. o.B.d.A. von $A = 0$ und $B \in \mathbb{R}_+^*$ ausgehen. Nach 60. und 52.(ii) sind (A, B, C) und (B, A, D) genau dann gleichorientiert, wenn $0 \in]Im\, C, Im\, D[$ ist. Setzen wir noch $\{E\} := (C + \mathbb{R}) \cap (D + \mathbb{R}i)$, so erhalten wir $0 \in]Im\, C, Im\, D[\Leftrightarrow \mathbb{R} \cap]E, D[\neq \emptyset \overset{9.26.}{\Leftrightarrow} \langle A, B\rangle \cap]C, D[\neq \emptyset$. □

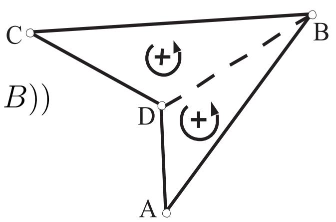
63. Unter Beachtung von 62. erörtern wir nun einige *Beispiele*:

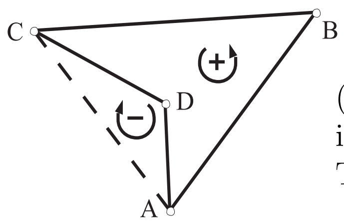
a) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 3$ gegeben und ist *jede* Triangulierung von $\mathbf{A}$ schlicht, so bedeutet dies anschaulich gemäß 62., daß $\mathbf{A}$ keine „einspringenden" Ecken hat:



b) Wenn ein Viereck eine „einspringende" Ecke hat, aber nicht „überschlagen" ist, dann besitzt es nach 62. genau eine schlichte Triangulierung:

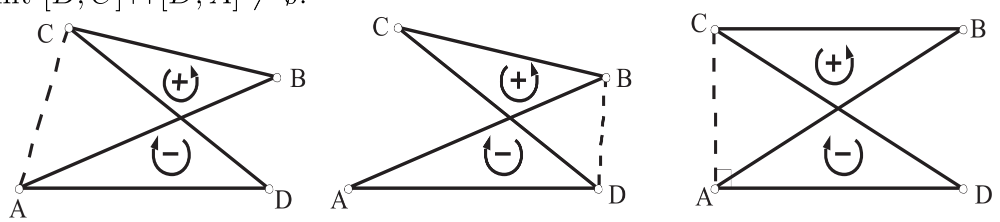
$((B, C, D), (D, A, B))$ ist eine schlichte Triangulierung





$((A, B, C), (C, D, A))$ ist keine schlichte Triangulierung

c) „Überschlagene Vierecke" sind Vierecke vom Typ (A, B, C, D) mit $[A, B] \cap [C, D] \neq \emptyset$ oder mit $[B, C] \cap [D, A] \neq \emptyset$:



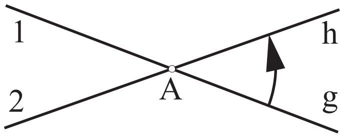
Weder $((A, B, C), (C, D, A))$ noch $((B, C, D), (D, A, B))$ sind hier schlicht. Deshalb besitzt das überschlagene Viereck (A, B, C, D) überhaupt keine schlichte Triangulierung und hat somit *keine Orientierung* und *kein Flächenmaß.*

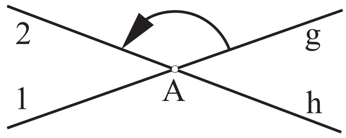
Wenn z.B. (A, D, B, C) ein Rechteck ist, dann ist $\mathcal{D}et(A, B, C, D) \overset{48.}{=} \mathcal{D}et(A, B, C) + \mathcal{D}et(C, D, A) = 0$, da (A, B, C) und (C, D, A) – vermittels der Spiegelung an der Geraden $\langle \frac{1}{2}(A+C), \frac{1}{2}(B+D)\rangle$ – gegensinnig kongruent sind.

I. Winkel zwischen Geraden

Die Behandlung des Winkelbegriffes im Mathematikunterricht ist komplizierter, als gemeinhin angenommen wird.
Man betrachtet nichtorientierte und orientierte Winkel zwischen Strahlen, aber auch Winkel zwischen Geraden, und aus der Physik kennt man die Torsionswinkel.
Jeder Winkeltyp wird anders gemessen, und deshalb ist es sinnvoll, deutlich zwischen diesen Typen zu unterscheiden.

Die nichtorientierten und orientierten Winkel zwischen Strahlen werden wir im Rahmen der Analysis behandeln, und deshalb wollen wir hier jetzt nur *Winkel zwischen Geraden* betrachten:





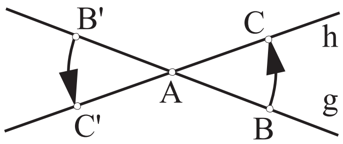
64. a) Sind $g, h \in \mathbb{G}$, so wird das (geordnete) Paar (g, h) als **Geradenwinkel** oder **$\mathbb{G}$–Winkel** mit g als **erstem Schenkel** und h als **zweitem Schenkel** bezeichnet. Wenn ein Punkt $A \in g \cap h$ existiert, dann wird A auch ein **Scheitel** von (g, h) genannt.

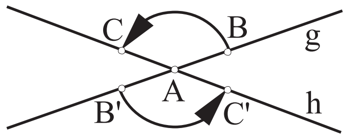
Der $\mathbb{G}$–Winkel (g, h) heißt **Nullwinkel** im Falle $g \| h$ und **rechter Winkel** im Falle $g \perp h$.

b) In Figuren werden $\mathbb{G}$–Winkel stets durch einen gebogenen Pfeil markiert, der *gegen den Uhrzeigersinn (!)* vom ersten zum zweiten Schenkel verläuft, denn *hier spielt die Reihenfolge der Schenkel eine wesentliche Rolle.*

Mit Blick auf 61. bedeutet „*gegen den Uhrzeigersinn*“:

Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \cap h = \{A\}$ und soll $B \in g \backslash \{A\}$ den Anfangspunkt des Pfeiles bilden,





so muß $C \in h \backslash \{A\}$ derart gewählt werden, daß (A, B, C) *positiv orientiert* ist; der gebogene Pfeil ist dann von B nach C mit der Spitze bei C zu zeichnen.

c) Es erweist sich als nützlich, deutlich zwischen der *geometrischen Figur* „$\mathbb{G}$–Winkel“ und dem zugehörigen *Winkelmaß* zu unterscheiden, das erst noch zu definieren ist. Solange die Sprechweise dadurch nicht zu schwerfällig wird, werden wir diese Unterscheidung beachten.

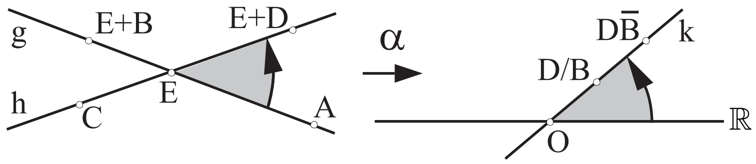
65. Als erstes legen wir fest, wie $\mathbb{G}$–Winkel miteinander verglichen werden sollen:

Zwei $\mathbb{G}$–Winkel $(g, h), (m, n)$ heißen **gleichgroß** oder **konform**, in Zeichen: $(g, h) \overset{\triangle}{=} (m, n)$, wenn $(g \| h \ \wedge \ m \| n)$ gilt, oder wenn sie *gleichsinnig kongruent* sind, d.h. wenn es eine *gerade (!)* Bewegung α mit $m = \alpha(g) \ \wedge \ n = \alpha(h)$ gibt.

In Bezug auf die damit erklärte „*Winkelvergleichung*“ beweisen wir nun eine *Grundeigenschaft* von $\mathbb{G}$–Winkeln:

66. **Satz.** *Sind Geraden* $\boxed{g = A + \mathbb{R}B}$ *und* $\boxed{h = C + \mathbb{R}D}$ *mit* $A, C \in \mathbb{C}$ *und* $B, D \in \mathbb{C}^*$

gegeben, so ist $\boxed{k := \mathbb{R}\dfrac{D}{B} = \mathbb{R}\,\overline{B}D}$ *die einzige Gerade durch* 0 *mit* $\boxed{(g,h) \triangleq (\mathbb{R}, k)}$.



Beweis: a) Es sei $g \| h$. Dann ist $\mathbb{R}$ die einzige Gerade durch 0, die zu $\mathbb{R}$ parallel ist, und es ist $g \| h \overset{9.18.}{\Leftrightarrow} \mathbb{R}B = \mathbb{R}D \;\Leftrightarrow\; D/B \in \mathbb{R}^* \;\Leftrightarrow\; \overline{B}D \in \mathbb{R}^*$.
b) Es sei $g \cap h = \{E\}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to (X - E) \cdot |B|/B$ eine gerade Bewegung mit $\alpha(E) = 0$, $\alpha(E + B) = |B| \in \mathbb{R}^*_+$, $\alpha(E + D) = D \cdot |B|/B \in \mathbb{R}^*(D/B) = \mathbb{R}^*\overline{B}D$, d.h. es ist $\alpha(g) = \mathbb{R}$, $\alpha(h) = k$ und damit $(g,h) \triangleq (\mathbb{R}, k)$.
Ist außerdem auch $m \in \mathbb{G}$ mit $0 \in m$ und ist $\beta \in \mathbb{B}^+$ mit $\beta(g) = \mathbb{R} \;\wedge\; \beta(h) = m$, so ist $\gamma := \beta \circ \alpha^{-1} \in \mathbb{B}^+$ mit $\gamma(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \;\wedge\; \gamma(k) = m$, und wegen $\mathbb{R} \nparallel k$ ist $\{\gamma(0)\} = \gamma(\mathbb{R} \cap k) = \mathbb{R} \cap m = \{0\}$. Es folgt $\gamma(1) \in \{1, -1\}$, also $\gamma = id_{\mathbb{C}}$ oder $\gamma = \widetilde{0}$ (vgl. 35.) und damit $k = \gamma(k) = m$. □

67. Je nachdem, wie die Gerade k in 66. relativ zu $\mathbb{R}$ „liegt“, ist sie ein Maß für die Größe des $\mathbb{G}$–Winkels (g,h).

Deshalb wird k auch als **Meßnadel** oder als **Öffnung von** (g,h) bezeichnet, in Zeichen: $\boxed{k = \angle(g,h)}$.

Mit dieser Notation erhalten wir

$$(*) \qquad \boxed{\angle(A + \mathbb{R}B, C + \mathbb{R}D) = \mathbb{R}\,(D/B) = \mathbb{R}\,\overline{B}D}$$

für $A, C \in \mathbb{C}$ und $B, D \in \mathbb{C}^*$ (vgl. 66.).

Wir interpretieren die Menge $\mathbb{G}_0$ aller Geraden von $\mathbb{C}$ durch den Punkt 0 hier nun als die „*Stricheinteilung eines* $180°$*–Winkelmessers*“.

Tatsächlich wollen wir die „Größe“ von $\mathbb{G}$–Winkeln vorläufig (!) *nicht durch Gradzahlen*, sondern *durch Öffnungen* messen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil es ohne Kenntnisse in der Analysis kaum möglich ist, eine exakte Verbindung zwischen Meßnadeln und Gradzahlen herzustellen. (Im Schulunterricht wird anhand einer Plausibilitätsbetrachtung einfach erklärt, „daß das geht“; im Rahmen einer wissenschaftlichen Mathematik ist ein solches Vorgehen aber *nicht* akzeptabel.)

Wir nehmen hier einmal mehr den „strukturellen“ Standpunkt ein, nach welchem es gleichgültig ist, ob man Winkel mit einer Gruppe von Gradzahlen („Rechnen modulo 180°“) oder mit einer dazu isomorphen Gruppe $\mathbb{G}_0(\oplus)$ von Meßnadeln mißt.

Auf diese Weise läßt es sich vermeiden, Aussagen zu benutzen, die wir erst später beweisen können, und zugleich kommt der gruppentheoretische Standpunkt zum Zuge, der *jede* Verknüpfung akzeptiert, die die Gruppengesetze erfüllt.

Die Möglichkeit eines widerspruchsfreien Rechnens mit Meßnadeln ergibt sich wie folgt:

68. *Aus der Menge* $\mathbb{G}_0$ *der Meßnadeln wird durch die Vorschrift*

$$(i) \qquad \boxed{\mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}D := \mathbb{R}\,(B{\cdot}D)} \qquad \forall\ B, D \in \mathbb{C}^*$$

eine **abelsche Gruppe** $\mathbb{G}_0(\oplus)$ *mit dem* **neutralen Element** $\mathbb{R}$.

Um dies einzusehen, müssen wir uns zuerst davon überzeugen, daß die Verknüpfung *wohldefiniert* ist (vgl. 7.2.):
Sind $B, D, E, F \in \mathbb{C}^*$ mit $\mathbb{R}B = \mathbb{R}E \ \wedge\ \mathbb{R}D = \mathbb{R}F$, so gibt es $\beta, \delta \in \mathbb{R}^*$ mit $E = \beta B$ und $F = \delta D$, und dann ist $\mathbb{R}E \oplus \mathbb{R}F = \mathbb{R}\,(E \cdot F) = \mathbb{R}\,(\beta \cdot \delta \cdot B \cdot D) = \mathbb{R}\,(B{\cdot}D) = \mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}D$.

Damit ist nun klar, daß $\mathbb{G}_0(\oplus)$ ein *Gruppoid* ist. Wegen

(ii) $\mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}D = \mathbb{R}\,(B{\cdot}D) = \mathbb{R}\,(D{\cdot}B) = \mathbb{R}D \oplus \mathbb{R}B \quad \forall\ B, D \in \mathbb{C}^*$

ist $\mathbb{G}_0(\oplus)$ *kommutativ* und wegen

(iii) $(\mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}D) \oplus \mathbb{R}F = \mathbb{R}\,(B{\cdot}D{\cdot}F) = \mathbb{R}B \oplus (\mathbb{R}D \oplus \mathbb{R}F) \quad \forall\ B, D, F \in \mathbb{C}^*$

auch *assoziativ*. Wegen $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1$ und

(iv) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}B = \mathbb{R}\,(1{\cdot}B) = \mathbb{R}B \quad \forall\ B \in \mathbb{C}^*$

ist die $\boxed{\text{Meßnadel } \mathbb{R} \text{ das neutrale Element}}$ von $\mathbb{G}_0(\oplus)$,

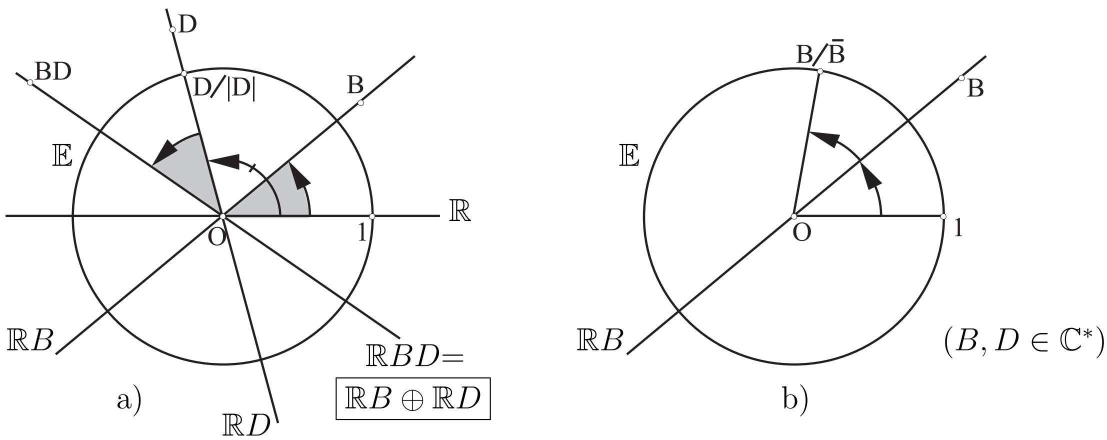
und wegen $\mathbb{R}B \oplus \mathbb{R}\overline{B} = \mathbb{R}B\overline{B} = \mathbb{R}$ gilt

(v) $\ominus\mathbb{R}B = \mathbb{R}\overline{B} = \mathbb{R}B^{-1} \quad \forall\ B \in \mathbb{C}^*$.

Mithin ist $\mathbb{G}_0(\oplus)$ eine *abelsche Gruppe*.

Für $B \in \mathbb{C}^*$ wird $\boxed{\ominus\mathbb{R}B = \mathbb{R}\overline{B} = \kappa(\mathbb{R}B)}$ die zu $\mathbb{R}B$ **konjugierte Öffnung** genannt; sie entsteht aus $\mathbb{R}B$ durch Spiegelung an $\mathbb{R}$.

Wir verwenden das Verknüpfungssymbol $\oplus$, weil wir es gewohnt sind, Meßgrößen für Winkel zu *addieren*.



Da $(\mathbb{R}, \mathbb{R}B)$ (für $B, D \in \mathbb{C}^*$) durch die Drehung $\alpha : X \to \dfrac{D}{|D|} \cdot X$ auf $(\alpha(\mathbb{R}), \alpha(\mathbb{R}B)) = (\mathbb{R}D, \mathbb{R}\dfrac{D}{|D|} \cdot B) = (\mathbb{R}D, \mathbb{R}(B \cdot D))$ abgebildet wird, hat unsere Verknüpfung $\oplus$ tatsächlich etwas mit Winkeladdition zu tun; vgl. Figur a).

Im übrigen ist die Gruppe $\mathbb{G}_0(\oplus)$ vermittels $\varphi : \mathbb{G}_0 \to \mathbb{E} : \mathbb{R}B \to B/\overline{B}$ isomorph zu $\mathbb{E}(\cdot)$, wie man sich überlegen kann (Figur b)).

69. Nach Beweis a) von 66. gilt

(i) $\boxed{g \| h \;\Leftrightarrow\; \angle(g,h) = \mathbb{R}}$ $\quad \forall\, g,h \in \mathbb{G}$,

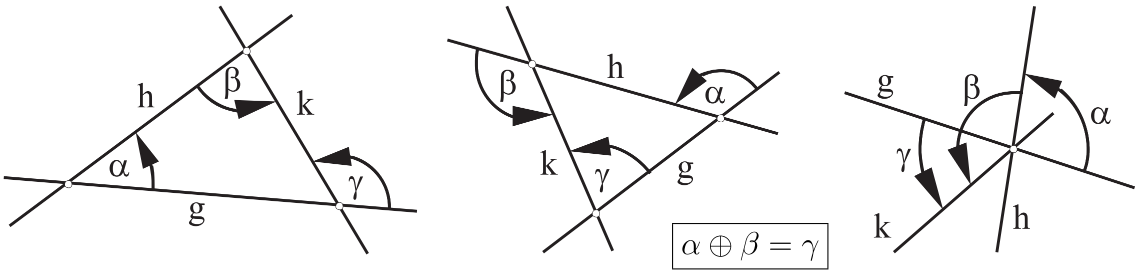
und nach 11.(iii) haben wir

(ii) $\boxed{g \perp h \;\Leftrightarrow\; \angle(g,h) = \mathbb{R}i}$ $\quad \forall\, g,h \in \mathbb{G}$.

Demnach ist die reelle Achse $\mathbb{R}$ die **0°–Öffnung** und auch die **180°–Öffnung**, und die imaginäre Achse $\mathbb{R}i$ ist die **90°–Öffnung**. Nach (ii) *sind alle rechten Winkel konform.*

Als wichtig erweist sich nun

(iii) **Winkeladditionssatz**. *Es ist* $\boxed{\angle(g,h) \oplus \angle(h,k) = \angle(g,k)}$ $\quad \forall\, g,h,k \in \mathbb{G}$,



denn für $g = A + \mathbb{R}B \;\wedge\; h = C + \mathbb{R}D \;\wedge\; k = E + \mathbb{R}F$ mit $A, C, E \in \mathbb{C}$ und $B, D, F \in \mathbb{C}^*$ haben wir $\mathbb{R}\overline{B}D \oplus \mathbb{R}\overline{D}F = \mathbb{R}\overline{B} \cdot D\overline{D} \cdot F = \mathbb{R}\overline{B}F$ (vgl.67.($*$)).
Da hier außerdem $\overline{B}D = \overline{\overline{D}B}$ gilt, ergibt sich mit 68.(v) nun

(iv) $\boxed{\angle(g,h) = \ominus\angle(h,g)}$ $\quad \forall\, g,h \in \mathbb{G}$.

Aus (iii) und (iv) folgt

(v) $\boxed{\angle(g,h) \oplus \angle(h,k) \oplus \angle(k,g) = \mathbb{R}}$;

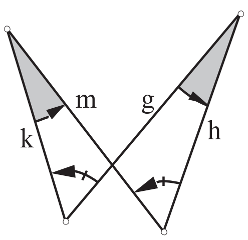
das ist der *Satz über die Winkelsumme im Dreieck* in **diesem** Winkelkalkül!
Da $\mathbb{B}^+(\circ)$ eine Gruppe ist, führt 66. mit $(g,h) \triangleq (\mathbb{R}, \angle(g,h))$ und $(m,n) \triangleq ((\mathbb{R}, \angle(m,n))$ auf

(vi) $\boxed{(g,h) \triangleq (m,n) \;\Leftrightarrow\; \angle(g,h) = \angle(m,n)}$ $\quad \forall\, g,h,m,n \in \mathbb{G}$,

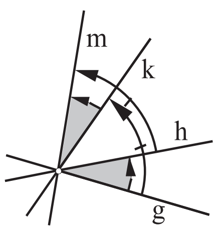
d.h. *zwei* $\mathbb{G}$*–Winkel sind genau dann konform, wenn sie die gleiche Öffnung haben.* Insbesondere ist die Konformität damit eine *Äquivalenzrelation auf* $\mathbb{G}\times\mathbb{G}$.

Wir zeigen nun
70. **Schenkelaustauschsatz.** *Sind* $g,h,k,m \in \mathbb{G}$, *so gilt*

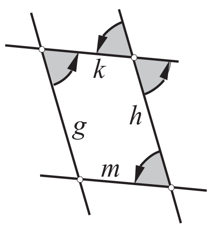
$$\boxed{(h,g) \triangleq (m,k) \;\Leftrightarrow\; (g,h) \triangleq (k,m) \;\Leftrightarrow\; (g,k) \triangleq (h,m)}.$$



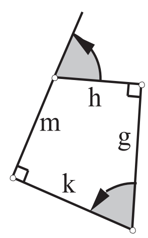
70. a)



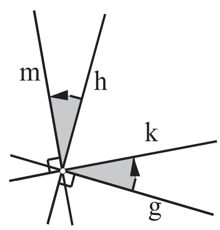
70. b)



71.



72. a)



72. b)

Beweis: Für $g = A' + \mathbb{R}A$, $h = B' + \mathbb{R}B$, $k = C' + \mathbb{R}C$ und $m = D' + \mathbb{R}D$ mit $A', B', C', D' \in \mathbb{C} \ \wedge \ A, B, C, D \in \mathbb{C}^*$ ist $\mathbb{R}\overline{B}A = \mathbb{R}\overline{D}C \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R}\overline{A}B = \mathbb{R}\overline{C}D \ \Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\overline{A}B \cdot \overline{B}C = \mathbb{R}\overline{C}D \cdot \overline{B}C \ \Leftrightarrow \ \mathbb{R}\overline{A}C = \mathbb{R}\overline{B}D.$ $\square$

71. **Corollar 1.** *Sind* $g, h, k, m \in \mathbb{G}$ *mit* $\boxed{g \| h}$, *so ist* $\boxed{k \| m \ \Leftrightarrow \ (g,k) \overset{\triangle}{-} (h,m)}$.

Beweis: Es ist $k \| m \ \Leftrightarrow \ \angle(g,h) = \mathbb{R} = \angle(k,m) \ \Leftrightarrow \ (g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m) \overset{70.}{\Leftrightarrow} (g,k) \overset{\triangle}{-} (h,m).$ $\square$

72. **Corollar 2.** *Sind* $g, h, k, m \in \mathbb{G}$ *mit* $\boxed{g \perp h}$, *so ist* $\boxed{k \perp m \ \Leftrightarrow \ (g,k) \overset{\triangle}{-} (h,m)}$.

Beweis: Es ist $k \perp m \ \Leftrightarrow \ \angle(g,h) {=} \mathbb{R}i {=} \angle(k,m) \ \Leftrightarrow \ (g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m) \ \Leftrightarrow \ (g,k) \overset{\triangle}{-} (h,m).$ $\square$

73. **Satz über Abtragbarkeit.** *Sind* $g, h, k \in \mathbb{G}$ *und* $A \in \mathbb{C}$, *so gibt es genau ein* $m \in \mathbb{G}$ *mit* $m \ni A \ \wedge \ (g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m)$ *und genau ein* $m \in \mathbb{G}$ *mit* $m \ni A \ \wedge \ (h,g) \overset{\triangle}{-} (m,k)$.

Beweis: Ist $m \in \mathbb{G}$ und $n := \angle(\mathbb{R},k) \oplus \angle(g,h)$, so ist $(h,g) \overset{\triangle}{-} (m,k) \overset{70.}{\Leftrightarrow} (g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m) \ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ \angle(\mathbb{R},n) = n = \angle(\mathbb{R},k) \oplus \angle(k,m) \overset{69.(iii)}{=} \angle(\mathbb{R},m) \overset{71.}{\Leftrightarrow} n \| m$. Mit 9.17.(iv) führt dies auf die Behauptung. $\square$

Die Konformität läßt sich wie folgt durch das Rechnen mit Spiegelungen beschreiben:

74. **Satz.** *Sind* $g, h, k, m \in \mathbb{G}$ *mit* $g \cap h \cap k \cap m \neq \emptyset$, *so ist* $\boxed{(g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m) \ \Leftrightarrow \ \tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{m}}$.

Beweis: a) Nach 33. gilt $\tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{k} \circ \tilde{m} \ \Rightarrow \ (g,h) \overset{\triangle}{-} (k,m)$.
b) Es sei $D \in g \cap h \cap k \cap m$. Ist $\tilde{g} \circ \tilde{h} \neq \tilde{k} \circ \tilde{m}$, so gibt es nach 29. ein $n \in \mathbb{G}$ mit $n \ni D$ und $\tilde{n} = \tilde{k} \circ \tilde{g} \circ \tilde{h} \neq \tilde{m}$. Es folgt $n \nparallel m$ und damit $(g,h) \overset{\triangle}{-} (k,n) \overset{\triangle}{\not-} (k,m)$ gemäß 33. und 71. $\square$

Die Sonderrolle der rechten Winkel wird unterstrichen durch

75, **Corollar.** *Sind* $g, h \in \mathbb{G}$ *mit* $g \nparallel h$, *so ist* $\boxed{(g,h) \overset{\triangle}{-} (h,g) \ \Leftrightarrow \ g \perp h}$.

Beweis: Es ist $(g,h) \overset{\triangle}{-} (h,g) \overset{74.}{\Leftrightarrow} \tilde{g} \circ \tilde{h} = \tilde{h} \circ \tilde{g} \overset{38.}{\Leftrightarrow} g \perp h.$ $\square$

Von besonderer Bedeutung ist nun auch

76. **Satz.** *Sind* $g, h \in \mathbb{G}$, *so gilt:*

(i) $\boxed{\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^+ \ \Rightarrow \ (\alpha(g), \alpha(h)) \overset{\triangle}{-} (g,h)}$,

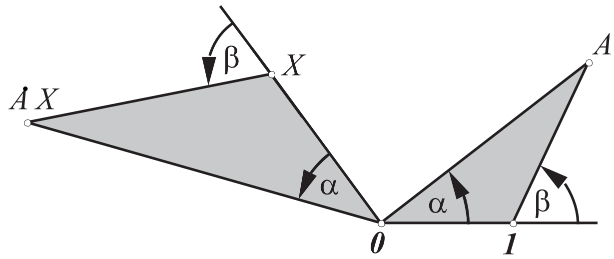
(ii) $\boxed{\beta \in \ddot{\mathbb{A}}^- \ \Rightarrow \ (\beta(g), \beta(h)) \overset{\triangle}{-} (h,g)}$,

d.h. gleichsinnige Ähnlichkeiten sind **öffnungstreu**, *und gegensinnige Ähnlichkeiten sind* **konjugiert–öffnungstreu**.

Beweis: Nach der Definition von $\overset{\triangle}{-}$ ist jede gerade Bewegung öffnungstreu, ebenso wegen 9.24.(iii) auch jede zentrische Streckung. Dagegen ist die Konjugation κ konjugiert–öffnungstreu, denn für $g = A + \mathbb{R}B$ und $h = C + \mathbb{R}D$ mit $A, C \in \mathbb{C}$ und $B, D \in \mathbb{C}^*$ ist $\angle(\kappa(g), \kappa(h)) = \mathbb{R}\overline{\overline{B}}\,\overline{D} = \mathbb{R}\overline{D}B = \angle(h,g)$.
Da jede Ähnlichkeit nach 9.(iv) und 46. durch Verkettung der hier betrachteten Abbildungen entsteht, ist der Satz gültig. $\square$

77. Nach 3., 6., 53., 57. und 76. sind die Elemente von $\ddot{\mathbb{A}}^+$ orientierungstreu und öffnungstreu, die von $\ddot{\mathbb{A}}^-$ dagegen orientierungsumkehrend und konjugiert–öffnungstreu.
Dies erklärt hinreichend die Bezeichnungen „gleichsinnig“ und „gegensinnig“.

78. In 9.23. hatten wir gesehen, daß die Addition der komplexen Zahlen nach dem *„Parallelogrammprinzip“* erfolgt, und in 9.25. hatten wir eine geometrische Konstruktion für die Multiplikation der reellen Zahlen kennengelernt.
Nach 21.(i) wissen wir auch, daß die Konjugation von $\mathbb{C}$ aus geometrischer Sicht einfach die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}$ ist, und aus 46. geht hervor, daß die Abbildung $\boxed{\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A \cdot X \;\text{ mit }\; A \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}$ sich durch das Hintereinanderausführen der Drehung $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to X \cdot A/|A|$ und der zentrischen Streckung $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : Y \to |A|\cdot Y$ gewinnen läßt, weshalb α auch als **Drehstreckung** bezeichnet wird.
Mit Hilfe des $\mathbb{G}$-Winkelkalküls können wir die Bilder der gleichsinnigen Ähnlichkeit α nun aber auch **direkt konstruieren:**



Nach 76. ist $\angle(\langle 0,1\rangle, \langle 0,A\rangle) = \angle(\langle 0,X\rangle, \langle 0,A{\cdot}X\rangle) \wedge \angle(\langle 0,1\rangle, \langle 1,A\rangle) = \angle(\langle 0,X\rangle, \langle X,A{\cdot}X\rangle)$ für jedes $X \in \mathbb{C}^*$, und folglich läßt sich $A{\cdot}X$ aus $0, 1, A, X$ durch Abtragen von zwei $\mathbb{G}$-Winkeln des Dreiecks $(0, 1, A)$ in 0 und in X gemäß 73. konstruieren.

Die hervorragende Verwendbarkeit der komplexen Zahlen für die ebene Geometrie beruht gerade darauf, daß die elementaren Verknüpfungen von $\mathbb{C}$ einfache geometrische Operationen darstellen.

12. Ausgewählte Sätze der Elementargeometrie

Nach René Thom, der 1958 die Fields–Medaille erhielt – das ist gewissermaßen der „Nobel–Preis für Mathematiker“ – haben Mathematiklehrer die Aufgabe, die Fähigkeiten der Schüler maximal zu entwickeln und insbesondere Aktivität, Eigeninitiative und Kreativität anzuregen.

Thom sagt, daß Theorien, die einen „spielerischen“ Aspekt aufweisen, hier sehr wohl von Nutzen sein können, und weiter, daß unter allen „Spielen“ die *euklidische Geometrie* mit ihren ständigen Bezügen zum intuitiv Gegebenen das *am wenigsten entbehrliche und das bedeutungsreichste* ist.

Es gibt in der Schule, so fährt Thom sinngemäß fort, viele geometrische, aber keine wirklichen algebraischen Probleme. Zur Lösung von geometrischen Problemen bedarf es einer Kombination aus Zeit, Anstrengung, Konzentration und Assoziationsvermögen, und gerade dies hilft, die Fähigkeiten der Schüler zu entwickeln. –

A. Ähnlichkeits– und Kongruenzsätze

1. Zwei geordnete Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') von $\mathbb{C}$ (vgl. 9.36.) heißen **gleichsinnig ähnlich** bzw. **gegensinnig ähnlich** bzw. **ähnlich**, wenn es ein h aus $\mathbb{A}^+$ bzw. aus $\mathbb{A}^-$ bzw. aus $\mathbb{A}$ gibt mit

$$(*) \quad \boxed{h(A) = A' \;\wedge\; h(B) = B' \;\wedge\; h(C) = C'}\,.$$

Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich die folgenden Aussagen für Dreiecke:

2. **Erster Ähnlichkeitssatz.** *Die geordneten Dreiecke* (A, B, C), (A', B', C') *von* $\mathbb{C}$ *sind genau dann gleichsinnig ähnlich, wenn* $\boxed{\dfrac{C-A}{B-A} = \dfrac{C'-A'}{B'-A'}}$ *ist.*

Beweis: Nach 11.5. gibt es genau ein $f \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $f(A) = A' \ \wedge \ f(B) = B'$, nämlich $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \frac{B'-A'}{B-A}(X-A) + A'$. Dann ist $f(C){=}C' \ \Leftrightarrow \ C'-A'{=}\frac{B'-A'}{B-A}(C-A)$. □

3. **Zweiter Ähnlichkeitssatz.** *Die geordneten Dreiecke* (A, B, C), (A', B', C') *von* $\mathbb{C}$ *sind genau dann gegensinnig ähnlich, wenn* $\boxed{\dfrac{\overline{C}-\overline{A}}{\overline{B}-\overline{A}} = \dfrac{C'-A'}{B'-A'}}$ *ist.*

Beweis: Nach 11.10. gibt es genau ein $g \in \ddot{\mathbb{A}}^-$ mit $g(A) = A' \ \wedge \ g(B) = B'$, nämlich $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \frac{B'-A'}{\overline{B}-\overline{A}}(\overline{X}-\overline{A}) + A'$. Dann ist $g(C){=}C' \ \Leftrightarrow \ C'-A'{=}\frac{B'-A'}{\overline{B}-\overline{A}}(\overline{C}-\overline{A})$. □

Die folgende Aussage bezieht sich auf einen Vergleich vom Typ „*Seite–Seite–Seite*“:

4. **Ähnlichkeitssatz (SSS).** *Die geordneten Dreiecke* (A, B, C), (A', B', C') *von* $\mathbb{C}$ *sind genau dann ähnlich, wenn* $\boxed{(*) \quad \dfrac{|B'-A'|}{|B-A|} = \dfrac{|A'-C'|}{|A-C|} = \dfrac{|C'-B'|}{|C-B|}}$ *gilt, und genau dann kongruent, wenn* $\boxed{(\diamond) \quad |B'-A'|{=}|B-A| \ \wedge \ |A'-C'|{=}|A-C| \ \wedge \ |C'-B'|{=}|C-B|}$ *gilt.*

Beweis: a) Es sei $(*)$ als gültig vorausgesetzt.
Nach 11.5. gibt es $f_1, f_2 \in \ddot{\mathbb{A}}^+$ mit $f_1(A) = f_2(A') = 0 \ \wedge \ f_1(B) = f_2(B') = 1$, und für $D := f_1(C)$ und $E := f_2(C')$ folgt $\dfrac{C-A}{B-A} = D$ sowie $\dfrac{C'-A'}{B'-A'} = E$ gemäß 2.. Dann ist $\dfrac{|D|}{|E|} = \dfrac{|C-A|}{|B-A|} \cdot \dfrac{|B'-A'|}{|C'-A'|} = 1$, und wegen $D - 1 = \dfrac{C-B}{B-A} \ \wedge \ E - 1 = \dfrac{C'-B'}{B'-A'}$ ist $\dfrac{|D-1|}{|E-1|} = \dfrac{|C-B|}{|B-A|} \cdot \dfrac{|B'-A'|}{|C'-B'|} = 1$. Mit 11.7. ergibt sich nun $E \in \{D, \overline{D}\}$, d.h. (A, B, C) und (A', B', C') sind ähnlich vermittels $f_2^{-1} \circ f_1$ im Falle $E = D$ und ähnlich vermittels $f_2^{-1} \circ \kappa \circ f_1$ im Falle $E = \overline{D}$. b) Die verbleibenden Aussagen folgen aus a) und 11.1. . □

Sind $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B \ \wedge \ B \neq C$, so schreiben wir abkürzend $\boxed{\angle(A, B, C)}$ statt $\angle(\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle)$. Damit ergibt sich die folgende Aussage vom Typ „*Winkel–Winkel*“:

5. **Ähnlichkeitssatz (WW).** *Die Dreiecke* (A, B, C), (A', B', C') *sind im Falle*

$$\boxed{(*) \quad \angle(B, A, C) = \angle(B', A', C') \ \wedge \ \angle(C, B, A) = \angle(C', B', A')}$$

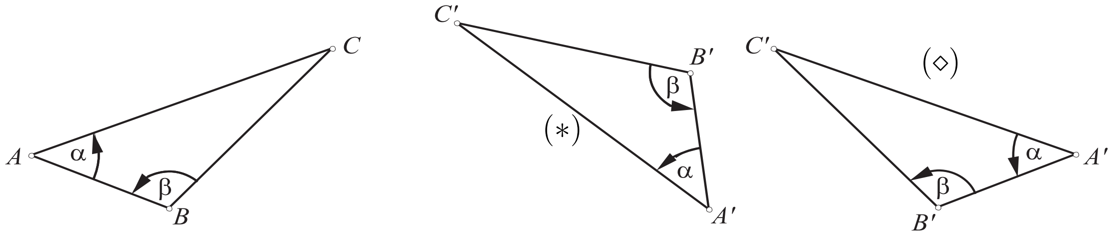
gleichsinnig ähnlich und im Falle

$$\boxed{(\diamond) \quad \angle(B, A, C) = \angle(C', A', B') \ \wedge \ \angle(C, B, A) = \angle(A', B', C')}$$

gegensinnig ähnlich. Gilt neben $(*)$ *oder* $(\diamond)$ *zusätzlich*

$$\boxed{(\triangle) \quad |A-B| = |A'-B'| \ \vee \ |B-C| = |B'-C'| \ \vee \ |C-A| = |C'-A'|},$$

so sind die Dreiecke kongruent.



Ähnlichkeit von Dreiecken: *gleichsinnig* *gegensinnig*

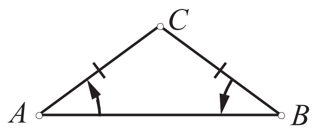
Beweis: Im Fall $(*)$ sei $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^{+}$ und im Fall $(\diamond)$ sei $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}^{-}$ mit $\alpha(A) = A' \ \wedge\ \alpha(B) = B'$ (vgl. 11.5., 11.10.). Hierbei führt $(\triangle)$ nach 11.1. auf $\alpha \in \mathbb{B}$. Mit der Winkeltreue bzw. der konjugierten Winkeltreue von α gemäß 11.76. liefert 11.73. die Aussage $\alpha(C) = C'$. $\square$

6. *Bemerkung.* Der Ähnlichkeitssatz (WW) bezieht sich auf $\mathbb{G}$–Winkel. Bei anderen Winkeltypen ergeben sich weitere Ähnlichkeitssätze!

Als Corollar erhalten wir die folgende wichtige Symmetrieeigenschaft von Dreiecken:

7. **Die Eselsbrücke.** *Ist* $\{A, B, C\}$ *ein Dreieck, so ist*

$$\boxed{\angle(B, A, C) = \angle(C, B, A) \ \Leftrightarrow\ |A - C| = |B - C|}.$$



Beweis: Es ist $\angle(B, A, C) {=} \angle(C, B, A) \overset{5., 11.76.}{\Leftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{B}^{-}\colon \alpha((A, B, C)) {=} (B, A, C) \ \Leftrightarrow$ $\overset{11.21.(iv)}{\Leftrightarrow} |A{-}C| {=} |B{-}C|$. $\square$

B. Sätze über Orthogonalität und Kreise

8. Neben den in 9.36. eingeführten *geordneten* Dreiecken, bei denen es auf die Reihenfolge der Ecken (Nr.1, Nr.2, Nr.3) ankommt, betrachtet man auch oft „*gewöhnliche*“ **Dreiecke**, bei denen die Reihenfolge der Ecken unerheblich ist.

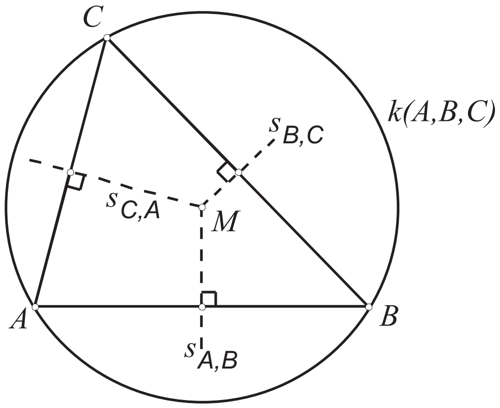
Diese werden als *Mengen* $\{A, B, C\}$ nichtkollinearer Punkte A, B, C von $\mathbb{C}$ bzw. von $\mathbb{R}^3$ definiert.

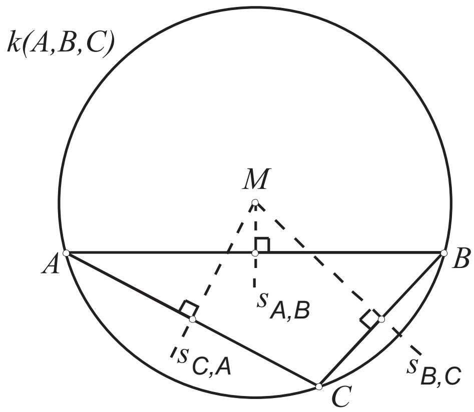
Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so werden A, B, C die **Ecken**, $[A, B], [B, C], [C, A]$ die **Seiten**, $\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, A\rangle$ die **Seitengeraden** und $s_{A,B}, s_{B,C}, s_{C,A}$ (vgl. 11.11.) die **Mittelsenkrechten** von $\{A, B, C\}$ genannt.

$\{A, B, C\}$ heißt **rechtwinklig**, wenn zwei der Seitengeraden orthogonal sind, **gleichseitig**, wenn $|A - B| = |B - C| = |C - A|$ gilt, und **gleichsschenklig** *mit der Spitze C und den Schenkeln* $[A, C], [B, C]$, wenn $|A - C| = |B - C|$ ist.

Als erstes zeigen wir

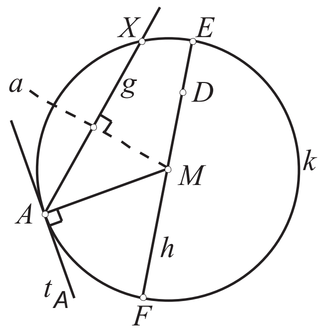
9. **Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt.**
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks $\{A, B, C\}$ *schneiden sich stets in einem Punkt* M, *dem* **Mittelsenkrechtenschnittpunkt** *von* $\{A, B, C\}$.
Der Kreis um M *mit dem Radius* $|A - M|$ *geht durch* A, B, C. *Er ist der einzige existierende Kreis durch die Punkte* A, B, C *und wird der* **Umkreis** $k(A, B, C)$ *des Dreiecks* $\{A, B, C\}$ *genannt. Zugleich heißt* M *auch* **Umkreismittelpunkt** *von* $\{A, B, C\}$.





Beweis: a) Wäre $s_{A,B} \| s_{B,C}$, so würde $s_{A,B} \perp \langle A, B\rangle \wedge s_{B,C} \perp \langle B, C\rangle$ (vgl. 11.11.) mit 11.12. auf $\langle A, B\rangle \| \langle B, C\rangle$ und damit auf $C \in \langle A, B\rangle$ führen. Demnach schneiden sich $s_{A,B}$ und $s_{B,C}$ im einem Punkt M, und es folgt $|A - M| = |B - M| = |C - M|$, also $M \in s_{C,A}$ und $A, B, C \in k_{M,|A-M|}$.
b) Ist k ein beliebiger Kreis durch A, B, C mit dem Mittelpunkt M', so ist $|A - M'| = |B - M'| = |C - M'|$, also $\{M'\} = s_{A,B} \cap s_{B,C} = \{M\}$ und damit $k = k_{M,|A-M|}$. □

Unter Verwendung dieses Beweises erhalten wir



10. **Satz.** *Gegeben sei ein Kreis k mit Mittelpunkt M.*
Ist $A \in k$ und ist $t_A \in \mathbb{G}$ mit $t_A \ni A \wedge t_A \perp \langle A, M\rangle$, so gilt:
 (i) Es ist $t_A \cap k = \{A\}$.
 (ii) Ist $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A \wedge g \neq t_A$, so ist $|\, g \cap k \,| = 2$.
 (iii) Je drei verschiedene Punkte von k sind nichtkollinear.
 (iv) M ist durch k eindeutig festgelegt.
 (v) Ist h eine Gerade durch M, so ist $\tilde{h}(k) = k$ und $|\, h \cap k \,| = 2$.
 (vi) Ist m ein Kreis mit $m \neq k$, so ist $|\, m \cap k \,| \leq 2$.

Beweis: (i) folgt aus 10.43 wegen $k = k_{M,|A-M|}$ (vgl. 9.2.).

(ii): Es sei $a \in \mathbb{G}$ mit $a \ni M \wedge a \perp g$. Dann ist $A \notin a$, denn sonst wäre $a = \langle A, M\rangle$ und damit $g = t_A$. Für $X := \tilde{a}(A)$ folgt $X \neq A \wedge X \in g \wedge |X - M| = |A - M|$ (vgl. 11.21), also $X, A \in g \cap k$ und damit $|g \cap k| \geq 2$. Ist $Y \in g \cap k$ mit $Y \neq A$, so führt $|Y - M| = |A - M|$ auf $M \in s_{A,Y}$, und mit $s_{A,Y} \perp g$ folgt $s_{A,Y} = a$, also $Y \overset{11.21.(iv)}{=} \tilde{s}_{A,Y}(A) = \tilde{a}(A) = X$.

(iii) folgt aus (i) und (ii), da A ein beliebiger Punkt von k ist.

(iv): Nach 9.2. ist $|k| = \infty$, und wegen (iii) gibt es dann nichtkollineare Punkte A, B, C auf k. Mit Beweis b) von 9. folgt nun die Behauptung.

(v): Es sei $r := |A - M|,\ D \in \mathbb{C}\backslash\{M\},\ s := |D - M|$ und $h := \langle M, D\rangle$.
α) Für $U \in \mathbb{C}$ ist $|U - M| = |\tilde{h}(U) - \tilde{h}(M)| = |\tilde{h}(U) - M|$, also ($U \in k \Leftrightarrow |U - M| = r \Leftrightarrow |\tilde{h}(U) - M| = r \Leftrightarrow \tilde{h}(U) \in k$) und damit $\tilde{h}(k) = k$.
β) Für $E := M + (D - M) \cdot r/s$ und $F := M - (D - M) \cdot r/s$ gilt $E, F \in h$ und $|E - M| = r = |F - M|$, also $E, F \in h \cap k$ und damit $|h \cap k| = 2$ gemäß (iii).

(vi) Wäre $|m \cap k| \geq 3$, so wäre $m = k$ gemäß 9. und (iii). □

11. Ist k ein Kreis und ist g eine Gerade, so heißt g
    eine **Sekante von** k im Falle $|g \cap k| = 2$,
    eine **Tangente von** k im Falle $|g \cap k| = 1$,
    eine **Passante von** k im Falle $|g \cap k| = 0$,

und andere Möglichkeiten gibt es nach 10.(i),(ii) nicht.

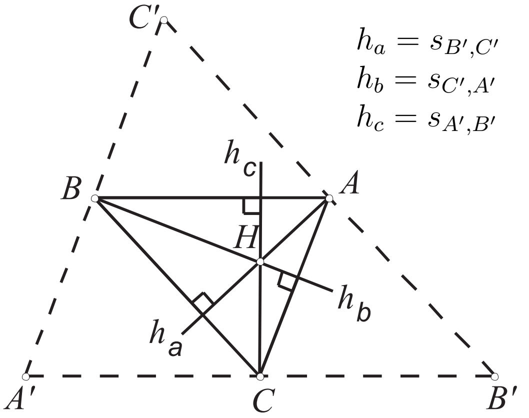
Im Falle $|g \cap k| = 1$ sagt man auch, k **berührt** g oder g **berührt** k.

Ist k ein Kreis von $\mathbb{C}$ mit dem Mittelpunkt M, so hat k nach 10.(i),(ii) in jedem seiner Punkte A *genau eine Tangente* t_A, und diese steht auf $\langle M, A\rangle$ senkrecht.

Zu $U \in \mathbb{C}$ und $g \in \mathbb{G}$ gibt es nach 11.12. stets genau ein $h \in \mathbb{G}$ mit $h \ni U \;\wedge\; h \perp g$. Man nennt h das **Lot von** U **auf** g und notiert h in der Form $(U \perp g)$. Der Schnittpunkt von g und h wird der **Fußpunkt des Lotes von** U **auf** g genannt.

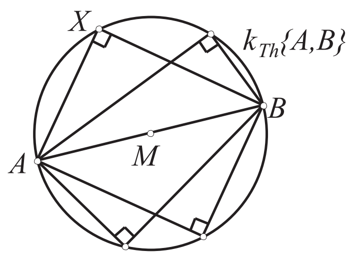
Unter Verwendung von 9. erhalten wir nun

12. **Satz von Höhenschnittpunkt.** *Die sogenannten* **Höhen** $h_a := (A \perp \langle B, C\rangle)$, $h_b := (B \perp \langle C, A\rangle)$, $h_c := (C \perp \langle A, B\rangle)$ *eines Dreiecks* $\{A, B, C\}$ *schneiden sich stets in genau einem Punkt* H, *dem sog.* **Höhenschnittpunkt** *von* $\{A, B, C\}$.
    Ist $\{A, B, C\}$ *nicht rechtwinklig, so hat* $\{A, B, H\}$ *bzw.* $\{A, H, C\}$ *bzw.* $\{H, B, C\}$ *den Höhenschnittpunkt* C *bzw.* B *bzw.* A.



Beweis: Ist $A' := -A+B+C$, $B' := A-B+C$, $C' := A+B-C$, so ist $\langle A, B\rangle \| \langle A', B'\rangle$, $\langle B, C\rangle \| \langle B', C'\rangle$, $\langle C, A\rangle \| \langle C', A'\rangle$ (vgl. 9.18. (iii)), und mit $A = \frac{1}{2}(B'+C')$, $B = \frac{1}{2}(C'+A')$, $C = \frac{1}{2}(A'+B')$ folgt dann $h_a = s_{B',C'}$ sowie $h_b = s_{C',A'}$ und $h_c = s_{A',B'}$. Definieren wir nun H als Mittelsenkrechtenschnittpunkt von $\{A', B', C'\}$, so führt 9. auf $H \in h_a \cap h_b \cap h_c$. Die verbleibende Behauptung folgt mit 11.12. direkt aus den Definitionen. □

13. Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$ und ist $M := \dfrac{1}{2}(A + B)$ die Mitte zwischen A und B, so wird der Kreis um M durch A und B der **Thaleskreis** $k_{Th}\{A, B\}$ über A, B genannt.

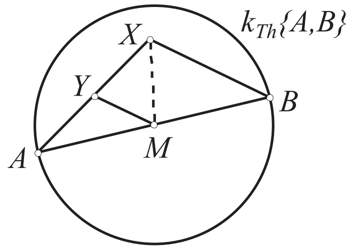


Diese Bezeichnung wird nahegelegt durch

14. **Satz des Thales.** *Sind* $A, B \in \mathbb{C}$ *mit* $A \neq B$, *so gilt*

$$(*) \quad \boxed{X \in k_{Th}\{A, B\} \;\Leftrightarrow\; \langle A, X\rangle \perp \langle X, B\rangle}$$

$$\forall\, X \in \mathbb{C} \setminus \{A, B\}.$$



Beweis: Es sei $X \in \mathbb{C}\setminus\{A, B\}$, $M := \dfrac{1}{2}(A + B)$ und $Y := \dfrac{1}{2}(A + X)$. Dann ist $Y \neq M$ mit $Y \in s_{A,X}$, und nach 9.26. ist $\langle X, B\rangle \| \langle Y, M\rangle$. Mit 11.11. folgt $X \in k_{Th}\{A, B\} \;\Leftrightarrow\; |X - M| = |A - M| \;\Leftrightarrow\; M \in s_{A,X}$ $\Leftrightarrow\; \langle A, X\rangle \perp \langle Y, M\rangle \;\Leftrightarrow\; \langle A, X\rangle \perp \langle X, B\rangle$. □

15. Ist ein Kreis $k_{M,r}$ in $\mathbb{C}$ gegeben und ist $A \in k_{M,r}$, so ist $k_{M,r} = k_{Th}(A, \tilde{M}(A))$ (vgl. 11.35.), denn für $B := \tilde{M}(A)$ gilt $M = \frac{1}{2}(A+B)$ und $|A-M| = |M-B| = r$. Demnach ist jeder Kreis in vielfacher Weise als Thaleskreis interpretierbar.

Im weiteren benötigen wir

16. **Satz.** *Ist ein Kreis $k_{M,r}$ in $\mathbb{C}$ gegeben und ist $\alpha \in \ddot{\mathbb{A}}$ mit dem Maßstab μ, so ist $\boxed{\alpha(k_{M,r}) = k_{\alpha(M),\mu\cdot r}}$. Demnach werden Kreise durch Ähnlichkeiten stets* **mittelpunktstreu** *auf Kreise abgebildet.*

Beweis: Für $X \in \mathbb{C}$ ist $(|X-M| = r \;\Leftrightarrow\; |\alpha(X) - \alpha(M)| = \mu \cdot r)$. Hierbei gilt „$\Leftarrow$", weil α^{-1} nach 11.2. und 11.8. den Maßstab μ^{-1} hat. □

17. Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck, so werden die Punkte $M_a := \frac{1}{2}(B+C), M_b := \frac{1}{2}(C+A)$, $M_c := \frac{1}{2}(A+B)$ die **Seitenmitten** und die Geraden $s_a := \langle A, M_a\rangle, s_b := \langle B, M_b\rangle, s_c := \langle C, M_c\rangle$ die **Seitenhalbierenden** von $\{A,B,C\}$ genannt. Nach 9.26. gilt $\langle A,B\rangle \| \langle M_a, M_b\rangle$, $\langle B,C\rangle \| \langle M_b, M_c\rangle$, $\langle C,A\rangle \| \langle M_c, M_a\rangle$, und insbesondere ist $\{M_a, M_b, M_c\}$ ein Dreieck, genannt **Seitenmittendreieck**.

Der Kreis $f := k(M_a, M_b, M_c)$ heißt **Seitenmittenkreis** oder **Feuerbachkreis** von $\{A,B,C\}$; sein Mittelpunkt wird mit F bezeichnet.

Eine besondere Rolle spielen auch der sog. **Schwerpunkt** $S := \frac{1}{3}(A+B+C)$ von $\{A,B,C\}$ und die sog. **Hauptstreckung** $\boxed{\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to -2 \cdot X + 3 \cdot S}$, die eine zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor -2 ist.

Offenbar gilt $\boxed{\sigma(X) - S = -2(X - S)}$ $\forall\, X \in \mathbb{C}$. Damit erhalten wir

18. **Seitenhalbierendensatz.** *für jedes Dreieck $\{A,B,C\}$ gilt*

(i) $\{\mathcal{S}\} = s_a \cap s_b \cap s_c$,

(ii) $\dfrac{A-S}{M_a - S} = \dfrac{B-S}{M_b - S} = \dfrac{C-S}{M_c - S} = -2$,

(iii) $\sigma(M_a) = A \;\wedge\; \sigma(M_b) = B \;\wedge\; \sigma(M_c) = C \;\wedge\; \sigma(S) = S$.

Beweis: Gemäß 17. ist (iii) gültig, und mit 17. und 9.24. impliziert dies (i) und (ii). □

19. **Satz über die Eulergerade.**

Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck von $\mathbb{C}$, so gilt mit den Bezeichnungen aus 8.,9.,12.,17.:

(i) Ist $\{A,B,C\}$ gleichseitig, so ist $M = H = S = F$.

(ii) Ist $\{A,B,C\}$ nicht gleichseitig, so sind M, H, S, F vier verschiedene Punkte einer Geraden, der sog. **Eulergeraden***, und es gilt $F = \frac{1}{2}(H+M)$ sowie*

$$\frac{H-S}{M-S} = \frac{M-S}{F-S} = -\frac{M-H}{F-H} = -2.$$

Beweis: Da f der Umkreis und M der Höhenschnittpunkt von $\{M_a, M_b, M_c\}$ ist, führt 18.(iii) mit 16. und 11.14. auf $\sigma(F) = M \;\wedge\; \sigma(M) = H$.

Demnach gilt $M - S = -2(F - S)$ und $H - S = -2(M - S)$, also $M - H = -2F + 2M$ und $2F = H + M$ sowie $M - H = 2(F - H)$.

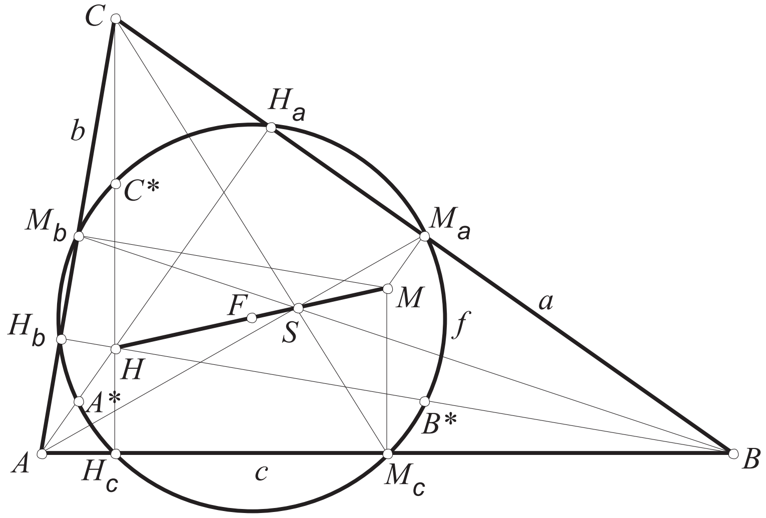
Wegen $M = S - 2(F - S) \ \wedge \ H = S + 4(F - S)$ gilt entweder $F = S = M = H$ oder $M, H \in \langle F, S\rangle$ mit $|\{M, H, F, S\}| = 4$. Hierbei ist $(H = M \ \Leftrightarrow \ A \in h_a = s_{B,C} \ \wedge$ $\wedge \ B \in h_b = s_{C,A} \ \Leftrightarrow \ |A - B| = |A - C| \ \wedge \ |B - C| = |B - A|)$. □

Weiter beweisen wir nun

20. **Satz über den Feuerbachkreis.** *Auf dem Feuerbachkreis f des Dreiecks $\{A, B, C\}$ liegen die neun Punkte* $\boxed{M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, A^*, B^*, C^*}$ *mit* $\{H_a\} = h_a \cap \langle B, C\rangle$, $\{H_b\} = h_b \cap \langle C, A\rangle$, $\{H_c\} = h_c \cap \langle A, B\rangle$, $A^* = \frac{1}{2}(A+H)$, $B^* = \frac{1}{2}(B+H)$, $C^* = \frac{1}{2}(C+H)$.

Hierbei ist $\boxed{f = k_{Th}\{A^*, M_a\} = k_{Th}\{B^*, M_b\} = k_{Th}\{C^*, M_c\}}$.

Man nennt H_a, H_b, H_c die **Höhenfußpunkte** *und A^*, B^*, C^* die* **oberen Höhenmitten** *von $\{A, B, C\}$, und f wird auch als* **Neunpunktekreis** *bezeichnet.*



Beweis: Ist $A^* \neq M_b$, so ist $\langle A^*, M_b\rangle \| \langle C, H\rangle = h_c$ gemäß 9.26 mit $h_c \perp \langle M_a, M_b\rangle$, d.h. es ist $A^* \neq M_a \ \wedge \ \langle A^*, M_b\rangle \perp \langle M_b, M_a\rangle$. Mithin gilt $M_b \in k_{Th}\{A^*, M_a\}$ und analog $M_c \in k_{Th}\{A^*, M_a\}$. Ferner ist auch $H_a \in k_{Th}\{A^*, M_a\} \overset{9.}{=} k(M_a, M_b, M_c) = f$. Analog folgt $B^*, H_b \in k_{Th}\{B^*, M_b\} = f$ und $C^*, H_c \in k_{Th}\{C^*, M_c\} = f$. □

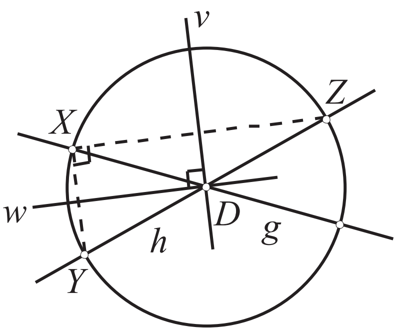
C. Winkelhalbierende

21. Ist (g, h) ein $\mathbb{G}$–Winkel und ist $w \in \mathbb{G}$ mit $\widetilde{w}(g) = h$, also auch mit $\widetilde{w}(h) = g$, dann wird w als eine **Winkelhalbierende** oder **Symmetrieachse** von (g, h) bezeichnet.

Offenbar ist jede Winkelhalbierende von (g, h) zugleich auch eine von (h, g).
Nach 11.32. hat jeder $\mathbb{G}$–Winkel wenigstens eine Winkelhalbierende.

Genauer erhalten wir

22. **Satz.** *Ist (g, h) ein $\mathbb{G}$–Winkel und ist $g \cap h = \{D\}$ mit $D \in \mathbb{C}$, so gilt:*
  (i) Ist $u \in \mathbb{G}$ mit $\tilde{u}(g) = h$, so ist $D \in u$.
  (ii) Ist $X \in g \backslash h$ und $Y \in h \backslash g$ mit $|X - D| = |Y - D|$, so sind $(D \| \langle X, Y\rangle)$ und $(D \perp \langle X, Y\rangle)$ Winkelhalbierende von (g, h).
  (iii) (g, h) hat genau zwei Winkelhalbierende. Diese gehen durch D und sind orthogonal.

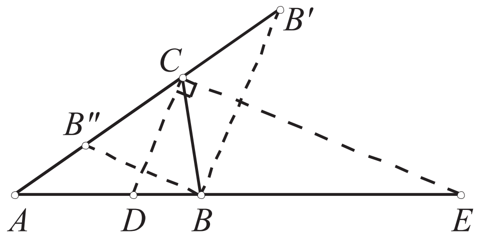


Beweis: (i): Es ist $\tilde{u}(\{D\}) = \tilde{u}(g \cap h) = h \cap g = \{D\}$, also $D \in u$. (ii): Ist $w := s_{X,Y}$, so ist $D \in w$, und mit 11.21. folgt $w \perp \langle X, Y\rangle$ sowie $\widetilde{w}(X) = Y$, also $\widetilde{w}(g) = h$ mit $w = (D \perp \langle X, Y\rangle)$. Ist $Z := \widetilde{D}(Y)$, so führt 14. auf $\langle Y, X\rangle \perp \langle X, Z\rangle$, und wegen $|X - D| = |Z - D|$ folgt jetzt $\tilde{v}(g){=}h$ für $v{:=}(D \perp \langle X, Z\rangle)$. Nach 11.12. ist $v{=}(D \| \langle X, Y\rangle)$. (iii): Ist $\tilde{u}$ wie in (i) gegeben, so ist $U := \tilde{u}(X) \in h$ mit $|X - D| = |U - D|$. Nach 10. (v) ist $U \in \{Y, Z\}$, und gemäß 11.10. bedeutet dies $u \in \{v, w\}$. $\square$

23. Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so hat der $\mathbb{G}$–Winkel $(\langle A, C\rangle, \langle C, B\rangle)$ nach 22. genau zwei Winkelhalbierende durch den Punkt C. Diese werden die **Winkelhalbierenden von** $\{A, B, C\}$ **in C** genannt, und analog definiert man die **Winkelhalbierenden von** $\{A, B, C\}$ **in A** und **in B.**

Hierzu zeigen wir

24. **Erster Winkelhalbierendensatz**. *Gegeben sei ein Dreieck* $\{A, B, C\}$*.*



Ist $\lambda := \dfrac{|A - C|}{|B - C|}$ *und* $D := \dfrac{A{+}\lambda B}{1{+}\lambda}$*, so ist* $D \in \,]A, B[$ *mit* $\dfrac{|A - C|}{|B - C|} = \dfrac{|A - D|}{|B - D|}$*, und* $\langle C, D\rangle$ *ist eine Winkelhalbierende von* $\{A, B, C\}$ *in* C*.*

Ist $\lambda \neq 1$*, so ist* $\langle C, E\rangle$ *für* $E := \dfrac{A - \lambda B}{1 - \lambda}$ *die zweite Winkelhalbierende von* $\{A, B, C\}$ *in* C*, und es ist* $E \in \langle A, B\rangle \setminus [A, B]$ *mit* $-\dfrac{A - D}{B - D} = \dfrac{A - E}{B - E} = \lambda$ *und mit*
$(*)$ $B = (2DE{-}AD{-}AE)\,/\,(D{+}E{-}2A)$.
Ist $\lambda = 1$*, ist also* $\{A, B, C\}$ *gleichschenklig mit* $|A - C| = |B - C|$*, so ist* $(C \| \langle A, B\rangle)$ *die zweite Winkelhalbierende von* $\{A, B, C\}$ *in* C*.*

Beweis: a) Wegen $D{+}\lambda D{=}A{+}\lambda B$ ist $-\frac{A-D}{B-D}{=}\lambda{\in}\mathbb{R}^*_+$, d.h. nach 9.6. ist $D{\in}]A, B[$. Für $\{B'\}{:=}\langle A, C\rangle \cap (B \| \langle C, D\rangle)$ gilt $\frac{B'-C}{C-A}{=}\frac{B'-A}{C-A}{-}1 \overset{9.26.}{=} \frac{B-A}{D-A}{-}1{=}\frac{B-D}{D-A}{=}\lambda^{-1}$ und damit $|B'{-}C|{=}\lambda^{-1}{\cdot}|C{-}A|{=}|B{-}C|$. Wegen $\langle C, D\rangle \| \langle B, B'\rangle$ ist $\langle C, D\rangle$ nach 22.(ii) dann eine Winkelhalbierende von $\{A, B, C\}$ in C.

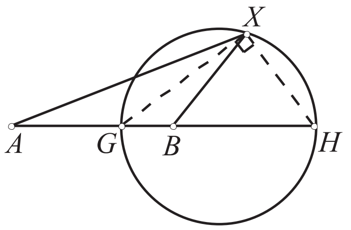
b) Ist $\lambda{\neq}1$, so führt $E{-}\lambda E{=}A{-}\lambda B$ auf $\frac{A-E}{B-E}{=}\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, d.h. es ist $E{\in}\langle A, B\rangle \setminus [A, B]$ (vgl.9.6.). Für $\{B''\}{:=}\langle A, C\rangle \cap (B \| \langle C, E\rangle)$ ist $\frac{B''-C}{C-A}{=}\frac{B''-A}{C-A}{-}1 \overset{9.26.}{=} \frac{B-A}{E-A}{-}1{=}\frac{B-E}{E-A}{=}{-}\lambda^{-1}$, also $|B''{-}C|{=}\lambda^{-1}{\cdot}|C{-}A|{=}|B{-}C|$. Wegen $\langle C, E\rangle \| \langle B, B''\rangle$ ist nach 22.(ii) dann auch $\langle C, E\rangle$ eine Winkelhalbierende von $\{A, B, C\}$ in C. Aus $\frac{D-A}{B-D}{=}\frac{A-E}{B-E}$ ergibt sich $(*)$.

c) Die verbleibende Behauptung folgt aus 22.(ii). $\square$

Bemerkung. Nach 24. sind die Treffpunkte der Winkelhalbierenden von $\{A, B, C\}$ in C mit der Geraden $\langle A, B\rangle$ festgelegt durch das Seitenlängenverhältnis $|A - C|/|B - C|$.

Als Corollar erhalten wir

25. **Satz des Apollonius.** *Sind A, B, G drei verschiedene kollineare Punkte mit $\mu := \dfrac{A-G}{B-G} \neq -1$ und ist $H := \dfrac{A+\mu B}{1+\mu}$, so gilt:*



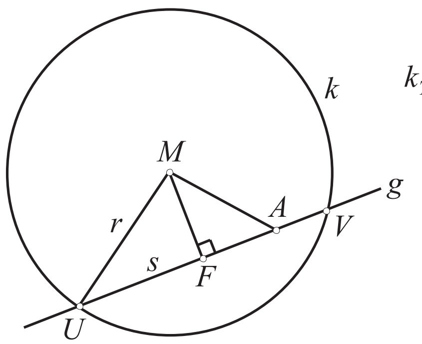
(i) Es ist $k_{Th}\{G,H\} = \{X \in \mathbb{C} \mid |A-X| = |\mu| \cdot |X-B|\}$.

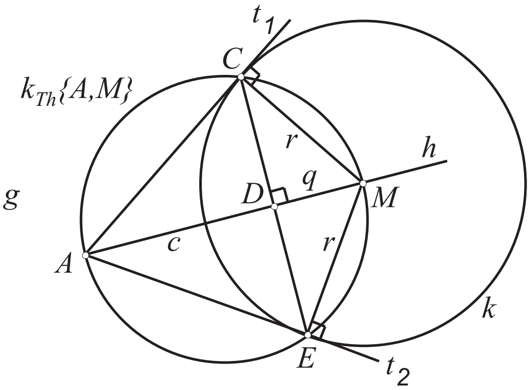
(ii) $k_{Th}\{G,H\} \setminus \{G,H\}$ ist die Menge aller Punkte $X \in \mathbb{C} \setminus \langle A,B \rangle$ mit der Eigenschaft, daß $\langle X,G \rangle$ Winkelhalbierende von $(\langle A,X \rangle, \langle X,B \rangle)$ ist.

Man nennt $k_{Th}\{G,H\}$ den durch $|\mu|$ bestimmten **Apollonius–Kreis** *über (A,B).*

Beweis: Ist $\mu<0$, so sei $\lambda := -\mu \wedge D := G \wedge E := H$, und ist $\mu>0$, so sei $\lambda := \mu \wedge D := H \wedge E := G$. Mit 14., 22.(iii) und 24. folgt dann $k := k_{Th}\{G,H\} \supseteq \{X \in \mathbb{C} \mid |A-X| = |\mu| \cdot |X-B|\}$.
Ist $Y \in k \setminus \{G,H\}$ und ist $F \in \langle A,G \rangle$ mit $\langle Y,G \rangle^{\smile}(\langle Y,A \rangle) = \langle Y,F \rangle$, so führt 24.$(*)$ auf $F=B$, und mit 24. folgt $|A-Y| = |\mu| \cdot |Y-B|$. Dies impliziert (i) und mit 24. auch (ii). $\square$

Im weiteren benötigen wir die folgende Eigenschaft von Kreisen:





26. **Satz.** *Ist k ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, so gilt:*

(i) Ist $A \in \mathbb{C}$ mit $|A-M| < r$, so ist jede Gerade durch A eine Sekante von k.

(ii) Ist $A \in \mathbb{C}$ mit $|A-M| > r$, so gehen durch A genau zwei Tangenten t_1, t_2 von k, und $\langle A,M \rangle$ ist Winkelhalbierende von (t_1,t_2). Die Berührpunkte der Tangenten sind konstruierbar als Schnitt von k mit dem Thaleskreis über A, M.

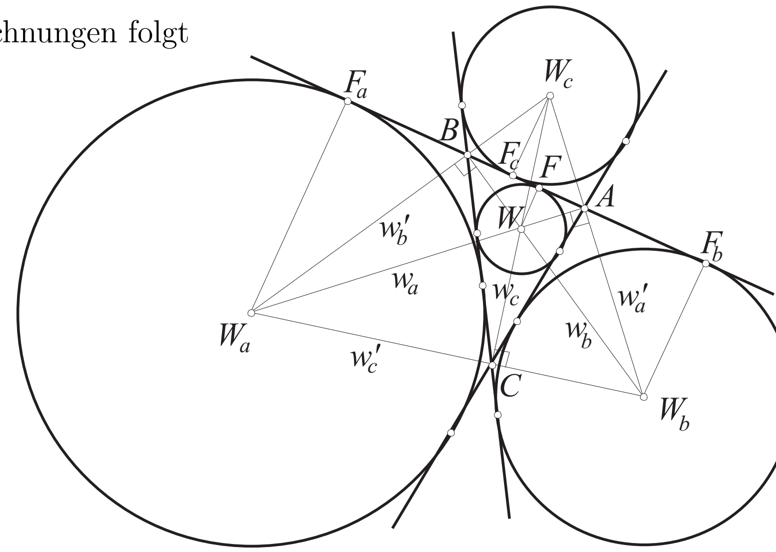
Beweis: (i) Es sei $A \in \mathbb{C}$ mit $|A-M| < r$. Weiter sei $g \in \mathbb{G}$ mit $g \ni A$, und der Fußpunkt des Lotes von M auf g sei F. Nach 10.43. ist $|F-M| \leq |A-M| < r$, und folglich gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+^*$ mit $s^2 = r^2 - |F-M|^2$. Der Kreis um F mit Radius s trifft g nach 10.(v) in zwei verschiedenen Punkten U, V, und nach 10.42.(i) sind $U, V \in k$. Mit 10.(iii) führt dies auf $|g \cap k| = 2$.
(ii) Es sei $A \in \mathbb{C}$ mit $c := |A-M| > r$, und es sei $D := M + (r/c)^2 \cdot (A-M)$. Wegen $(r/c)^2 \in]0,1[$ ist $D \in]A,M[$ mit $q := |D-M| = (r/c)^2 \cdot |A-M| = (r/c) \cdot r < r$, und nach (i) trifft $(D \perp \langle A,M \rangle)$ den Kreis k in genau zwei Punkten C, E. Wegen $r^2 = q \cdot c$ und 10.42.(ii) ist $\langle A,C \rangle \perp \langle C,M \rangle$ und $\langle A,E \rangle \perp \langle E,M \rangle$, und mit 10.(vi) und 14. folgt $k_{Th}\{A,M\} \cap k =$ $= \{C,E\}$. Nach 10.(i),(vi) und 14. sind $t_1 := \langle A,C \rangle$ und $t_2 := \langle A,E \rangle$ die sämtlichen Tangenten von k durch A. Die Spiegelung an $h := \langle A,M \rangle$ läßt k und $k_{Th}\{A,M\}$ fest und vertauscht deshalb C mit E. Folglich ist $\tilde{h}(t_1) = t_2$. $\square$

27. Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck, so sagt man, A **liegt** $[B,C]$ **gegenüber**, B **liegt** $[C,A]$ **gegenüber**, C **liegt** $[A,B]$ **gegenüber**.

Nach 24. gehört zu jeder Ecke X von $\{A, B, C\}$ eine Winkelhalbierende w_x, die die gegenüberliegende Seite trifft, und eine weitere w'_x, für die dies nicht der Fall ist. Man nennt w_a, w_b, w_c die **inneren Winkelhalbierenden** von $\{A, B, C\}$ und w'_a, w'_b, w'_c die **äußeren Winkelhalbierenden** von $\{A, B, C\}$.

Ein Kreis wird als **Berührkreis** von $\{A, B, C\}$ bezeichnet wenn er $\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, A\rangle$ als Tangenten hat.

Mit diesen Bezeichnungen folgt



28. **Zweiter Winkelhalbierendensatz.** *Ist $\{A, B, C\}$ ein Dreieck, so gilt:*

(i) *Es gibt Punkte W, W_a, W_b, W_c mit $W \in w_a \cap w_b \cap w_c$, $W_a \in w_a \cap w'_b \cap w'_c$, $W_b \in w'_a \cap w_b \cap w'_c$, $W_c \in w'_a \cap w'_b \cap w_c$.*

(ii) *$\{W_a, W_b, W_c\}$ ist ein Dreieck mit W als Höhenschnittpunkt.*

(iii) *$\{A, B, C\}$ hat genau vier Berührkreise. Ihre Mittelpunkte sind W, W_a, W_b, W_c. Der Berührkreis mit Mittelpunkt W heißt* **Inkreis**, *die übrigen Berührkreise werden* **Ankreise** *genannt.*

Beweis: Je zwei der Geraden $w_a, w_b, w_c, w'_a, w'_b, w'_c$ schneiden sich, denn aus $\widetilde{w}_a \circ \widetilde{w}_b(\langle B, C\rangle) = \widetilde{w}_a(\langle A, B\rangle) = \langle A, C\rangle \not\parallel \langle B, C\rangle$ folgt $w_a \not\parallel w_b$ gemäß 11.25., und in den verbleibenden Fällen argumentiert man analog.
Wir setzen $\{W\} := w_a \cap w_b$, $\{W_a\} := w_a \cap w'_b$, $\{W_b\} := w'_a \cap w_b$, $\{W_c\} := w'_a \cap w'_b$. Wegen $\langle A, B\rangle \neq w_a, w'_a, w_b, w'_b \wedge w_a \perp w'_a \wedge w_b \perp w'_b$ sind je drei der Punkte W, W_a, W_b, W_c nichtkollinear.
Es seien F, F_a, F_b, F_c die Fußpunkte der Lote von W, W_a, W_b, W_c auf die Gerade $\langle A, B\rangle$, und k, k_a, k_b, k_c seien die Kreise mit den Mittelpunkten W, W_a, W_b, W_c, die $\langle A, B\rangle$ in F, F_a, F_b, F_c berühren (vgl. 10.).
Indem man an w_a, w_b, w'_a, w'_b spiegelt, erkennt man mit 10.(v), daß auch $\langle B, C\rangle$ und $\langle C, A\rangle$ Tangenten von k, k_a, k_b, k_c sind, und mit 26.(ii) folgt dann $W, W_a, W_b, W_c \in w_c \cup w'_c$.

Um hier die genaue Zuordnung zu finden, verwenden wir 11.52. und 11.62.:
Wegen $w_a \cap]B, C[\neq \emptyset \wedge w_b \cap]C, A[\neq \emptyset$ haben $(A, W, C), (W, A, B), (B, W, A), (W, B, C)$ die gleiche Orientierung, damit aber auch (W, C, A) und (C, W, B), und nach 11.62. ist dann $\langle C, W\rangle \cap]A, B[\neq \emptyset$, also $W \in w_c$. Wegen $w_c \neq w_a, w_b$ folgt $w_c \not\ni W_a, W_b$, also $W_a, W_b \in w'_c$ und $W_c \in w_c$. Damit ist (i) gezeigt, und nach 22.(iii) ist auch (ii) gültig.

Um zu bestätigen, daß mit k, k_a, k_b, k_c alle Berührkreise von $\{A, B, C\}$ gefunden sind, sei jetzt m ein *beliebiger* Berührkreis von $\{A, B, C\}$ mit Mittelpunkt M. Mit 26.(ii) folgt $M \in (w_a \cup w_a') \cap (w_b \cup w_b')$, also $M \in \{W, W_a, W_b, W_c\}$. Wegen $|m \cap \langle A, B\rangle| = 1$ und 10. bedeutet dies aber $m \in \{k, k_a, k_b, k_c\}$, d.h. es gilt (iii). $\square$

D. Der Randwinkelsatz

Der *Randwinkelsatz*, der auch *Peripheriewinkelsatz* oder *Umfangswinkelsatz* genannt wird, gehört zu den wichtigsten Sätzen der Elementargeometrie. Er schlägt eine Brücke zwischen Winkeln und Kreisen und ist sehr flexibel in der Anwendbarkeit.

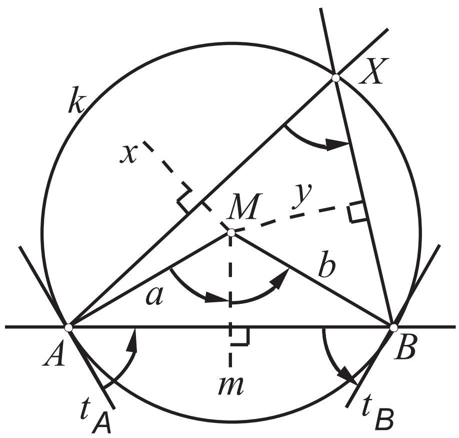
Bemerkenswerterweise ist die Aussage des Satzes abhängig vom verwendeten Winkeltyp, und es zeigt sich, daß der Satz seine beste Qualität in Verbindung mit $\mathbb{G}$–Winkeln erreicht.

Zunächst beweisen wir

29. **Tangenten– und Mittenwinkelsatz.**

Gegeben seien drei verschiedene Punkte A, B, X eines Kreises k mit Mittelpunkt M. Die Tangenten an k in A, B seien t_A, t_B, und es sei $m := s_{A,B}$. Dann gilt

$$\boxed{\angle(A, X, B) = \angle(t_A, \langle A, B\rangle) = \angle(\langle A, B\rangle, t_B) = \angle(\langle A, M\rangle, m) = \angle(m, \langle M, B\rangle)}\,.$$



Beweis: Für $a := \langle A, M\rangle,\ b := \langle M, B\rangle,\ x := s_{A,X}$ und $y := s_{X,B}$ gilt $M \in a \cap b \cap m \cap x \cap y$. Demnach bilden die Drehungen $\tilde{a} \circ \tilde{m}$, $\tilde{m} \circ \tilde{b}$, $\tilde{x} \circ \tilde{y}$ zugleich M auf M und B auf A ab, und mit 11.5. folgt $\tilde{a} \circ \tilde{m} = \tilde{m} \circ \tilde{b} = \tilde{x} \circ \tilde{y}$, also $(a, m) \triangleq (m, b) \triangleq (x, y)$ gemäß 11.74..
Damit folgt die Behauptung, denn es gilt

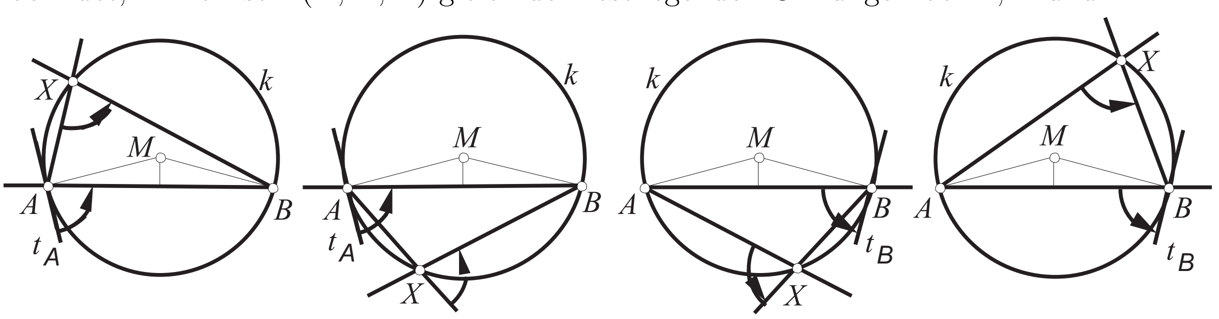
$$(t_A, a) \triangleq (\langle A, B\rangle), m) \triangleq (t_B, b) \triangleq$$
$$(\langle A, X\rangle, x) \triangleq (\langle X, B\rangle, y) \triangleq (\mathbb{R}, \mathbb{R}i),$$

und mit 11.70. führt dies auf $(t_A, \langle A, B\rangle) \triangleq (a, m) \ \wedge$ $\wedge\ (\langle A, B\rangle, t_B) \triangleq (m, b) \ \wedge\ (\langle A, X\rangle, \langle X, B\rangle) \triangleq (x, y)$. $\square$

Mit 29. erkennen wir fünf gleichgroße $\mathbb{G}$–Winkel am Kreis:

$(t_A, \langle A, B\rangle), (\langle A, B\rangle, t_B)$ heißen (*Sehnen–*)**Tangentenwinkel**,
$(\langle A, M\rangle, m), (m, \langle M, B\rangle)$ heißen **Mittenwinkel**, und
(A, X, B) heißt **Randwinkel** oder **Peripheriewinkel** oder **Umfangswinkel**.

Man stellt sich hierbei vor, daß k, M, A, B fest gegeben sind und daß der Punkt X auf dem Kreis „*wie ein Waggon auf Schienen*“ läuft; ganz gleich, an welcher Stelle sich X befindet, immer ist $\angle(A, X, B)$ gleich den festliegenden Öffnungen bei A, B und M!



Wenn man X in A hineinlaufen läßt, geht $\langle X,A\rangle$ in t_A und $\langle X,B\rangle$ in $\langle A,B\rangle$ über; wenn man X in B hineinlaufen läßt, geht $\langle A,X\rangle$ in $\langle A,B\rangle$ und $\langle X,B\rangle$ in t_B über. Diese „dynamische“ Betrachtungsweise ist für das Verständnis des Satzes sehr wichtig.

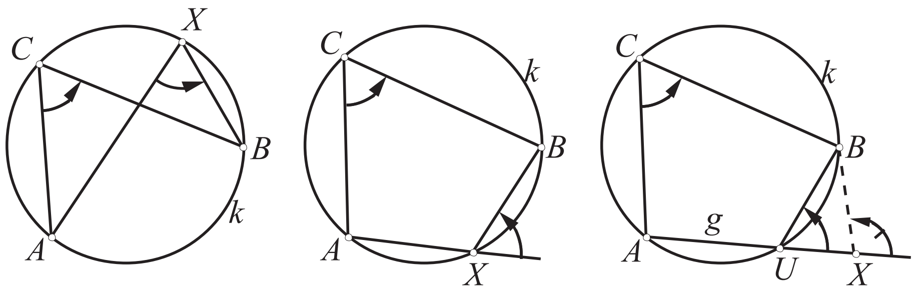
Wie man sieht, bleibt der Satz auch dann gültig, wenn der Punkt X „unter“ die Sehne $[A,B]$ wandert.

Dies liegt an den hier verwendeten $\mathbb{G}$–Winkeln; bei anderen Winkeltypen stimmt es *nicht*!

Über 29. hinausgehend zeigen wir nun

30. **Randwinkelsatz.** *Sind A,B,C drei nichtkollineare Punkte, so gilt*

$$\boxed{X\in k(A,B,C)\ \Leftrightarrow\ \angle(A,X,B)=\angle(A,C,B)}\quad \forall X\in\mathbb{C}\backslash\{A,B\}.$$



Beweis: Es sei $X\in\mathbb{C}\backslash\{A,B\}, g:=\langle A,X\rangle$ und $U\in k:=k(A,B,C)$ mit $g\cap k=\{A,U\}$.
1) Ist $B\in g$, so ist $X\notin k$ und $\angle(A,X,B)=\mathbb{R}\neq\angle(A,C,B)$ (vgl.11.69.(i)).
2) Ist $B\notin g$, so ist $\angle(A,X,B)=\angle(A,C,B)\overset{29.}{\Leftrightarrow}\angle(g,\langle X,B\rangle)=\angle(g,\langle U,B\rangle)\overset{11.73.}{\Leftrightarrow}$ $\Leftrightarrow\ \langle X,B\rangle=\langle U,B\rangle\ \Leftrightarrow\ X=U\in k.$ □

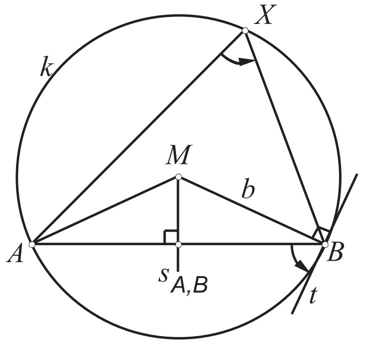
Die Aussage „ $\Leftarrow$ “ in 30. wird auch als „*Umkehrung des Randwinkelsatzes*“ bezeichnet; sie besagt, daß man allein durch eine Winkelbetrachtung entscheiden kann, ob ein Punkt auf einem Kreis liegt. Diese Umkehrung läßt sich so nur für $\mathbb{G}$–Winkel aufstellen; bei anderen Winkeltypen ist sie komplizierter.

Übrigens bestätigt 30. mit 29. für den Fall $\langle A,C\rangle\perp\langle C,B\rangle$ den Satz des Thales.

Als Corollarien zu 30. erhalten wir

31. **Satz.** *Vier verschiedene Punkte A,B,C,D liegen genau dann gemeinsam auf einer Geraden oder einem Kreis, wenn* $\boxed{\angle(A,C,B)=\angle(A,D,B)}$ *ist.*

Beweis: Sind A,B,C nichtkollinear, so gilt dies gemäß 30., und sind A,B,C Punkte einer Geraden h, so ist $D\in h\ \Leftrightarrow\ \langle A,D\rangle=\langle D,B\rangle\overset{11.69.(i)}{\Leftrightarrow}\angle(A,C,B)=\mathbb{R}=\angle(A,D,B).$ □



32. **Berührsatz.** *Sind $A,B\in\mathbb{C}$ und ist $t\in\mathbb{G}$ mit $A\notin t$ und $B\in t$, so gibt es genau einen Kreis k durch A,B mit $k\cap t=\{B\}$. Für $X\in\mathbb{C}\backslash\{A,B\}$ ist*

$$\boxed{X\in k\ \Leftrightarrow\ \angle(A,X,B)=\angle(\langle A,B\rangle,t)}.$$

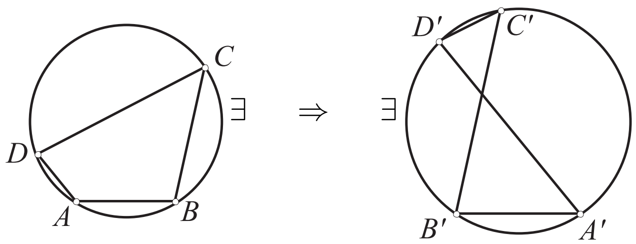
Beweis: Für das Lot b von B auf t gilt $b\nparallel s_{A,B}$, denn aus $b\| s_{A,B}$ ergäbe sich $\langle A,B\rangle\perp b$ und damit $A\in\langle A,B\rangle=t$. Für $\{M\}:=b\cap s_{A,B}$ und $k:=k_{M,|B-M|}$ gilt $k\ni A,B\ \wedge\ k\cap t=\{B\}$ (vgl. 10.), und mit 29. und 30. folgt nun die Behauptung. □

E. Anwendungen des Randwinkelsatzes

Aus der Fülle dessen, was sich mit Hilfe des Randwinkelsatzes beweisen läßt, stellen wir im folgenden drei bemerkenswerte Aussagen vor.

Wir bezeichnen Punkte als *konzyklisch*, wenn sie gemeinsam einem Kreis angehören. Mit dieser Redeweise folgt:

33. **Kreisviereckssatz.** *Sind A, B, C, D und A', B', C', D' jeweils vier verschiedene Punkte mit $\langle A, B\rangle \| \langle A', B'\rangle \ \wedge\ \langle B, C\rangle \| \langle B', C'\rangle \ \wedge\ \langle C, D\rangle \| \langle C', D'\rangle \ \wedge\ \langle D, A\rangle \| \langle D', A'\rangle$ und sind A, B, C, D konzyklisch, so auch A', B', C', D'.*



Beweis: Nach 30. gilt $\angle(A, C, B) = \angle(A, D, B)$, und wegen der gegebenen Parallelitäten führen 11.70. und 11.71. auf $\angle(A', C', B') = \angle(A', D', B')$. Wieder mit 30. folgt nun die Behauptung. $\square$

Im weiteren benötigen wir

34. **Lemma.** *Sind k, m zwei verschiedene Kreise und ist $A \in k \cap m$, so gilt $k \cap m = \{A\}$ genau dann, wenn k und m in A eine gemeinsame Tangente haben.*

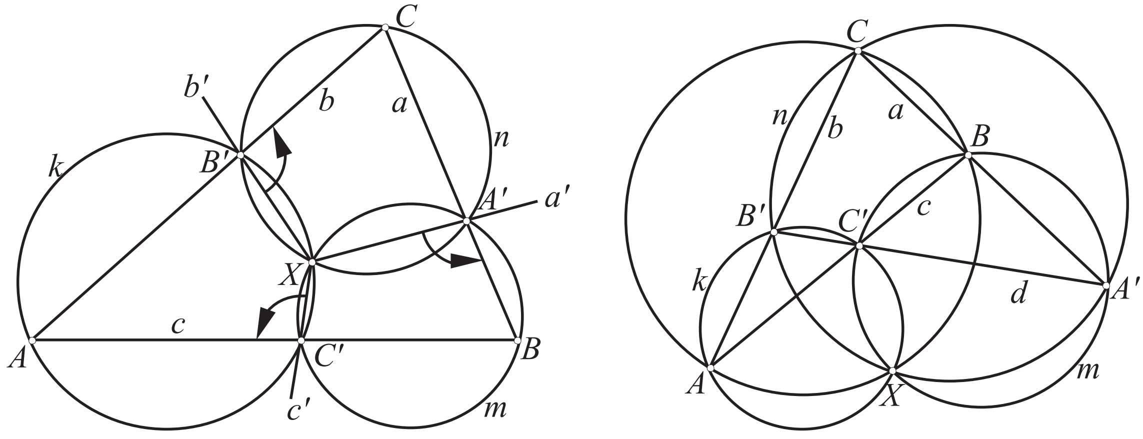
Beweis: Sind R, S die Mittelpunkte von k bzw. m, so ist $R{\neq}S$ wegen $A{\in}k \cap m \ \wedge\ k{\neq}m$. a) Wenn die Tangenten an k und m in A verschieden sind, dann nach 10. auch die Geraden $\langle A, R\rangle$ und $\langle A, S\rangle$. Es folgt $A \notin g := \langle R, S\rangle$, und nach 10.(v) sind $A, \tilde{g}(A) \in k \cap m$. Dies bedeutet aber $|k \cap m| = 2$. b) Wenn k und m in A eine gemeinsame Tangente haben, dann führt 32. auf $k \cap m = \{A\}$. $\square$

Mit 34. ergibt sich nun

35. **Satz von Miquel–Simson–Wallace.** *Sind in $\mathbb{C}$ sechs verschiedene Punkte A, B, C, A', B', C' mit $A' \in \langle B, C\rangle \ \wedge\ B' \in \langle C, A\rangle \ \wedge\ C' \in \langle A, B\rangle \ \wedge\ C \notin \langle A, B\rangle$ gegeben, so existiert genau ein Punkt X mit*

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} k(A, B', C') & \cap & k(B, C', A') & = & \{X, C'\} \\ \wedge\ k(B, C', A') & \cap & k(C, A', B') & = & \{X, A'\} \\ \wedge\ k(C, A', B') & \cap & k(A, B', C') & = & \{X, B'\}. \end{array}}$$

Hierbei ist $X \in k(A, B, C)$ genau dann, wenn A', B', C' kollinear sind.



Beweis: Wir setzen $k := k(A, B', C')$, $m := k(B, C', A')$, $n := k(C, A', B')$, $a := \langle B, C\rangle$, $b := \langle C, A\rangle$, $c := \langle A, B\rangle$. Dann existiert genau ein $X \in \mathbb{C}$ mit $k \cap m = \{X, C'\}$, und es gibt Geraden a', b', c' mit $a' \cap m = \{X, A'\}$, $b' \cap k = \{X, B'\}$, $c' \cap k = \{X, C'\}$. Wegen $B, C \notin k$ und $A \notin m$ ist $X \notin \{A, B, C\}$. Nach 34. ist auch $c' \cap m = \{X, C'\}$, und mit 29. und 30. folgt $\angle(a', a) = \angle(c', c) = \angle(b', b)$. Nach 11.70. ist dann $\angle(a', b') = \angle(a, b) \neq \mathbb{R}$, also $X \in n$ gemäß 30., und nun führt 29. mit $\angle(a', a) = \angle(b', b)$ und 34. auf $a' \cap n = \{X, A'\} = m \cap n$ und $b' \cap n = \{X, B'\} = k \cap n$.

Wieder nach 29. gilt $\angle(\langle A', C'\rangle, c') = \angle(a, \langle B, X\rangle)$ und $\angle(\langle B', C'\rangle, c') = \angle(b, \langle A, X\rangle)$, und dann ist $\langle A', C'\rangle = \langle B', C'\rangle \overset{11.71.}{\Leftrightarrow} \angle(\langle A', C'\rangle, c') = \angle(\langle B', C'\rangle, c') \;\Leftrightarrow\; \angle(a, \langle B, X\rangle) =$ $= \angle(b, \langle A, X\rangle) \overset{11.70.}{\Leftrightarrow} \angle(a, b) = \angle(B, X, A) \overset{30.}{\Leftrightarrow} X \in k(A, B, C))$. $\square$

Als Corollar erhalten wir

36. **Satz von Miquel–Clifford.** *Bilden vier Geraden zu je dreien ein Dreieck, so gehen die Umkreise dieser Dreiecke durch einen Punkt.*

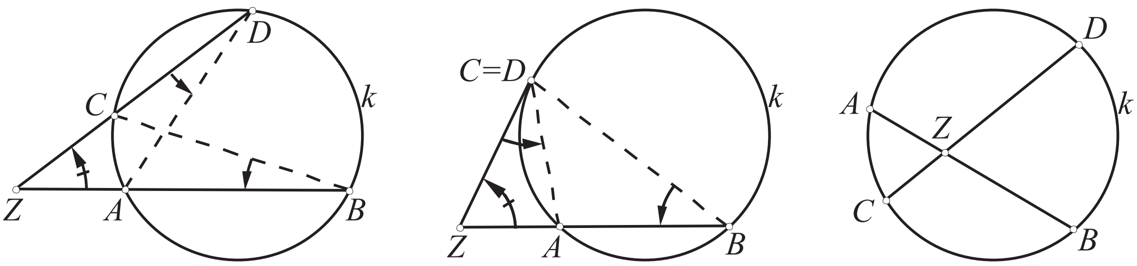
Beweis: Sind a, b, c, d die betrachteten Geraden, so findet man Punkte A, B, C, A', B', C' mit $A', B, C \in a \;\wedge\; B', C, A \in b \;\wedge\; C', A, B \in c \;\wedge\; A', B', C' \in d$, und damit folgt gemäß 35. die Behauptung. $\square$

F. Sekantensatz und Büschelsatz

Unter Verwendung von 29., 30., 3. und 6. zeigen wir

37. **Sekantensatz.** *Sind A, B, C nichtkollineare Punkte eines Kreises k und ist $Z \in \langle A, B\rangle \backslash k$, so gilt für $D \in \mathbb{C}\backslash\{Z\}$:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} (i) & \langle Z, C\rangle \cap k = \{C, D\} \;\Leftrightarrow\; (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = (\overline{C-Z})\cdot(D-Z), \\ (ii) & \langle Z, C\rangle \cap k = \{C, D\} \;\Rightarrow\; |A-Z|\cdot|B-Z| \;=\; |C-Z|\cdot|D-Z|. \end{array}}$$



Beweis: Es ist $\langle Z, C\rangle \cap k = \{C, D\} \overset{29.,30.}{\Leftrightarrow} \angle(B, Z, C) = \angle(A, Z, D) \wedge \angle(C, B, Z) = \angle(Z, D, A)$ $\overset{5.(\diamond)}{\Leftrightarrow}$ $((Z, B, C)$ und (Z, D, A) sind gegensinnig ähnlich$)$ $\overset{3.}{\Leftrightarrow} \dfrac{\overline{C-Z}}{\overline{B-Z}} = \dfrac{A-Z}{D-Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = (\overline{C-Z})\cdot(D-Z) \;\;\Rightarrow\; |A-Z|\cdot|B-Z| = |C-Z|\cdot|D-Z|$. $\square$

38. *Anmerkungen.* Nach 11.67.(∗) und 11.69.(i) gilt in 37. die Aussage

(i) $\quad (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = (\overline{A-Z})\cdot(B-Z) \;\in\; \mathbb{R}^*$,

da Z, A, B kollinear sind. Weiter erkennt man, daß die Zahl $(A-Z)\cdot(\overline{B-Z})$ in 37. *allein* durch Z und k festgelegt ist, denn 37.(i) besagt gerade, daß sie sich nicht ändert, wenn (A, B) durch (C, D) ersetzt wird, wobei C beliebig auf k gewählt werden kann. Man setzt

(ii) $\quad (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) =: Z[k]$

und nennt $Z[k]$ auch die **Potenz von Z bzgl. k.**

Wegen $Z[k]\in\mathbb{R}^*$ führt 11.11.(i) auf

(iii) $\quad (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = (A-Z)\circ(B-Z)$,

und mit 10.7. (ii), (iii) folgt

(iv) $\quad Z\in]A,B[\;\Rightarrow\; (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = -|A-Z|\cdot|B-Z|$,

(v) $\quad Z\notin]A,B[\;\Rightarrow\; (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = +|A-Z|\cdot|B-Z|$.

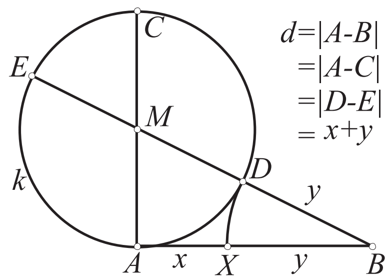
Abgesehen vom Vorzeichen ist $Z[k]$ also durch $|A-Z|\cdot|B-Z|$ gegeben.

Ist $k=k_{M,r}$, so ist $|A-Z|\cdot|B-Z|$ im Falle $|Z-M|<r$ mit negativem Vorzeichen und im Falle $|Z-M|>r$ mit positivem Vorzeichen zu versehen (vgl. 26. mit Beweis).

Dies steht in Einklang mit der folgenden Beobachtung:
Ist $|Z{-}M|{>}r$ und ist T der Berührpunkt einer Tangente t durch Z an k, so führt (v) auf

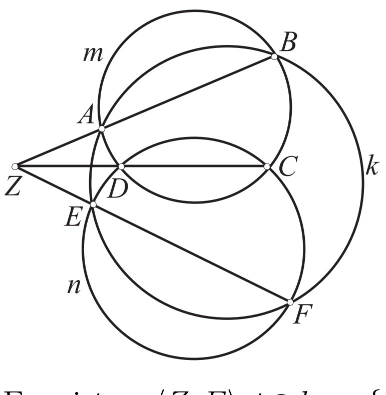
(vi) $\quad (A-Z)\cdot(\overline{B-Z}) = |T-Z|^2 > 0$.

Der Sekantensatz schlägt eine Brücke zwischen Abstandsbegriff und Kreisbegriff und gehört – wie der Randwinkelsatz – zu den wichtigsten Sätzen der Elementargeometrie!



39. Als eine Anwendung des Sekantensatzes erwähnen wir hier eine Konstruktion für die Teilung einer Strecke $[A,B]$ nach dem **goldenen Schnitt:**

Das Lot von A auf $\langle A,B\rangle$ treffe $k_{A,d}$ für $d:=|A{-}B|$ im Punkt C. Ist M der Mittelpunkt des Thaleskreises k über $\{A,C\}$ und trifft dieser die Gerade $\langle M,B\rangle$ in D und E mit $|D{-}B|<|E{-}B|$, so teilt der Schnittpunkt X von $k_{B,|D-B|}$ mit $[A,B]$ die Strecke $[A,B]$ im goldenen Schnitt. Denn für $x=|A{-}X|$ und $y=|X{-}B|$ folgt $d^2=|A{-}B|^2 \overset{37.}{=} |D{-}B|\cdot|E{-}B| = y\cdot(d+y)$, also $(d-y)\cdot d = y^2$ und damit $(x+y)/x=(y/x)^2$. Für $\Phi:=y/x$ gilt dann $1+\Phi=\Phi^2$ und $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$, d.h. Φ ist das „goldene" Teilverhältnis (Φ = Phi erinnert an PHIDIAS).



Als eine weitere Anwendung des Sekantensatzes zeigen wir

40. **Büschelsatz.** *Sind $A,\dots,F$ sechs verschiedene Punkte und sind k,m,n drei verschiedene Kreise in $\mathbb{C}$ mit $k\cap m=\{A,B\}\;\wedge\; m\cap n=\{C,D\}\;\wedge\; n\cap k=\{E,F\}$, so liegen die Geraden $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle,\langle E,F\rangle$ im Büschel.*

Beweis: Ist $\langle A,B\rangle\|\langle C,D\rangle\|\langle E,F\rangle$, so gilt die Behauptung. Ggf. nach einer Umbenennung sei deshalb $\langle A,B\rangle\cap\langle C,D\rangle =: \{Z\}$ mit $Z\in\mathbb{C}$. Wäre $Z\in m$, so wäre $|\{A,B,C,D\}|\le 3$. Also ist $Z\notin\{A,B,C,D\}$ und damit $Z\notin k\cup m\cup n$.
Es sei $t:=\langle Z,E\rangle, t\cap k =: \{E,G\}$ und $t\cap n =: \{E,H\}$. Nach 37. ist $(\overline{E-Z})\cdot(G-Z) = (\overline{A-Z})\cdot(B-Z) = (\overline{C-Z})\cdot(D-Z) = (\overline{E-Z})\cdot(H-Z)$, also $G=H\in k\cap n=\{E,F\}$. Wäre $G=H=E\neq F$, so wäre $F\notin t$ und $t\cap k = t\cap n=\{E\}$ im Widerspruch zu 32.. Also ist $Z\in\langle E,G\rangle=\langle E,F\rangle$. $\square$

G. Die Sätze von Menelaos und Ceva

41. Sind X, A, B drei verschiedene Punkte von $\mathbb{C}$, so liefert das **Teilverhältnis**

$$\boxed{t := \frac{X-A}{X-B} = \frac{A-X}{B-X} \text{ von } X \text{ bzgl. } (A,B)} \quad \text{(vgl. 9.6.)}$$

eine exakte Information über die Lage von X relativ zu A und B. Offenbar ist $\boxed{t \notin \{0,1\}}$, und wegen $\left(t = \dfrac{X-A}{X-B} \Leftrightarrow tX-tB = X-A \Leftrightarrow X = \dfrac{tB-A}{t-1}\right)$ gilt:

(i) *Die Abbildung* $\mathbb{C}\backslash\{A,B\} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\} : X \to \dfrac{X-A}{X-B}$ *ist eine Bijektion.*

Wegen $\left(t = \dfrac{X-A}{X-B} = \dfrac{A-X}{B-X} \Leftrightarrow 1-t = \dfrac{B-A}{B-X} \Leftrightarrow 1-t^{-1} = \dfrac{A-B}{A-X}\right)$ und 9.6. folgt im Falle $t \in \mathbb{R}$:

(ii) $t < 0 \Leftrightarrow X \in]A,B[$,

(iii) $1 < t \Leftrightarrow 1-t < 0 \Leftrightarrow B \in]A,X[$,

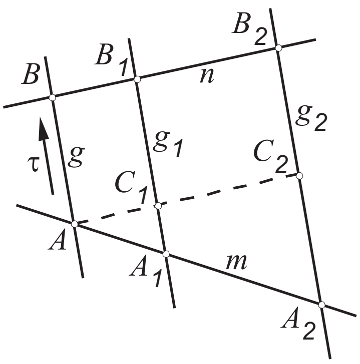
(iv) $0 < t < 1 \Leftrightarrow 1-t^{-1} < 0 \Leftrightarrow A \in]X,B[$.

In Verbindung mit 9.7. bedeutet dies

(v) $\boxed{X \in \langle A,B\rangle\backslash\{A,B\} \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}}$,

d.h. *das Teilverhältnis von X bzgl. (A,B) ist genau dann reell, wenn X,A,B kollinear sind.*

Die wichtigsten Sätze über Teilverhältnisse sind die Strahlensätze 9.26.(i),(ii).
Als Ergänzung zu 9.26.(i) notieren wir hier

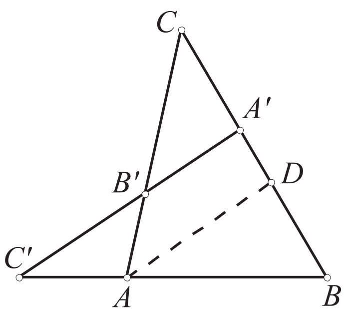


42. **Projektionssatz.** *Sind drei verschiedene parallele Geraden $g, g_1, g_2 \in \mathbb{G}$ gegeben, die eine Gerade m in den Punkten A, A_1, A_2 und eine Gerade n in den Punkten B, B_1, B_2 schneiden, so ist* $\boxed{\dfrac{A-A_1}{A-A_2} = \dfrac{B-B_1}{B-B_2}}$.

Beweis: Die Parallele zu n durch A treffe g_1, g_2 in C_1, C_2. Ist τ die Translation $X \to X-A+B$, so folgt

$$\frac{A-A_1}{A-A_2} \overset{9.26.(i)}{=} \frac{A-C_1}{A-C_2} = \frac{\tau(A)-\tau(C_1)}{\tau(A)-\tau(C_2)} = \frac{B-B_1}{B-B_2}. \qquad \square$$

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir



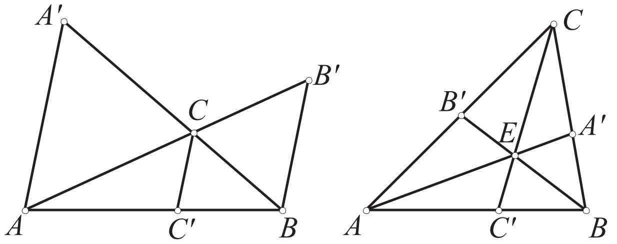
43. **Satz des Menelaos.** *Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck und sind $A' \in \langle B,C\rangle$, $B' \in \langle C,A\rangle$, $C' \in \langle A,B\rangle$ mit $A',B',C' \notin \{A,B,C\}$, so sind A',B',C' genau dann kollinear, wenn* $\boxed{\dfrac{A'-B}{A'-C}\cdot\dfrac{B'-C}{B'-A}\cdot\dfrac{C'-A}{C'-B} = 1}$ *gilt.*

Beweis: Wegen $B' \notin \langle B,C\rangle$ existiert $D \in \langle B,C\rangle$ mit $\langle A,D\rangle \| \langle A',B'\rangle$. Dann ist $C' \in \langle A',B'\rangle \Leftrightarrow \langle A',C'\rangle \| \langle A,D\rangle \Leftrightarrow$

$$\overset{41.,42.}{\Leftrightarrow} \frac{C'-B}{C'-A} = \frac{A'-B}{A'-D} = \frac{A'-B}{A'-C}\cdot\frac{A'-C}{A'-D} \overset{42.}{=} \frac{A'-B}{A'-C}\cdot\frac{B'-C}{B'-A}. \qquad \square$$

Die folgende Aussage, die mit 43. eng verbunden erscheint, wurde erst etwa 1800 Jahre später entdeckt:

44. **Satz von Ceva.** *Ist* $\{A, B, C\}$ *ein Dreieck und sind* $A' \in \langle B, C\rangle$, $B' \in \langle C, A\rangle$, $C' \in \langle A, B\rangle$ *mit* $A', B', C' \notin \{A, B, C\}$, *so liegen die Geraden* $\langle A, A'\rangle, \langle B, B'\rangle, \langle C, C'\rangle$ *genau dann im Büschel, wenn* $(*)$ $\boxed{\dfrac{A'-B}{A'-C} \cdot \dfrac{B'-C}{B'-A} \cdot \dfrac{C'-A}{C'-B} = -1}$ *gilt.*



Beweis: Wir setzen $\alpha := \dfrac{A'-B}{A'-C} \cdot \dfrac{A-C'}{A-B}$ und $\beta := \dfrac{B'-C}{B'-A} \cdot \dfrac{B-A}{B-C'}$.

a) Es sei $\langle A, A'\rangle \| \langle C, C'\rangle$, also $\alpha = 1$ gemäß 42.. Dann ist $(\langle B, B'\rangle \| \langle C, C'\rangle \Leftrightarrow$ $\overset{41.,42.}{\Leftrightarrow}$ $\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot (-\beta) = -1 \Leftrightarrow (*))$.

b) Es sei $\langle A, A'\rangle \cap \langle C, C'\rangle =: \{E\}$, also $\alpha = \dfrac{E-C'}{E-C}$ gemäß 43.. Dann ist $(E \in \langle B, B'\rangle \Leftrightarrow$ $\overset{43.}{\Leftrightarrow}$ $\beta = \dfrac{E-C}{E-C'} \Leftrightarrow \alpha \cdot (-\beta) = -1 \Leftrightarrow (*))$. □

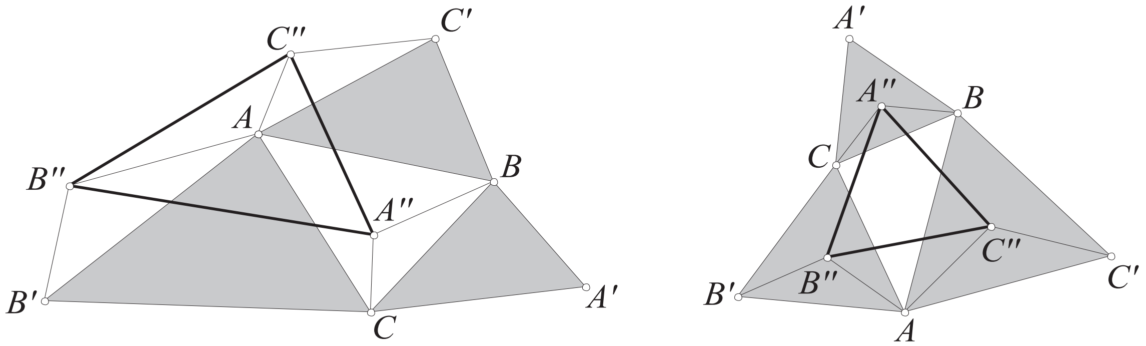
H. Ausblick

Es gibt hunderte von elementargeometrischen Sätzen, z.T. mit sehr überraschenden und ästhetisch beeindruckenden Aussagen. Viele wurden bereits im Altertum von den Griechen entdeckt, viele aber auch im 19. Jahrhundert, dem sog. „goldenen Zeitalter der Geometrie".

Aber auch heute noch beschäftigen sich Mathematiker wie Hobby–Mathematiker gern mit diesem Gebiet.

Wir schließen diesen Paragraphen mit zwei Beispielen:

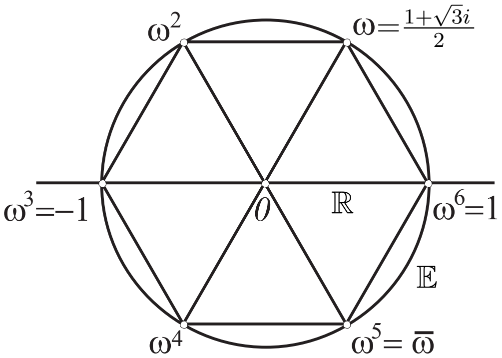
1997 fand die Hamburger Diplomandin K. Diercks die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon:

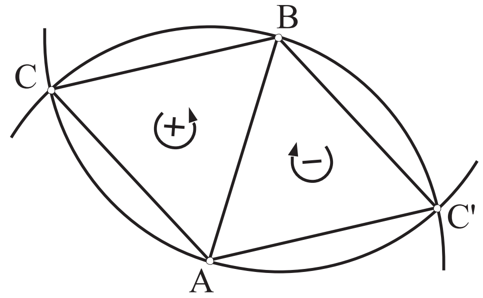


45. **Satz.** *Sind* $(A, B, C', C''), (C, A', B, A''), (B', C, A, B'')$ *gleichsinnig ähnliche Vierecke, so sind* $(B'', A'', C''), (A, B, C'), (C, A', B), (B', C, A)$ *gleichsinnig ähnliche Dreiecke, oder es ist* $A'' = B'' = C''$.

Beweis: Nach 2. gilt $r := (C'-B)/(A-B) = (B-A')/(C-A') = (A-C)/(B'-C)$ sowie $s := (C''-B)/(A-B) = (A''-A')/(C-A') = (B''-C)/(B'-C)$, also $r[B''-A''] = r[C+s(B'-C)-A'-s(C-A')] = B-A'+s(A-C)-s(B-A') = B+s(A-B)-A'-s(C-A') = C''-A''$. Mit 2. führt dies auf die Behauptung. □

Der üblicherweise Napoleon zugeschriebene Satz bezieht sich auf den Spezialfall von 45., daß die Dreiecke $(A, B, C'), (C, A', B), (B', C, A)$ gleichseitig mit den Schwerpunkten C'', A'', B'' sind. Dazu bemerken wir folgendes:





$C := A{+}\omega(B{-}A),\ C' := A{+}\overline{\omega}(B{-}A)$

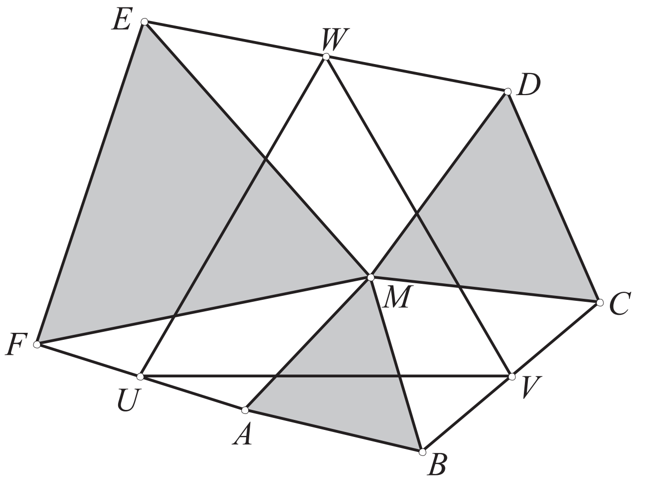
46. Für $\boxed{\omega := (1{+}\sqrt{3}\,i)/2}$ gilt $\boxed{\omega + \overline{\omega} = 1}$ und $\omega \cdot \overline{\omega} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$,
also $\boxed{\omega \cdot \overline{\omega} = 1}$ und $\boxed{\omega \in \mathbb{E}}$ sowie $\omega = 1 - \overline{\omega}$. Dies impliziert
$\boxed{\omega^2 = \omega - 1 \ \wedge\ \omega^3 = -1 \ \wedge\ \omega^6 = 1}$ und
$|1 - 0| = 1 = |\omega| = |\omega{-}0| = |\overline{\omega}{-}0| = |\overline{\omega}| = |1{-}\omega| = |1{-}\overline{\omega}|$.

Ist $D \in \mathbb{C}$, so nennt man die Drehung $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \omega(X - D) + D$ eine $60°$–**Drehung um** D und $\delta^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to \overline{\omega} \cdot (X - D) + D$ eine $(-60)°$–**Drehung um** D.
Offenbar erzeugt δ die zyklische Gruppe $\{\delta, \delta^2, \delta^3, \delta^4, \delta^5, \delta^6\}(\circ)$ mit $\delta^3 = \widetilde{D} \ \wedge\ \delta^6 = id_{\mathbb{C}}$.

Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$, so sind $\{A, B, C\}$ und $\{A, B, C'\}$ für $C := A{+}\omega(B{-}A)$ und $C' := A{+}\overline{\omega}(B{-}A)$ gleichseitige Dreiecke. Wegen $k_{A,|A-B|} \cap k_{B,|A-B|} = \{C, C'\}$ gibt es nur diese beiden Möglichkeiten, $\{A, B\}$ zu einem gleichseitigen Dreieck zu ergänzen.

Wegen $C, C' \in s_{A,B}$ ist hiermit insbesondere auch aufgezeigt, wie man $s_{A,B}$ ausgehend von A, B mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

47. Die folgende Aussage wurde im Jahre 2000 im Internet verbreitet:



Windmühlensatz. *In der Anschauungsebene seien gleichseitige gleichsinnig ähnliche Dreiecke* (M, A, B), (M, C, D), (M, E, F) *gegeben .*
Dann bilden die Mittelpunkte der Strecken $[B, C]$, $[D, E]$, $[F, A]$ *ein gleichseitiges Dreieck, falls sie nicht zusammenfallen.*

Beweis: O.B.d.A. seien $M{=}0$ und $B{=}\rho{\cdot}A$, wobei $\rho{\in}\{\omega, \overline{\omega}\}$ gemäß 46. ist. Dann ist $D{=}\rho{\cdot}C$ und $F{=}\rho{\cdot}E$, und mit $\rho^2 \overset{46.}{=} \rho{-}1$ folgt
$\rho \cdot [(B{+}C)/2{-}(F{+}A)/2] = (\rho^2 A{+}D{-}\rho^2 E{-}\rho \cdot A)/2 = (-A{+}D{-}\rho E{+}E)/2 =$
$= (D{+}E)/2{-}(F{+}A)/2$, wie behauptet. $\square$

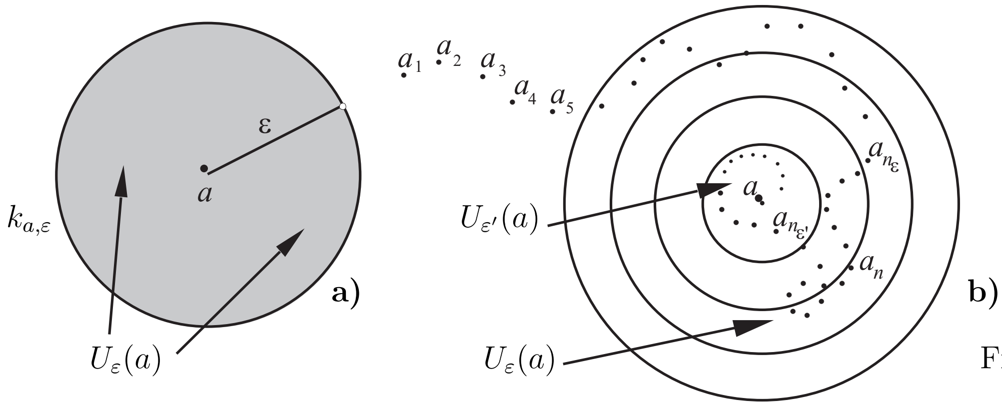
13. Grenzwerte von Folgen komplexer Zahlen

Im folgenden behandeln wir *Elemente der Grenzwerttheorie* im Bereich der komplexen Zahlen. Damit begeben wir uns in eines der wichtigsten Gebiete der Mathematik, welches auch Analysis genannt wird.

A. Konvergenz von Folgen

1. Ist $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, ist also a ein Punkt der komplexen Ebene und ε eine positive reelle Zahl, so wird $k_{a,\varepsilon} := \{x \in \mathbb{C} \,\big|\, |x-a| = \varepsilon\}$ der **Kreis um a mit dem Radius** ε und $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{C} \,\big|\, |x-a| < \varepsilon\}$ die ε–**Umgebung von** a genannt. Zugleich heißt $U_\varepsilon(a)$ auch die *offene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ε*, jedoch werden wir die kürzere Bezeichnung „ε–Umgebung von a“ bevorzugen (Figur 1.a)). Die Menge $\overline{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \cup k_{a,\varepsilon}$ wird die **abgeschlossene Kreisscheibe um a mit dem Radius** ε genannt.

Wir interessieren uns hier nun **nicht** nur für **eine** ε–Umgebung von a, sondern für **alle** ε–Umgebungen von a, wobei wir uns diese von außen nach innen mit immer kleiner werdendem Radius ε durchlaufen denken (Figur 1.b)).



Figur 1

Mit Hilfe der ε–Umgebungen von a können wir nämlich „*testen*“, ob die Punkte einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ (vgl. 6.23.) zu dem Punkt a „*hinstreben*“ oder nicht (Figur 1.b)).

Um dies deutlich ausdrücken zu können, verwenden wir die folgenden Redeweisen:

a) Wenn wir von $\boxed{\textbf{fast allen}}$ Elementen einer Menge M sprechen, so meinen wir

$$\boxed{\textit{alle bis auf endlich viele Ausnahmen}}.$$

(Z.B. gilt für *jede* natürliche Zahl n: Fast alle Elemente von $\mathbb{N}$ sind größer als n.)

b) Im weiteren bedeute „*Folge*“ stets „Folge komplexer Zahlen“
und „*reelle Folge*“ stets „Folge reeller Zahlen“.

c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und sind $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r < s$, so heißt a_s ein **Nachfolger** von a_r (auch dann, wenn $a_r = a_s$ sein sollte).

Unter Verwendung dieser Redeweisen setzen wir nun fest:

Definition. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und ist $a \in \mathbb{C}$, so sagen wir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **strebt gegen**

a oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert gegen** a, wenn **jede** vorgegebene ε–Umgebung von a die Elemente a_n für *fast* alle $n \in \mathbb{N}$ enthält, d.h., *wenn es zu* **jeder** *ε–Umgebung von a ein Folgeglied gibt, dessen sämtliche Nachfolger in $U_\varepsilon(a)$ liegen.*

Demnach gilt

(i) *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **konvergiert** *genau dann gegen die komplexe Zahl a, wenn es* $\boxed{\text{zu } \textbf{jedem } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ *ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit* $\boxed{|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall \ \ n > n_\varepsilon}$ *gibt.*

Hierbei wird durch die Schreibweise „n_ε“ angedeutet, daß es sich bei n_ε um eine von der Wahl von ε abhängige natürliche Zahl handelt. In der Tat: Wenn ε sehr klein ist, muß n_ε unter Umständen sehr groß gewählt werden. Wir zeigen nun:

(ii) *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die zugleich gegen $a \in \mathbb{C}$ und gegen $b \in \mathbb{C}$ konvergiert, so ist $a = b$.*

Beweis: Es sei $\varepsilon := \frac{1}{2}|a - b|$. Wäre $a \neq b$, also $\varepsilon > 0$, so gäbe es $n_\varepsilon, m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall \ \ n > n_\varepsilon$ und mit $|b - a_m| < \varepsilon \quad \forall \ \ m > m_\varepsilon$, und für $k := n_\varepsilon + m_\varepsilon$ ergäbe sich dann der Widerspruch $|a - b| \leq |a - a_k| + |b - a_k| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|$ (vgl. 8.28. und 1.22.).
Demnach ist $\varepsilon = 0$, und mithin ist $a = b$. $\square$

Wegen (ii) gibt es zu einer vorgegebenen Folge stets höchstens eine komplexe Zahl, gegen die diese Folge konvergieren kann.

Entsprechend setzen wir fest:

α) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, so nennen wir a **den Grenzwert** oder **den Limes** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und schreiben

(iii) $$\boxed{a = \lim_{n\to\infty} a_n}$$

(gelesen „a gleich Limes a_n für n gegen Unendlich“).

β) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die **nicht** gegen irgendeine komplexe Zahl konvergiert, so heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergent**, und wir sagen, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert**.

γ) Da die Anfangsglieder einer Folge für die Konvergenz bzw. Divergenz dieser Folge ohne Bedeutung sind, übernehmen wir die gegebenen Definitionen und Redeweisen für Folgen des Typs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,r\}}$ (mit $r \in \mathbb{N}$) anstelle von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **Beispiele**.

(i) *Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen* 0.

Beweis: Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (beliebig!) gewählt. Nach 2.12. existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < n_\varepsilon$, und für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir dann $\left(n > n_\varepsilon \ \Rightarrow \ n > n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon\right)$. $\square$

Bemerkung. Es ist $\boxed{\frac{1}{n} \neq 0 \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N}}$. Gleichwohl gilt $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ = \ 0}$, d.h. der Grenzwert, dem die Folgenglieder beliebig nahe kommen, **ist** die Zahl Null!

(ii) *Die Folge* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergiert.*

Beweis: Es sei $\varepsilon := 1$. Wäre $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = a \in \mathbb{C}$, so gäbe es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a-(-1)^n| < \varepsilon$ $\forall\ n > n_\varepsilon$, und für $m := 2n_\varepsilon$ erhielten wir dann mit 8.28. den Widerspruch $2 = |1-(-1)| \leq$ $\leq |1-a| + |a-(-1)| = |a-(-1)^m| + |a-(-1)^{m+1}| < \varepsilon + \varepsilon = 2$. □

(iii) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2ni}{n+1} = 2i$.

Beweis: Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Zu ε existiert eine natürliche Zahl n_ε mit $\dfrac{2}{\varepsilon} < n_\varepsilon$, und für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\left(n > n_\varepsilon \ \Rightarrow\ \dfrac{2}{\varepsilon} < n < n+1 \ \Rightarrow\ \left|2i - \dfrac{2ni}{n+1}\right| = \left|\dfrac{2i}{n+1}\right| = \dfrac{2}{n+1} < \varepsilon\right)$. □

(iv) *Ist* $a \in \mathbb{C}$ *und* $a_n = a \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beweis: 1.(i) ist für $n_\varepsilon := 1$ erfüllt. □

3. Eine Teilmenge M von $\mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit $M \subseteq U_r(0)$ gibt. Demnach ist M genau dann beschränkt, wenn alle Punkte von M in einer festen (möglicherweise sehr großen) Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt 0 liegen.

Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn die Menge aller Folgenglieder beschränkt ist.

Demnach ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann beschränkt, wenn es ein festes $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|a_n| < r \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ gibt.

In diesem Zusammenhang zeigen wir

4. **Satz**. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen $a \in \mathbb{C}$. Zu $\varepsilon := 1$ existiert dann ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon = 1 \quad \forall\ n > n_\varepsilon$. Wir setzen $r := 1 + |a| + |a_1| + \cdots + |a_{n_\varepsilon}|$ und erhalten $|a_n| < |a_n|+1 \leq r$ für $n \leq n_\varepsilon$ sowie $|a_n| = |a_n - 0| \leq |a_n - a| + |a - 0| < 1 + |a| \leq r$ für $n > n_\varepsilon$. □

5. *Bemerkungen.* a) Wenn eine Folge beschränkt ist, braucht sie nicht konvergent zu sein. Dies erkennt man aus 2.(ii).

b) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist offenbar nicht beschränkt. Nach 4. ist sie dann auch nicht konvergent.

B. Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Als vielseitig verwendbare Aussage zeigen wir

6. **Satz**. *Sind* $c, d, e \in \mathbb{C}$ *und sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergente** *Folgen, so gilt:*

(i) *Die Folgen* $(e + c\cdot a_n + d\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sind konvergent.*

(ii) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}(e + c\cdot a_n + d\cdot b_n) = e + c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n + d\cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(iii) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

(iv) *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *so gibt es ein* $r \in \mathbb{N}$ *mit* $b_n \neq 0 \quad \forall\ n > r$, *und dann ist die Folge* $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,r\}}$ *konvergent mit* $\lim\limits_{r<n,\, n\to\infty}(a_n/b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) / \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$.

Beweis: Es sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Außerdem sei ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gewählt.

a) Zu $\delta := \dfrac{\varepsilon}{1+|c|+|d|}$ gibt es $n_\delta, m_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|a-a_n| < \delta \ \ \forall\, n > n_\delta$ und $|b-b_m| < \delta$ $\forall\, m > m_\delta$. Für $n_\varepsilon := n_\delta + m_\delta$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_\varepsilon$ folgt dann
$|(e+ca+db)-(e+c\cdot a_n+d\cdot b_n)| = |c(a-a_n)+d(b-b_n)| \le |c|\cdot|a-a_n|+|d|\cdot|b-b_n| <$
$< (1+|c|+|d|)\cdot\delta = \varepsilon$. Damit ist (ii) bewiesen.

b) Zu $\delta := \sqrt{\varepsilon}$ gibt es $n_\delta, m_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|a-a_n| < \delta \ \ \forall\, n > n_\delta$ und $|b-b_m| < \delta \ \ \forall\, m > m_\delta$. Für $n_\varepsilon := n_\delta + m_\delta$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_\varepsilon$ folgt dann $|0-(a-a_n)\cdot(b-b_n)| =$ $= |a-a_n|\cdot|b-b_n| < \delta\cdot\delta = \varepsilon$, d.h. die Folge $((a-a_n)\cdot(b-b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Zusammen mit (ii) zeigt dies, daß $(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a_n-a)\cdot(b_n-b)+a\cdot b_n+b\cdot a_n+(-a\cdot b))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $0+a\cdot b+b\cdot a-a\cdot b = a\cdot b$ konvergiert, und mithin sind (i) und (iii) gültig.

c) Es sei $b \ne 0$ und $\delta := \min\big\{\frac{|b|}{2},\ \frac{|b|^2}{2}\varepsilon\big\}$. Dann gibt es ein $n_\delta\in\mathbb{N}$ mit $|b-b_n|<\delta\ \forall\ n>n_\delta$, und es folgt $|b| = |0-b| \le |0-b_n| + |b_n-b| < |b_n|+\delta \le |b_n|+\frac{|b|}{2}\ \ \forall\, n > n_\delta$, also $\frac{|b|}{2}<|b_n|$ $\forall\, n > n_\delta$, und weiter dann $\left|\frac{1}{b}-\frac{1}{b_n}\right| = |b-b_n|\cdot\frac{1}{|b|\cdot|b_n|} < \Big(\frac{|b|^2}{2}\cdot\varepsilon\Big)\cdot\Big(\frac{1}{|b|}\cdot\frac{2}{|b|}\Big) = \varepsilon \ \ \forall\, n > n_\delta$.
Demnach ist $b_n \ne 0\ \forall\ n > r := n_\delta$, und die Folge $\big(\frac{1}{b_n}\big)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,\dots,r\}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{b}$.

Mit (i) und (iii) führt dies auf $\lim\limits_{r<n,\,n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{r<n,\,n\to\infty}\big(a_n\cdot\frac{1}{b_n}\big) = a\cdot\frac{1}{b}$, also auf (iv). □

7. **Beispiele**.

(i) *Für* $r\in\mathbb{N}$ *ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^r} = \big(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\big)^r = 0$.

Der Beweis ergibt sich aus 2.(i) und 6.(iii) durch Induktion.

(ii) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+7n-4}{3n^5-2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot n^{-3}+7\cdot n^{-4}-4\cdot n^{-5}}{3-2\cdot n^{-5}} = \dfrac{0}{3} = 0.$

(iii) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^7+3i}{5n^7-4in+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2+3i\cdot n^{-7}}{5-4i\cdot n^{-6}+n^{-7}} = -\dfrac{2}{5}.$

(iv) *Es ist* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{i\cdot n^2+1}{7n^2-i} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{i+n^{-2}}{7-i\cdot n^{-2}} = \dfrac{i}{7}.$

Weiter zeigen wir nun

8. **Satz**. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge, so sind auch die Folgen* $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\overline{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathit{Re}\,(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\mathit{Im}\,(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent (vgl. 8.27.), und es gilt*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} a_n|$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,(a_n) = \mathrm{Re}\,(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}\,(a_n) = \mathrm{Im}\,(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$,

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\,(a_n) + i\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}\,(a_n)$.

Beweis: Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ und $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon \;\forall\, n > n_\varepsilon$. Wegen 8.27. und 8.28. gilt $\big||a| - |a_n|\big| \leq |a - a_n| = |\overline{a} - \overline{a_n}| < \varepsilon \;\forall\, n > n_\varepsilon$, und mithin sind (i) und (ii) gültig. Aus (ii), 8.27. und 6. folgen (iii), (iv), (v). □

9. **Corollar** 1. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge* **reeller** *Zahlen ist stets eine* **reelle** *Zahl.*

Beweis: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, so führt 8.(iii) auf $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \in \mathbb{R}$. □

10. **Corollar 2**. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $(Re(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Im(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.*

Beweis: 6., 8. . □

11. Gelegentlich benötigen wir die **Bernoullische Ungleichung**:

(i) $n \in \mathbb{N} \;\wedge\; x \in \mathbb{R} \;\wedge\; -1 \leq x \;\Rightarrow\; \boxed{1 + nx \leq (1+x)^n}$.

Diese wurde bereits in 2.21. bewiesen.

Ferner verwenden wir auch die **erweiterte Dreiecksungleichung**.

(ii) $n \in \mathbb{N} \;\wedge\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \boxed{\Big|\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu\Big| \leq \sum\limits_{\nu=1}^{n} |a_\nu|}$,

die sich aus 8.28.1. durch Induktion ergibt.

12. **Corollar**. *Für $a \in \mathbb{C}^*$ mit $|a| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.*

Beweis: Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ und $x := \dfrac{1}{|a|} - 1$, also $x > 0$. Nach 2.12. gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $n_\varepsilon > \dfrac{1}{x\cdot\varepsilon}$, und für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_\varepsilon$ folgt dann $\dfrac{1}{|a|^n} = (1+x)^n \overset{11.}{\geq} 1 + nx > nx > n_\varepsilon x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, also $|0 - a^n| = |a|^n < \varepsilon$. □

C. Konvergenzsätze

Die folgenden Sätze haben z.T. einen mehr theoretischen Charakter. Sie bilden den Grundstein zum Beweis wichtiger weiterer Sätze:

13. **Satz**. *Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ und $b \in \mathbb{C}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \in \overline{U}_\varepsilon(b) \;\;\forall\, n \in \mathbb{N}$, so liegt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ in $\overline{U}_\varepsilon(b)$.*

Beweis: Ist $v \in \mathbb{C}\backslash\overline{U}_\varepsilon(b)$ und $z \in \overline{U}_\varepsilon(b)$, so ist $\delta := |v - b| - \varepsilon > 0$ und $|v - b| \leq |v - z| + |z - b| \leq |v - z| + \varepsilon$, also $\delta \leq |v - z|$ und damit $z \notin U_\delta(v)$. Dies bedeutet nach 1.(i), daß v nicht der Grenzwert einer Folge von Elementen aus $\overline{U}_\varepsilon(b)$ ist. □

14. **Satz**. *Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge* **reeller** *Zahlen mit $\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall\; n \in \mathbb{N}$, so gilt $\alpha \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \beta$.*

Beweis: Es sei $\varepsilon := (\beta - \alpha)/2$ und $b := (\alpha + \beta)/2$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $(\alpha \leq x \leq \beta \;\Leftrightarrow\; b - x \leq (\alpha+\beta)/2 - \alpha = \varepsilon \;\wedge\; x - b \leq \beta - (\alpha+\beta)/2 = \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |b - x| \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{U}_\varepsilon(b))$. Deshalb folgt die Behauptung aus 9. und 13. . □

15. **Satz**. *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen* **reeller** *Zahlen mit* $a_n \le b_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, *so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Beweis: Nach 6.(i) ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := b_n - a_n$ eine konvergente Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, und nach 4., 6.(i) und 14. ist $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. □

16. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **reeller** Zahlen heißt
streng monoton steigend, wenn $a_n < a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt,
monoton steigend, wenn $a_n \le a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt,
streng monoton fallend, wenn $a_n > a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt,
monoton fallend, wenn $a_n \ge a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt,
und **monoton**, wenn sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Mit diesen Bezeichnungen ergibt sich das folgende Konvergenzkriterium, das häufig angewendet werden kann, da in der Praxis viele Folgen monoton sind:

17. **Satz**. *Ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* **beschränkte** *monoton steigende (bzw. monoton fallende) Folge reeller Zahlen, so ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent, und es gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = sup\,\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *(bzw.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*).*

Beweis: Es sei $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (bzw. $a := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$) (vgl. 1.35., 1.36.). Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, so gibt es nach der Definition von a ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$ (bzw. $a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$), und dann führt die Monotonie für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_\varepsilon$ auf $a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le a$ (bzw. $a \le a_n \le a_{n_\varepsilon} < a + \varepsilon$), also auf $|a - a_n| < \varepsilon$. Dies bedeutet aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. □

18. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, gilt also $\boxed{k_n < k_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$, so heißt $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Durch Induktion ergibt sich hier $\boxed{n \le k_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}}$.

Aufgrund der Definitionen erhalten wir

(∗) *Konvergiert die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* a, *so konvergiert auch jede Teilfolge von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* a.

Als besonders wichtig erweist sich im weiteren

19. **Satz von Bolzano–Weierstraß**. *Jede* **beschränkte** *reelle Folge besitzt eine monotone konvergente Teilfolge.*

Beweis: Gegeben sei eine beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Der Index n von a_n heiße *Stützzahl*, wenn $a_n \le a_{n+k} \ \ \forall\, k\in\mathbb{N}$ ist, wenn also *kein Nachfolger von* a_n kleiner als a_n ist.
a) Es gebe unendlich viele Stützzahlen unter den Indizes. Nach 6.24. kann man dann eine streng monoton steigende Folge von Stützzahlen betrachten. Dieser entspricht eine monoton steigende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche nach 17. konvergiert.
b) Es gebe nur endliche viele Stützzahlen, und keine sei größer als $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun gemäß 2.20. rekursiv eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
(RD1) Es sei $k_1 := m + 1$;
(RD2) Ist k_n gefunden, so sei $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ minimal derart, daß $k_n < k_{n+1}$ und $a_{k_{n+1}} < a_{k_n}$ ist. (Dies geht, weil k_n *keine* Stützzahl ist.) Dann ist $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und diese konvergiert nach 17. □

20. **Corollar**. *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Gegeben sei die beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist die Folge $(\mathrm{Re}\,(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und hat nach 19. eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Re}\,(a_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Nun ist auch die Folge $(\mathrm{Im}\,(a_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und hat nach 19. eine konvergente Teilfolge $(\mathrm{Im}\,(a_{r_n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Als Teilfolge von $(\mathrm{Re}\,(a_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $(\mathrm{Re}\,(a_{r_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß 18.(∗), und nach 10. ist $(a_{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nun eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

21. Gelegentlich ist es möglich, die Konvergenz einer Folge festzustellen, ohne den zugehörigen Grenzwert zu kennen. Um dies näher auszuführen, setzen wir fest:

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy–Folge**, wenn es $\boxed{\text{zu jedem } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ eine natürliche Zahl n_ε mit $\boxed{(*) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall \;\; n,m > n_\varepsilon}$ gibt, wenn also der Abstand **von je zwei Nachfolgern** von a_{n_ε} *kleiner als* ε ist (man beachte den Unterschied zu 1.(i)). Zunächst bemerken wir

22. **Satz**. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge.*

Beweis. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen a, und es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ n > r$, und für $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n,m > r$ folgt $|a_n - a_m| \leq$ $\leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Umgekehrt gilt

23. **Cauchysches Konvergenzkriterium für Folgen**: *Jede Cauchy–Folge komplexer Zahlen konvergiert in* $\mathbb{C}$.

Beweis: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Cauchy–Folge.
Wäre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ mit $|a_m| > |a_n| + 1$, also mit $|a_m - a_n| > 1$ (vgl. 8.28.), und dann wäre die Bedingung 21.(∗) für $\varepsilon = 1$ verletzt. Demnach ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, und nach 20. existiert eine Teilfolge $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen eine komplexe Zahl a konvergiert.
Jetzt sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig vorgegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge ist, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ m,n > s$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ gibt es außerdem ein $t \in \mathbb{N}$ mit $k_t > s$ und mit $|a - a_{k_t}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $|a - a_n| \leq |a - a_{k_t}| + |a_{k_t} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall \quad n > s$, und damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gezeigt. □

14. Grenzwerte von Reihen komplexer Zahlen

A. Definition von Reihen komplexer Zahlen

1. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen. Dann bezeichnen wir die Folge

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}} \quad \text{mit} \quad \boxed{s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + \cdots + a_n}$$

als die aus der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildete **Reihe** und nennen s_n die n**–te Partialsumme** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demnach ist die aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildete *Reihe* einfach die *Folge der Partialsummen* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

Statt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben wir auch $\boxed{(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}}$. Gibt es ein $s \in \mathbb{C}$ mit $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, so schreiben wir auch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ statt s und erhalten $(*)$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu\big) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu}$ *im Falle der Konvergenz von* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die *Reihe* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* bzw. *divergent*, wenn die *Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent bzw. divergent ist.

Wir verwenden analoge Bezeichnungen, falls anstelle von $\mathbb{N}$ andere Teilmengen von $\mathbb{Z}$ als Indexmengen für die Summation zugrunde gelegt werden.

Anmerkung. Bei vielen Autoren steht „$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$" nicht nur für den Grenzwert s, sondern auch für die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Durch unsere Symbolik versuchen wir, diese Doppeldeutigkeit zu vermeiden.

2. Kennen wir die Terme s_n einer Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so können wir sofort die Folge angeben, aus der diese Reihe gebildet wurde: Man setze einfach $a_1 := s_1$ und $a_n := s_n - s_{n-1}$ für $n \geq 2$, denn dann ist $s_n = a_1 + \cdots + a_n \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.

B. Konvergenzkriterien für Reihen

Wir zeigen zunächst

3. **Satz**. *Sind* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Reihen, so sind auch die Reihen* $(\sum (c{\cdot}a_n{+}d{\cdot}b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *für* $c, d \in \mathbb{C}$ *und* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}, n>r}$ *für* $r \in \mathbb{N}$ *konvergent, und es gilt*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (c{\cdot}a_n{+}d{\cdot}b_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n} \quad \text{sowie} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{r} a_n + \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n}.$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ sei $s_m := a_1 + \cdots + a_m$, $t_m := b_1 + \cdots + b_m$ und $u_m := s_m - s_r$. Durch Induktion folgt $\sum_{\nu=1}^{m} (c \cdot a_\nu + d \cdot b_\nu) = c \cdot s_m + d \cdot t_m \;\;\forall\; m \in \mathbb{N}$, und nach 13.6.(ii) gilt dann $\lim\limits_{m\to\infty} (c{\cdot}s_m{+}d{\cdot}t_m) = c{\cdot} \lim\limits_{m\to\infty} s_m {+} d{\cdot} \lim\limits_{m\to\infty} t_m$ sowie $\lim\limits_{m>r, m\to\infty} u_m = (\lim\limits_{m\to\infty} s_m){-}s_r$. □

Mit Hilfe von 13.23. erhalten wir

4. **Cauchysches Konvergenzkriterium für Reihen**. *Die Reihe* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert genau dann, wenn es* $\boxed{\text{zu jedem } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$ *ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *derart gibt, daß gilt:*

$$(*) \qquad \boxed{\textit{Für alle } m, n \in \mathbb{N} \textit{ mit } m \geq n > n_\varepsilon \textit{ ist } \Big|\sum_{\nu=n}^{m} a_\nu\Big| < \varepsilon}.$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := a_1 + \cdots + a_n$. Ist $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n \geq 1$, so ist $|s_{n-1} - s_m| = |s_m - s_{n-1}| = \big|\sum\limits_{\nu=n}^{m} a_\nu\big|$. Demnach entspricht $(*)$ der Bedingung $(*)$ aus 13.21., und mithin folgt die Behauptung aus 13.22. und 13.23.. □

5. **Corollar.** *Ist die Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Beweis: Satz 4. *mit* $m = n$. □

6. **Satz**. *Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aber die Reihe $\big(\sum \frac{1}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist* **divergent**.
Mithin ist 5. nicht umkehrbar.

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ sei $s_m := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \big(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\big) + \big(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\big) + \cdots + \big(\tfrac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}\big) > \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{1}{4} + 4\cdot\tfrac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}\cdot\tfrac{1}{2^n} > \tfrac{n}{2}, \end{aligned}$$

und folglich ist die Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Mit 13.4. führt dies auf die Behauptung. □

Wir zeigen nun

7. **Vergleichskriterium**. *Gegeben seien eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen und zwei Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Dann gilt:*
   (i) Existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq c_n \ \forall\, n \geq r$ und ist die Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent**, *so konvergieren auch die Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, und es gilt*

$$\boxed{\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|} \quad \textit{sowie} \quad \boxed{\sum_{n=r}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=r}^{\infty} c_n}.$$

   (ii) Existiert ein $s \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq c_n \leq b_n \ \forall\, n \geq s$ und ist die Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergent**, *so divergiert auch die Reihe $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Beweis: (i) Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ vorgegeben, so existiert nach 4. ein $n_\varepsilon \geq r$ mit $\sum_{\nu=n}^m c_\nu < \varepsilon$ für $m \geq n > n_\varepsilon$, und durch Induktion folgt $\left|\sum_{\nu=n}^m a_\nu\right| \leq \sum_{\nu=n}^m |a_\nu| \leq \sum_{\nu=n}^m c_\nu < \varepsilon$ für $m \geq n > n_\varepsilon$. Mit 4. führt dies auf die Konvergenz von $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Die verbleibende Behauptung folgt aus $\left|\sum_{\nu=1}^m a_\nu\right| \leq \sum_{\nu=1}^m |a_\nu| \ \forall\, m \in \mathbb{N}$ und aus $\sum_{\nu=r}^m |a_\nu| \leq \sum_{\nu=r}^m c_\nu \ \forall\, m \in \mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,r\}$ in Verbindung mit 13.15..
(ii) Wäre $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so nach (i) auch $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

8. Eine Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $(\sum |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Nach 7.(i) gilt

   $(*)$ *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Umgekehrt braucht eine konvergente Reihe aber nicht absolut konvergent zu sein, wie wir noch sehen werden.

Alle voranstehenden Sätze gelten entsprechend, wenn von 0 bis n statt von 1 bis n summiert wird. Insbesondere erhalten wir

9. **Konvergenzverhalten geometrischer Reihen.** *Für* $a \in \mathbb{C}$ *wird* $(\sum a^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ **die zu** a **gehörige geometrische Reihe** *genannt (vgl. 2.23.). Es gilt*
   (i) *Für* $m \in \mathbb{N}_0$ *ist* $\sum\limits_{\nu=0}^{m} a^\nu = \dfrac{1-a^{m+1}}{1-a}$, *falls* $a \neq 1$ *ist.*
   (ii) *Im Falle* $|a| < 1$ *ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.
   (iii) *Im Falle* $|a| \geq 1$ *divergiert* $(\sum a^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis: Durch Induktion folgt (i) (vgl. 2.23.), und aus (i), 1.($*$), 13.12. und 13.6. ergibt sich (ii). Im Falle $|a| \geq 1$ gilt $|a^n| = |a|^n \geq 1 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$, und dann führt 5. auf (iii). □

Mit 9. erhalten wir jetzt

10. **Quotientenkriterium**. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei eine Folge komplexer Zahlen, und es gebe ein* $r \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \neq 0 \;\forall\; n \geq r$. *Existiert nun eine* **feste** *reelle Zahl* λ *mit* $\boxed{0 < \lambda < 1}$ *derart, daß die Bedingung* $\boxed{(*) \quad \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \lambda \quad \forall \quad n \geq r}$ *erfüllt ist, so konvergiert die Reihe* $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **absolut**.

Beweis: Ist $d := |a_r| \cdot \lambda^{-r}$, so führt Induktion mit Hilfe von ($*$) auf $|a_n| \leq d \cdot \lambda^n \;\forall\; n \geq r$. Nach 3. und 9. konvergiert die Reihe $(\sum d \cdot \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, und mit 7.(i) und 8. folgt dann die Behauptung. □

Anmerkung. Das Quotientenkriterium ist ein sehr brauchbares Instrument, um die Konvergenz gewisser Reihen zu beweisen. Es beruht, wie der Beweis zeigt, auf dem Konvergenzverhalten geometrischer Reihen.

C. Stellenwertdarstellungen rationaler und reeller Zahlen

In § 3 D hatten wir Zifferndarstellungen für natürliche Zahlen (vgl. 3.19.) und für reelle Zahlen (vgl. 3.22.) betrachtet. Diese wollen wir nun mit Grenzwerten in Verbindung bringen.

Hierzu zeigen wir

11. **Satz**. *Sind* $a, b \in \mathbb{C}$ *mit* $|a| > 1$, *so ist* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{b}{a^\nu} = \dfrac{b}{a-1}$.

Beweis: Nach 9.(ii) ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^\nu = \dfrac{1}{1-1/a} = \dfrac{a}{a-1}$, und mit 3. folgt
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{b}{a^\nu} = b \cdot \left(-1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{a^\nu}\right) = b \cdot \left(-1 + \dfrac{a}{a-1}\right) = \dfrac{b}{a-1}$. □

12. **Satz**. *Es sei* $g \in \mathbb{N}$ *mit* $g \geq 2$. *Ist* $\boxed{r \in [0,1[}$ *und gehört zu* r *gemäß 3.22. die Ziffernfolge* $\boxed{z_{-1}, z_{-2}, \ldots, z_{-n}, \ldots}$ *mit* $z_{-k} \in \{0, 1, \ldots, g-1\} = Z_g \;\forall\; k \in \mathbb{N}$, so ist $\boxed{r = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} z_{-\nu} \cdot g^{-\nu}}$.

Beweis: Nach 3.22($\diamond$) ist $|r - \sum_{\nu=1}^{n} z_{-\nu} \cdot g^{-\nu}| < g^{-n} \;\forall\; n \in \mathbb{N}$. Dies führt mit 13.12. und 1.($*$) auf die Behauptung. □

13. **Satz**. *Es sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$. Ist $(c_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen mit $c_\nu \in Z_g \ \forall\ \nu \in \mathbb{N}$, so ist* $\boxed{s := \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot g^{-\nu}}$ *eine reelle Zahl mit $0 \leq s \leq 1$.*

Wir notieren s in der Form $\boxed{s = (0, c_1 c_2 \dots c_n \dots)_g}$, *im Falle $g = 10$ auch einfach als* $\boxed{s = 0, c_1 c_2 \dots c_n \dots}$, *und nennen dies eine g–***adische Stellenwertdarstellung** *von s. Es gilt* $\boxed{(*) \quad s = 1 \ \Leftrightarrow\ c_\nu = g-1 \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}}$.

Beweis: Wegen $0 \leq c_\nu \cdot g^{-\nu} \leq (g-1) \cdot g^{-\nu}\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}$ und wegen $(\diamond)\ \sum_{\nu=1}^{\infty}(g-1) \cdot g^{-\nu} \overset{11.}{=} 1$ führt 7. auf die erste Behauptung, und es gilt „ $\Leftarrow$ “ in $(*)$. Außerdem führt $1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu g^{-\nu}$ für $d_\nu \in Z_g$ mit 3. und $(\diamond)$ auf $\sum_{\nu=1}^{\infty}(g-1-d_\nu) \cdot g^{-\nu} = 0$, und wegen $g^{-\nu} > 0 \ \wedge\ g-1-d_\nu \geq 0\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}$ impliziert dies $g - 1 - d_\nu = 0\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}$. □

14. Wenn $s = (0, c_1 \dots c_n \dots)_g$ gemäß 13. gegeben ist und wenn in der Ziffernfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab einer Stelle $k \in \mathbb{N}_0$ eine Ziffernsequenz $c_{k+1}c_{k+2}\dots c_{k+m}$ mit $m \in \mathbb{N}$ auftritt, die sich (jeweils direkt anschließend) ad infinitum wiederholt, so daß dann

$$\boxed{c_{k+\mu} = c_{k+\mu+\nu\cdot m}} \quad \forall\ \mu \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall\ \nu \in \mathbb{N}$$

gilt, so schreiben wir $\boxed{s = (0, c_1 \dots c_k \overline{c_{k+1} \dots c_{k+m}} \dots)_g}$ (ohne $c_1 \dots c_k$ im Falle $k = 0$)

und sagen, s besitzt eine **periodische Darstellung** mit $\boxed{p := (c_{k+1} \dots c_{k+m})_g \in \mathbb{N}_0}$ als **Periode**. Hierbei ist $p < g^m$ (vgl. 3.19.). Wir setzen $\boxed{d = (c_1 \dots c_k)_g \in \mathbb{N}_0}$ im Falle $k \geq 1$ und $\boxed{d=0}$ im Falle $k=0$. Dann ist $g^k \cdot s = d+t$ mit $t = (0, \overline{c_{k+1} \dots c_{k+m}} \dots)_g$, und es folgt $g^m \cdot t - t = p$, da die (identischen) Nachkommawerte sich wegheben.

Dies impliziert $(g^m - 1) \cdot (g^k \cdot s - d) = (g^m - 1) \cdot t = p$, also $\boxed{s = \dfrac{1}{g^k}\Big(d + \dfrac{p}{g^m - 1}\Big) \in \mathbb{Q}}$.

15. **Beispiele**.

a) Nach 13.$(*)$ gilt $\boxed{0,\overline{9}\dots = 0,99\dots9\dots = 1}$.

An dieser Identität kann man erkennen, ob man verstanden hat, was ein Grenzwert ist: Es wird **nicht** behauptet, daß $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{9}{10^\nu}$ für irgend ein $n \in \mathbb{N}$ gleich 1 sei; in der Tat, diese Zahl ist für **jedes** $n \in \mathbb{N}$ kleiner als 1. Aber die Reihe $\big(\sum \frac{9}{10^\nu}\big)_{\nu\in\mathbb{N}}$ hat den **Grenzwert** 1, da die Partialsummen der 1 beliebig nahe kommen.

Es sollte damit klar sein, daß das Symbol $0,\overline{9}\dots$ einen *Grenzwert* bezeichnet, und dieser ist wirklich die Zahl 1.

b) Nach 3.22. ist $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142857}\dots \overset{14.}{=} \dfrac{142857}{999999}$. Man prüfe dies nach!

c) Es ist $0,\overline{1}\dots \overset{14.}{=} \dfrac{1}{9}$, $\quad 0,\overline{01}\dots \overset{14.}{=} \dfrac{1}{99}$, $\quad 0,\overline{001}\dots \overset{14.}{=} \dfrac{1}{999}$,

$0,\overline{237}\dots \overset{14.}{=} \dfrac{237}{999}$, $\quad 0,231\overline{0578}\dots \overset{14.}{=} 10^{-3} \cdot \big(231 + \dfrac{578}{9999}\big) \in \mathbb{Q}$.

d) Es ist $\dfrac{1}{4} = 0,25\overline{0}\dots = 0,24\overline{9}\dots$.

Bei Zahlen mit Periode 0 läßt man die Periode 0 und die Punkte bei der Darstellung fort und bezeichnet die Darstellung als **abbrechend**. So ist also $\frac{1}{4} = 0,25$.

Andererseits zeigt dies Beispiel, daß die gleiche Zahl auch mit Periode 9 (und allgemein mit Periode $g-1$, vgl.13.($*$)) darstellbar ist.

16. Die g–adische Darstellung einer reellen Zahl $s \in [0,1[$ wird als **üblich** bezeichnet, wenn sie *nicht* die Periode $g-1$ hat.

Die in 3.22. gewonnene Zifferndarstellung *ist* gemäß 13.($*$) eine übliche Darstellung, da die auftretenden Reste stets kleiner als 1 sind.

Überdies können wir nun auch sehen, daß zwei *verschiedene* übliche g–adische Stellenwertdarstellungen stets *verschiedene* reelle Zahlen repräsentieren, denn wir erhalten

17. **Satz**. *Es sei $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$. Sind $s = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu g^{-\nu}$ und $s = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} d_\nu g^{-\nu}$ zwei übliche g–adische Darstellungen der reellen Zahl $s \in]0,1[$, so gilt $c_\nu = d_\nu \ \forall \ \nu \in \mathbb{N}$.*

Beweis: Wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $c_k \neq d_k$ gibt, dann dürfen wir uns k minimal gewählt denken. Ggf. nach einer Umbenennung ist $c_k < d_k$. Indem wir s mit g^k multiplizieren und die identischen Anfangssummanden fortlassen, erhalten wir $c_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{k+\nu} \cdot g^{-\nu} = = d_k + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{k+\nu} \cdot g^{-\nu} \geq d_k \geq c_k + 1$. Mit 13. führt dies auf $c_{k+\nu} = g-1 \ \forall \ \nu \in \mathbb{N}$ entgegen der Voraussetzung. Also gilt die Behauptung. $\square$

18. **Corollar.** *Ist $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und ist $r \in [0,1[$, so liefert das Berechnungsschema ($*$) aus 3.22. die einzig mögliche übliche g–adische Stellenwertdarstellung von r.*

Beweis: 16., 17. $\square$

19. In 14. hatten wir gesehen, daß jede periodische Stellenwertdarstellung eine *rationale* Zahl repräsentiert. Als Ergänzung zeigen wir nun

20. **Satz**. *Ist $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und ist $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < 1$, so ist die übliche g–adische Stellenwertdarstellung von r* **periodisch** .

Beweis. Es sei $r = \frac{n}{m}$ mit $n, m \in \mathbb{N} \ \wedge \ n < m$. Indem wir für r das Berechnungsschema ($*$) aus 3.22. ansetzen und jede der Gleichungen mit m multiplizieren, entsteht

$$(\diamond) \left\{ \begin{array}{rclcrll} r \cdot m \cdot g & = & z_{-1} \cdot m & + & r_1 \cdot m & \text{mit} & r_1 \cdot m \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ r_1 \cdot m < m \\ r_1 \cdot m \cdot g & = & z_{-2} \cdot m & + & r_2 \cdot m & \text{mit} & r_2 \cdot m \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ r_2 \cdot m < m \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ r_m \cdot m \cdot g & = & z_{-(m+1)} \cdot m & + & r_{m+1} \cdot m & \text{mit} & r_{m+1} \cdot m \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ r_{m+1} \cdot m < m \\ & \vdots & & & & \vdots & \end{array} \right.$$

Nach dem Taubenschlagprinzip 6.20. sind (wenigstens) zwei der in $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ gelegenen Zahlen $r_1 \cdot m, \ldots, r_{m+1} \cdot m$ gleich, und dann stimmen auch die jeweils nachfolgenden Gleichungen in ($\diamond$) überein. Dies bewirkt eine periodische g–adische Stellenwertdarstellung für r. $\square$

21. Die hier für reelle Zahlen aus $[0,1]$ erzielten Ergebnisse lassen sich nach 3.23. und 3. auf alle Intervalle vom Typ $[z, z+1]$ mit $z \in \mathbb{Z}$ übertragen und gelten mutatis mutandis dann für alle reellen Zahlen. So erhalten wir

22. **Hauptsatz zur Stellenwertdarstellung reeller Zahlen**. *Ist $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ und ist $r \in \mathbb{R}$, so besitzt r genau eine übliche g–adische Darstellung. Diese ist genau dann periodisch, wenn r rational ist.*

Beweis: 3.22., 3.23., 12.–21.. □

D. Produkte von Reihen

Wenn man zwei *endliche* Summen aus m bzw. n Summanden *multipliziert*, so geschieht dies nach dem Distributivgesetz, und das Ergebnis hat $m \cdot n$ Summanden. Eine Multiplikationsvorschrift für konvergente Reihen kann deshalb sicher **nicht** analog zu 3. gebildet werden. Vielmehr geht man wie folgt vor:

23. **Cauchy–Produkt von Reihen**.
Gegegeben seien zwei absolut konvergente Reihen $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Die **Produktreihe** $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ist durch*

(i) $c_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ [1])

definiert. Die Reihe $(\sum c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist konvergent, und es gilt

(ii) $\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n.$

Beweis: Wir setzen $A := \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|$ und $B := \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|$
sowie $p_n := \big(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\big) \cdot \big(\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\big)$ und $q_n := \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Nach 4. gibt es $r, s \in \mathbb{N}$ mit
$A_r := \sum_{\nu=r+1}^{\infty} |a_\nu| < \dfrac{\varepsilon}{2(B+1)}$ und $B_s := \sum_{\nu=s+1}^{\infty} |b_\nu| < \dfrac{\varepsilon}{2(A+1)}$.
Für $n = k + s$ mit $k \in \mathbb{N} \ \wedge \ k \geq r$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
|p_n - q_n| &= |a_k b_{s+1} + (a_k + a_{k-1}) b_{s+2} + \cdots + (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1) \cdot b_n + \\
&\qquad + a_{k+1}(b_s + \cdots + b_n) + a_{k+2}(b_{s-1} + \cdots + b_n) + \cdots + a_n(b_1 + \cdots + b_n)| \quad {}^{2)} \\
&\overset{13.11.(ii)}{\leq} A \cdot (|b_{s+1}| + |b_{s+2}| + \cdots + |b_n|) + (|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \cdots + |a_n|) \cdot B \\
&\leq (A+1) \cdot B_s + A_r \cdot (B+1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

b) Nach a) und 13.6. ist $\lim\limits_{n\to\infty} (p_n - q_n) = 0$ und $\big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\big) \cdot \big(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\big) = \lim\limits_{n\to\infty} p_n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} p_n - \lim\limits_{n\to\infty} (p_n - q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (p_n - (p_n - q_n)) == \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu.$ □

Als Anwendung von 10. und 23. zeigen wir

24. **Satz**. *Die* **Exponentialreihe** $\Big(\sum \dfrac{z^n}{n!}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist für jede komplexe Zahl z absolut konvergent.*

---

[1]) Hier werden alle Produkte $a_\nu b_\mu$ mit $\nu, \mu \in \mathbb{N}_0 \ \wedge \ \nu + \mu = n$ aufsummiert.
[2]) Hier sind alle Produkte $a_\nu b_\mu$ mit $0 \leq \nu \leq n \ \wedge \ 0 \leq \mu \leq n \ \wedge \ \nu + \mu > n$ aufzusummieren.
Die spezielle Wahl der Reihenfolge der Summanden ermöglicht die nachfolgende Abschätzung.

Wir setzen

(i) $\boxed{e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots}$

und bezeichnen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to e^z$ *als die* **Exponentialfunktion**. *Die Zahl*

(ii) $e := e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

wird auch die **Eulersche Zahl** *genannt.*

Es gilt die **Funktionalgleichung**

(iii) $\boxed{e^z \cdot e^w = e^{z+w}} \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C},$

und außerdem gelten die Aussagen

(iv) $e^0 = 1,$

(v) $e^z \cdot e^{-z} = 1 \;\wedge\; e^z \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$

(vi) $(e^z)^n = e^{z\cdot n} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},$

(vii) $|e^z - 1 - z| < \frac{|z|^2}{1-|z|} \quad \forall\, z \in U_1(0).$

Beweis: Aus (i) folgt $e^0 = 1$. Nach 10. ist die Exponentialreihe wegen

$$\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| : \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall\, n \geq 2\cdot|z|$$

für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ absolut konvergent. Sind $z, w \in \mathbb{C}$, so führt 23. in Verbindung mit dem binomischen Lehrsatz 3.16. auf

$$e^z \cdot e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}\cdot\frac{w^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\Big(\sum_{\nu=0}^{n}\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}\cdot z^\nu\cdot w^{n-\nu}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n,$$

und damit ist (iii) bewiesen.

Für $z \in \mathbb{C}$ ist $e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ gemäß (iii). Demnach ist (v) gültig, und (vi) ergibt sich durch Induktion aus (iii)–(v).

Ist $z \in U_1(0)$, so ist $d := |z| < 1$, und mit (i), 3., 7.(i) und 9.(ii) erhalten wir
$|e^z - 1 - z| = |z^2 \cdot \big(\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots\big)| < d^2\cdot(1 + d + d^2 + \cdots) = \frac{d^2}{1-d}.$ □

25. *Anmerkung.* Man darf die Exponentialfunktion als die *wichtigste Funktion der Mathematik* bezeichnen.

Wir werden uns mit dieser Funktion noch genau befassen. Wir weisen an dieser Stelle lediglich darauf hin, daß mit 24.(i) ein sehr gutes Berechnungsverfahren für die näherungsweise Bestimmung der Funktionswerte gegeben ist und daß die Exponentenschreibweise gemäß 24.(i) wegen 24.(iii),(vi) mit 3.14. und 7.22. verträglich ist.

Als wichtige **Eigenschaften der Eulerschen Zahl** e erwähnen wir

26. (i) *Es gilt* $\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!} < e < \frac{1}{n!\cdot n} + \sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$ *Für* $n = 6$ *führt dies auf*

(ii) $2\,\frac{517}{720} < e < \frac{1}{4320} + 2\,\frac{517}{720}$ *und damit auf* $2,71805 < e < 2,71829.$

Eine genauere Berechnung (mit $n = 48$) liefert
$e = 2.7\ 1828\ 1828\ 4590\ 4523\ 5360\ 2874\ 7135\ 2662\ 4977\ 5724\ 7093\ 6999\ 5957\ 4966\ 9676...$

Tatsächlich ergibt sich mit 9. die Beziehung

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu!} < \frac{1}{(n+1)!}\Big(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\Big) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\cdot n} \quad \forall\, n\in\mathbb{N},$$

und dies führt mit 24.(ii) auf (i) und (ii). $\square$

27. **Satz**. *Die* EULER*sche Zahl e ist irrational.*

Beweis: Wäre $e = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, so würde eine Multiplikation der Ungleichung aus 26.(i) mit $n!$ auf $g < m\cdot(n-1)! < \frac{1}{n} + g$ mit $g := n!\cdot\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!} \in \mathbb{N}$ führen, und dann gäbe es zwischen g und $g+1$ eine ganze Zahl. $\square$

Eine gänzlich andere Beschreibung der Zahl e, die diese z.B. mit der *Zinseszinsrechnung* in Verbindung bringt, ergibt sich aus

28. **Satz**. *Es gilt*

(i) $\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < e < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ *sowie*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}$.

Beweis: Es sei $n\in\mathbb{N}$. Nach 24.(vii) ist $e^{\frac{1}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{1-\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}$, also $e < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}$, und wegen 24.(i) gilt $1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$, also $\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < e$ (vgl. 2.24. und 24.(vi)). Sowohl $\big|e - \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\big|$ als auch $\big|\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} - e\big|$ ist gemäß (i) kleiner als $\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1} - \big(1+\frac{1}{n}\big)^n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^n\big(1+\frac{1}{n}-1\big) < \frac{e}{n}$, und damit folgt die Behauptung. $\square$

E. Alternierende Reihen

Wir schließen diesen Paragraphen mit zwei Konvergenzkriterien für **reelle Reihen**, also für Reihen, die zu reellen Folgen gehören:

29. **Satz**. *Eine Reihe $(\sum a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{a_n\in\mathbb{R}_+}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $\big(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\big)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis: Wegen $a_n \geq 0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$ ist die Folge der Partialsummen monoton steigend. Deshalb folgt die Behauptung aus 13.4. und 13.17. $\square$

30. **Leibnizsches Konvergenzkriterium**. *Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge mit $\boxed{a_n\in\mathbb{R}_+}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}_0$ und mit $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$, so konvergiert die Reihe $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, und es gilt*

$$\boxed{(*)\qquad \sum_{\nu=0}^{2n+1}(-1)^\nu a_\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu \leq \sum_{\nu=0}^{2n}(-1)^\nu a_\nu \quad \forall\, n\in\mathbb{N}_0}.$$

Beweis: Es sei $s_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann
$s_{n+2} - s_n = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2})$ sowie $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0$, also

$$(\diamond) \quad 0 \leq s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Nach 13.17. existiert $A := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $|A - s_{2n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\wedge\ |a_{2n+1}| < \frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n \geq r$, und es folgt $|A - s_{2n+1}| \leq |A - s_{2n}| + |s_{2n} - s_{2n+1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall\ n \geq r$, also $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = A$ und zugleich auch $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = A$. Wegen 13.4., 13.17. und $(\diamond)$ ist $\sup\{s_{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = A = \inf\{s_{2n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, und mithin gilt die Behauptung. □

31. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, so wird jede Reihe der Form $(\sum(-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}_0 (\text{oder } n\in\mathbb{N})}$ und jede Reihe der Form $(\sum(-1)^{n+1} a_n)_{n\in\mathbb{N}_0 (\text{oder } n\in\mathbb{N})}$ als eine **alternierende Reihe** bezeichnet.
Wegen $\sum\limits_{n=0}^{t}(-1)^{n+1}a_n = -\sum\limits_{n=0}^{t}(-1)^n a_n \ \ \forall\ t \in \mathbb{N}_0$ folgt aus 13.6. und 30., daß *jede alternierende Reihe konvergiert.*

32. Nach 31. sind durch

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} \pm \cdots$ und

(ii) $4 \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{4}{1} - \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{9} - \dfrac{4}{11} \pm \cdots$

wohlbestimmte reelle Zahlen beschrieben. Unter Verwendung von Differential– und Integralrechnung läßt sich beweisen, daß (i) eine Reihendarstellung für ln 2 („natürlicher Logarithmus von 2“) ist, während (ii) die berühmte Leibnizsche Darstellung für π ist.
Wegen $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ und 6. ist die Reihe $\big(\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar *konvergent, aber* **nicht** *absolut konvergent* (vgl. 8.).

Hier wird deutlich, daß die **absolute** Konvergenz einer Reihe allein durch das genügend schnelle Kleinwerden der Beträge zustandekommt, während die Konvergenz einer **nicht absolut** konvergierenden reellen Reihe u.a. auf dem Ausgleich zwischen positiven und negativen Gliedern beruht.

15. Stetige Abbildungen

Im folgenden sollen Abbildungen betrachtet werden, die mit der Grenzwertbildung „verträglich“ sind.

Unter Verwendung von Ergebnissen aus Paragraph 13 und Paragraph 14 werden wir für derartige Abbildungen einige allgemeine Sätze entwickeln und werden dann insbesondere in der Lage sein, wesentliche Eigenschaften der Exponentialfunktion und anderer Funktionen zu erkennen.

A. Grenzwerte von Funktionen

1. Ist D eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$ und ist $a \in \mathbb{C}$, so sagen wir, a **berührt** D, in Zeichen: $a \sim D$, wenn wenigstens eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ existiert.

Mit Blick auf 13.1. können wir dies auch so formulieren:

Die komplexe Zahl a berührt D genau dann, wenn $U_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset \quad \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *ist.*

Beispiele: 1) Nach 13.2.(iv) gilt $\boxed{a \sim D \quad \forall \;\; a \in D}$.

2) Ist $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, so gilt zwar $x \notin U_\varepsilon(a)$, aber trotzdem $x \sim U_\varepsilon(a) \;\; \forall\, x \in k_\varepsilon(a)$.

3) Es gilt $0 \sim \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ sowie $0 \sim]0,1]$, ferner auch $0 \sim \mathbb{C}^*$.

Im folgenden betrachten wir nichtleere Teilmengen D, B von $\mathbb{C}$ und eine Abbildung $f : D \to B$, also eine Abbildung von D in B mit dem *Definitionsbereich* $D \subseteq \mathbb{C}$ und dem *Bildbereich* $B \subseteq \mathbb{C}$.

Derartige Abbildungen werden im weiteren auch als **Funktionen** bezeichnet.

Sind $a, c \in \mathbb{C}$ und gilt $a \sim D$, so schreiben wir

$$(*) \qquad \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = c} \quad \text{oder} \quad \boxed{\lim_{x\in D, x\to a} f(x) = c}\,,$$

wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

($\diamond$) *Ist* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* **beliebige** *Folge von Elementen aus D mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *so ist* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Demnach bedeutet $(*)$: *Immer dann, wenn eine Folge von Elementen aus D gegen a strebt, strebt die Folge der zugehörigen durch f bestimmten Bildelemente gegen c.*

Kurz: *Wenn x gegen a strebt, dann strebt f(x) gegen c.*

Entsprechend lesen wir $(*)$ als „Limes von $f(x)$ für x gegen a ist c" und bezeichnen c als den **Grenzwert von f für x gegen a** (vgl. 13.1.(i)).

2. *Beispiele*:

(i) *Ist f die konstante Funktion* $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \to c$ *mit c fest aus* $\mathbb{C}$, *so gilt* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ *für jedes* $a \in \mathbb{C}$.

Denn strebt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so strebt $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $f(x_n) = c \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ gegen c.

(ii) *Für* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \to bx + d$ *mit* $b, d \in \mathbb{C}$ *gilt* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ba + d \;\; \forall\, a \in \mathbb{C}$.

Dies folgt aus 13.6.(i).

(iii) *Es ist* $\lim\limits_{z\to 0} e^z = 1$ *und* $\lim\limits_{z\in\mathbb{C}^*,\, z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = 1$.

Beweis: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1$ $\forall\ n \geq n_0$, und für $n \geq n_0$ führt 14.24(vii) dann auf $\left|e^{x_n} - 1 - x_n\right| \leq \dfrac{|x_n|^2}{1-|x_n|}$ sowie auf $\left|\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} - 1\right| \leq \dfrac{|x_n|}{1-|x_n|}$ im Falle $x_n \neq 0$.

Die zweite Ungleichung führt mit 13.6. und 13.15. direkt auf $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} - 1\right) = 0$.

Die erste läßt sich wegen $|e^{x_n} - 1| - |x_n| \leq |e^{x_n} - 1 - x_n|$ (vgl. 8.28.2.) umformen zu $|e^{x_n} - 1| \leq \dfrac{|x_n|^2}{1-|x_n|} + |x_n|$, und mit 13.6. und 13.15. ergibt sich dann $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x_n} - 1) = 0$.

Demnach ist die Behauptung gültig. $\square$

3. Nach A. Cauchy kann man anstelle von 1.($\diamond$) auch den folgenden Grenzwerttest verwenden:

Sind $D, B \subseteq \mathbb{C}$ mit $\emptyset \neq D, B$ und ist $f : D \to B$ eine Abbildung, so gilt für $a, c \in \mathbb{C}$ mit $a \sim D$ genau dann $\boxed{\lim\limits_{x\in D, x\to a} f(x) = c}$, *wenn es* **zu jedem** $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit*

($\triangle$) $\boxed{x \in D\ \wedge\ |a - x| < \delta\ \Rightarrow\ |c - f(x)| < \varepsilon}$.

Beweis: α) Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) Ist ($\triangle$) für ein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ erfüllt und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so gibt es ein $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|a - x_n| < \delta\ \ \forall\ n > n_\delta$, und für $n > n_\varepsilon := n_\delta$ ist dann $|c - f(x_n)| < \varepsilon$.

(ii) Ist ($\triangle$) für kein $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ erfüllt, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $y_n \in D \cap U_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $f(y_n) \notin U_\varepsilon(c)$, und dann strebt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, während $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **nicht** gegen c strebt.

β) Da die Überlegungen aus α) für **jedes** $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ gelten, ist die Behauptung gemäß 1. gültig. $\square$

B. Definition stetiger Funktionen

Eine Funktion soll als „stetig“ bezeichnet werden, wenn eine geringfügige Veränderung der Urbilder stets nur eine geringfügige Veränderung der Bilder bewirkt. Es hat die Mathematiker viel Mühe gekostet, dieses Konzept so zu präzisieren, daß es allen Exaktheitsansprüchen standhält.

Mit dem in Abschnitt A. eingeführten Grenzwertbegriff gelingt dies wie folgt:

4. **Definition**. Gegeben seien zwei nichtleere Teilmengen D, B von $\mathbb{C}$ und ein Element $a \in D$. Eine Funktion $f : D \to B$ heißt **stetig im Punkt** a, wenn $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$ ist.

Eine Funktion $f : D \to B$ heißt **stetig auf** D, falls f *in* **jedem** *Punkt von D stetig ist.*

Definitionsgemäß bedeutet die Stetigkeit von f im Punkt $a \in D$, *daß für* **jede** *gegen a konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus D die* **Stetigkeitsbedingung**

$$(*) \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)}$$

erfüllt ist.

Aus $(*)$ geht hervor, in welchem Sinne f mit der Grenzwertbildung „verträglich“ sein muß, wenn Stetigkeit vorliegen soll.

5. *Beispiele*:

(i) *Die identische Abbildung* $id_{\mathbb{C}}$ *ist offenbar stetig auf* $\mathbb{C}$.

(ii) *Für* $c \in \mathbb{C}$ *ist die konstante Funktion* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \to c$ *gemäß 2.(i) stetig auf* $\mathbb{C}$.

(iii) *Ist* $f : D \to B$ *stetig auf* D *und sind* $D', B' \subseteq \mathbb{C}$ *mit* $\emptyset \neq D' \subseteq D \;\wedge\; f(D') \subseteq B'$, *so ist* $g : D' \to B' : x \to f(x)$ stetig auf D'.

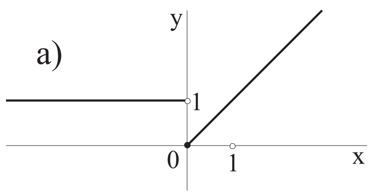
Denn ist $a \in D'$ und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus D' mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \in B'$, da f auf D stetig ist.

(iv) *Ist* $f : D \to B$ *stetig auf* D *und ist* $a \notin D$, *so ist* f **nicht** *stetig in* a, *da* $f(a)$ *nicht definiert ist.*

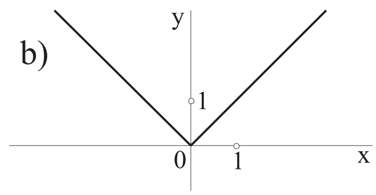
Statt „nicht stetig“ sagen wir auch „unstetig“.

(v) *Gegeben sei eine Abbildung* $f : D \to B$ *mit* $D, B \subseteq \mathbb{C}$, *und es sei* $a \in D$. *Dann gilt: Existiert ein* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ *derart, daß die Restriktion* $f|_{D\cap U_\varepsilon(a)}$ *in* a *stetig ist, so ist auch* f *in* a *stetig.*

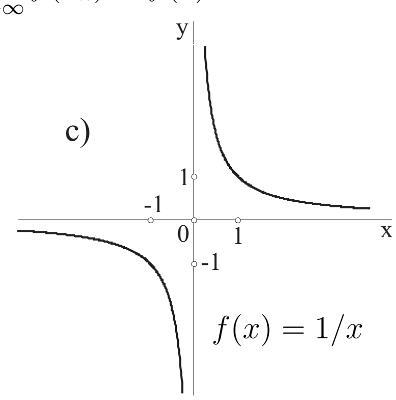
Denn ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U_\varepsilon(a) \;\; \forall\, n > n_0$, und es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n>n_0,\, n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.



$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



$$f(x) = |x|$$



$$f(x) = 1/x$$

(vi) *Ist* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *erklärt durch* $f(x) := \begin{cases} x, & \textit{falls } x \geq 0 \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$, *so ist* f *stetig in jedem Punkt von* $\mathbb{R}^*$, *aber* **nicht** *stetig im Punkt* 0 (vgl. Figur a)).

Denn nach (i), (ii) und (v) ist f stetig in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^*$, aber wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \big(-\frac{1}{n}\big) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(-\frac{1}{n}\big) = 1 \neq f(0)$ ist f unstetig in 0.

(vii) *Die* **Dirichletsche Sprungfunktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1, & \textit{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$ *ist in* **keinem** *Punkt von* $\mathbb{R}$ *stetig.*

Denn ist $a \in \mathbb{Q}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \big(a - \frac{\sqrt{2}}{n}\big) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(a - \frac{\sqrt{2}}{n}\big) = 0 \neq f(a)$ (vgl. 4.20.). Ist dagegen $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so gibt es nach 3.12. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $a - \frac{1}{n} < x_n < a$, und dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(a)$.

(viii) *Nach 13.8.(i) ist* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+ : z \to |z|$ *stetig auf* $\mathbb{C}$ (vgl. Figur b) bezüglich $f|_{\mathbb{R}}$).

(ix) *Nach 13.8.(ii) ist* $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \overline{z}$ *stetig auf* $\mathbb{C}$.

(x) *Nach 13.6.(iv) ist* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* : z \to \frac{1}{z}$ *stetig auf* $\mathbb{C}^*$ (vgl. Figur c) bzgl. $f|_{\mathbb{R}^*}$).

(xi) *Die Abbildung* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \to \lfloor x \rfloor$*, die jeder reellen Zahl ihren ganzzahligen Boden zuordnet* (vgl. 3.7.), *ist in jedem Punkt von* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ *stetig und in jedem Punkt von* $\mathbb{Z}$ *unstetig.*

Tatsächlich ist f gemäß (ii) und (v) in jedem Punkt von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ stetig. Ist aber $x \in \mathbb{Z}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \big(x - \frac{1}{n}\big) = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\big(x - \frac{1}{n}\big) = x - 1 \neq f(x)$, d.h. f ist unstetig in x.

(xii) $\boxed{\textit{Die Exponentialfunktion ist stetig auf } \mathbb{C}}$.

Denn ist $a \in \mathbb{C}$ und ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so konvergiert die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $y_n := x_n - a \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ gegen 0, und mit 2.(iii) folgt $\lim\limits_{n\to\infty} e^{y_n} = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n} \overset{14.24.}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \big(e^a \cdot e^{y_n}\big) = e^a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} e^{y_n} = e^a$ gemäß 13.6.(ii). □

C. Rechenregeln für stetige Funktionen

Als Anwendung der Grenzwertsätze aus 13.6. erhalten wir

6. **Satz**. *Gegeben seien Elemente* $r, s, t \in \mathbb{C}$*, eine nichtleere Teilmenge* D *von* $\mathbb{C}$ *und Funktionen* $f : D \to \mathbb{C}$, $g : D \to \mathbb{C}$*, die im Punkt* $a \in D$ *stetig sind. Dann gilt:*

(i) Die Funktion $r{\cdot}f{+}s{\cdot}g{+}t : D \to \mathbb{C} : x \to r{\cdot}f(x){+}s{\cdot}g(x){+}t$ *ist stetig in* a.

(ii) Die Funktion $f{\cdot}g : D \to \mathbb{C} : x \to f(x){\cdot}g(x)$ *ist stetig in* a.

(iii) Ist $a \in D_g^* := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$*, so ist die Funktion* $\frac{f}{g} : D_g^* \to \mathbb{C} : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ *stetig in* a.

Beweis: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus D (bzw. D_g^*) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, so führt die Stetigkeit von f und g in a auf $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$, und damit ergeben sich die Aussagen gemäß 13.6.. □

7. **Corollar 1**. *Ist* $k \in \mathbb{N}$ *und sind* $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ *mit* $a_k \neq 0$*, so ist das* **Polynom**

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to \textstyle\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu z^\nu = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k$$

stetig auf $\mathbb{C}$.

Der *Beweis* ergibt sich aus 5.(i),(ii) und mit Hilfe von 6.(i),(ii) durch Induktion nach k. □

8. **Corollar 2**. *Sind* f *und* g *Polynome auf* $\mathbb{C}$ *(vgl.7.) und ist* $D_g^* := \{x \in \mathbb{C} | g(x) \neq 0\}$*, so ist die sog.* **rationale Funktion** f/g *stetig auf* D_g^*.

Beweis: 6.(iii), 7.. □

9. **Corollar 3**. *Die Funktionen* Re *und* Im *sind stetig auf* $\mathbb{C}$.

Beweis: 8.27.b), 5.(ix) und 6.. □

10. **Corollar 4**. *Jede Kollineation von $\mathbb{C}$ ist stetig.*

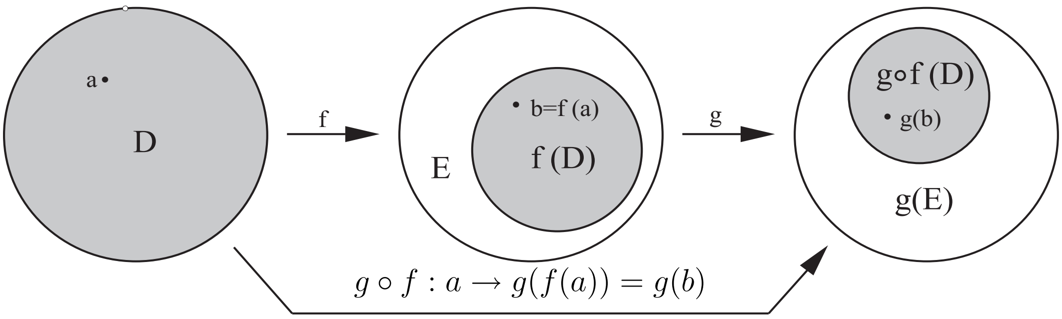
Beweis: Nach 9.30. läßt sich jede Kollineation von $\mathbb{C}$ in der Form

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to r \cdot \mathrm{Re}(z) + s \cdot \mathrm{Im}(z) + t \text{ mit } r, s, t \in \mathbb{C}$$

darstellen. Mit 9. und 6. führt dies auf die Behauptung. $\square$

Als besonders wichtig erweist sich nun

11. **Satz über die Verkettung stetiger Funktionen.** *Sind D, E nichtleere Teilmengen von $\mathbb{C}$ und sind $f\colon D \to \mathbb{C}$, $g\colon E \to \mathbb{C}$ Abbildungen mit $f(D) \subseteq E$, so gilt: Ist* $\boxed{f \text{ in } a \in D \text{ stetig}}$ *und ist* $\boxed{g \text{ in } b{:=}f(a) \text{ stetig}}$, *so ist* $\boxed{g \circ f : D \to \mathbb{C} \text{ in } a \text{ stetig}}$.



Beweis: Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und setzen $y_n := f(x_n) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Wegen der Stetigkeit von f in a ist $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = f(a) = b$, und wegen der Stetigkeit von g in b ist $\lim\limits_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = g(b) = (g \circ f)(a)$.

Mithin ist $g \circ f$ in a stetig. $\square$

12. **Corollar** 1. *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ stetig auf D, so sind auch die Funktionen*

(i) $|f| : D \to \mathbb{R}_+ : z \to |f(z)|$,

(ii) $\overline{f} : D \to \mathbb{C} : z \to \overline{f(z)}$,

(iii) $\mathrm{Re}\, f : D \to \mathbb{R} : z \to \mathrm{Re}\,(f(z))$,

(iv) $\mathrm{Im}\, f : D \to \mathbb{R} : z \to \mathrm{Im}\,(f(z))$,

(v) $\exp \circ f : D \to \mathbb{C} : z \to e^{f(z)}$

stetig auf D.

Der *Beweis* ergibt sich aus 11. in Verbindung mit 5. und 9.. $\square$

13. **Corollar** 2. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig auf D, wenn die Funktionen* $\mathrm{Re}\, f$ *und* $\mathrm{Im}\, f$ *auf D stetig sind.*

Beweis: 5.(viii), 5.(ix), 6. und 12.. $\square$

D. Allgemeine Sätze über Stetigkeit

Die folgenden Aussagen sind von zentraler Bedeutung für die spätere Untersuchung spezieller Funktionen.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so werden die Mengen $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ (vgl.1.32.) als

eigentliche Intervalle und die Mengen $\mathbb{R}$, $[a,\infty[$, $]a,\infty[$, $]-\infty,a]$, $]-\infty,a[$ als **uneigentliche Intervalle** bezeichnet. Hierzu zeigen wir

14. **Lemma**. *Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ mit $|I| \geq 2$ ist genau dann ein eigentliches oder uneigentliches Intervall, wenn die Bedingung*

$$(*) \qquad \boxed{x,z \in I \ \wedge \ x<z \ \Rightarrow \ [x,z] \subseteq I}$$

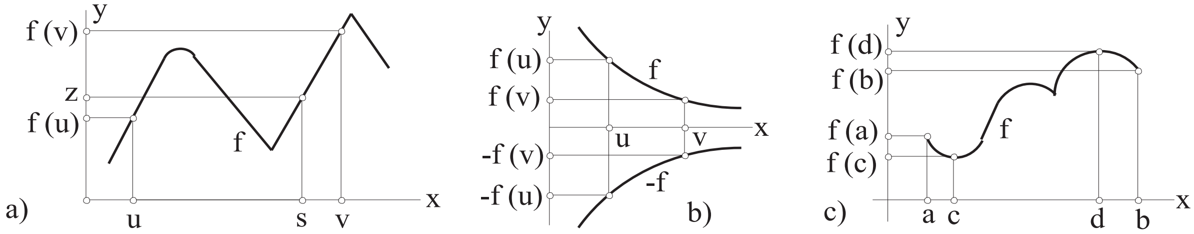
erfüllt ist.

Beweis: 1) Es gelte $(*)$, und es sei $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt in jedem der Fälle $(\exists \inf I \wedge \exists \sup I \wedge \inf I < y < \sup I)$, $(\exists \inf I \wedge \nexists \sup I \wedge \inf I < y)$, $(\nexists \inf I \wedge \exists \sup I \wedge y < \sup I)$, $(\nexists \inf I \wedge \nexists \sup I)$ Elemente $x,z \in I$ mit $x<y<z$, und mit $(*)$ folgt $y \in I$. Dies bedeutet, daß I ein eigentliches oder uneigentliches Intervall ist.

2) Für jedes eigentliche oder uneigentliche Intervall ist $(*)$ erfüllt. $\square$

Unter Verwendung von 14. erhalten wir

15. **Zwischenwertsatz**. *Ist I ein eigentliches oder uneigentliches Intervall von $\mathbb{R}$ und ist $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I, so ist auch $f(I)$ ein eigentliches oder uneigentliches Intervall, falls $|f(I)| \geq 2$ ist.*



Beweis: a) Es seien $u,v \in I$ mit $u<v \ \wedge \ f(u)<f(v)$, und es sei $z \in \mathbb{R}$ mit $f(u)<z<f(v)$. Wir betrachten $s := \sup\{x \in [u,v] \mid f(x) \leq z\} \in [u,v]$ (Figur a)):

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $r_n,\ t_n \in [u,v]$ mit $s - \frac{1}{n} < r_n \leq s \ \wedge \ f(r_n) \leq z$ und mit $s \leq t_n < s+\frac{1}{n} \ \wedge \ z \leq f(t_n)$. Aus 13.14. und der Stetigkeit von f folgt $f(s) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) \leq z$ und $z \leq \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = f(s)$, also $f(s) = z$. Damit ist $[f(u), f(v)] \subseteq f(I)$ gezeigt.

b) Es seien $u,v \in I$ mit $u<v \wedge f(v) < f(u)$ (Figur b)). Dann ist $-f : I \to \mathbb{R} : x \to -f(x)$ nach 6.(i) stetig, und mit a) folgt $[-f(u), -f(v)] \subseteq -f(I)$, also $[f(v), f(u)] \subseteq f(I)$.

c) Aus a), b) und 14. folgt die Behauptung. $\square$

16. **Maximum–Minimum–Satz**. *Sind $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ und ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$, so gibt es $c,d \in [a,b]$ mit $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. Man sagt, f nimmt in c das Minimum und in d das Maximum an (Figur c)).*

Beweis: a) Angenommen, $f([a,b])$ ist nach oben unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Punkten aus $[a,b]$ mit $f(x_n) > n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass 13.19. existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und nach 13.14. ist $r := \lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} \in [a,b]$. Da f stetig ist, folgt $f(r) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n})$ im Widerspruch zu $f(x_{k_n}) > k_n \geq n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ (vgl. 2.12., 13.4.). Mithin existiert $s := \sup f([a,b])$.

b) Angenommen, es ist $f(x) \neq s \ \ \forall\, x \in [a,b]$. Nach 6.(iii) ist $g : [a,b] \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{s - f(x)}$ dann stetig auf $[a,b]$. Da es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in [a,b]$ mit $s - \dfrac{1}{n} < f(z_n)$ gibt, folgt $s - f(z_n) < \dfrac{1}{n}$, also $n < g(z_n) \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, d.h. $g([a,b])$ wäre nach oben unbeschränkt im Widerspruch zu a). Demnach gibt es ein $d \in [a,b]$ mit $f(d) = s \geq f(x) \ \ \forall\, x \in [a,b]$.

c) Nach 6.(i) ist $-f : [a,b] \to \mathbb{R} : x \to -f(x)$ stetig auf $[a,b]$, und nach b) existiert dann ein $c \in [a,b]$ mit $-f(c) \geq -f(x) \ \ \forall\, x \in [a,b]$, also mit $f(c) \leq f(x) \ \ \forall\, x \in [a,b]$. Gemäß 15. bedeutet dies $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$. $\square$

17. *Anmerkung.* Nach 16. wird durch eine stetige Funktion jedes
eigentliche **abgeschlossene** *Intervall* auf ein *eigentliches* **abgeschlossenes** *Intervall* abgebildet.
Dagegen kann das Bild eines offenen Intervalls ein *uneigentliches* Intervall sein, wie das Beispiel $f :]0,1[\to]1,\infty[: x \to \dfrac{1}{x}$ zeigt.

Als Folgerung aus 15. und 16. notieren wir

18. **Satz**. *Ist $k \in \mathbb{N}$, sind $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \neq 0$ und ist f das Polynom*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \textstyle\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu x^\nu = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k,$$

so gilt:

(i) *Im Falle $k \in 2\mathbb{N}_0 + 1$ ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Insbesondere gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = 0$.*

(ii) *Im Falle $a_k > 0 \ \wedge \ k \in 2\mathbb{N}$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R}) = [c, +\infty[$.*

(iii) *Im Falle $a_k < 0 \ \wedge \ k \in 2\mathbb{N}$ gibt es ein $d \in \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{R}) =]-\infty, d]$.*

Beweis: 1) Es sei $a_k > 0$ und $g(x) := \dfrac{a_0}{x^k} + \dfrac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots + \dfrac{a_{k-1}}{x}$ für $x \in \mathbb{R}^*$. Nach 2.24., 13.7.(i) und 13.11.(ii) gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $\big(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ |x| \geq r \ \Rightarrow \ |g(x)| < a_k/2\big)$, also mit
(1) $\big(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ |x| \geq r \ \Rightarrow \ a_k + g(x) > a\big)$ für $a := a_k/2 > 0$. Hiermit und wegen
(2) $f(x) = x^k \cdot (a_k + g(x)) \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^*$
ergeben sich nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussagen
(3) $(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ |x| \geq r + n \ \wedge \ (x > 0 \vee k \in 2\mathbb{N}) \ \Rightarrow \ f(x) > x^k \cdot a > n \cdot a)$,
(4) $\big(x \in \mathbb{R}_- \ \wedge \ -x \geq r + n \ \wedge \ k \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \ \Rightarrow \ -f(x) > (-x)^k \cdot a > n \cdot a\big)$.
Damit ist (i) gemäß 15. für $a_k > 0$ bewiesen. Ist $k \in 2\mathbb{N}$, so gibt es wegen (3) ein $s \in [r, \infty[$ mit $f(x) > f(0) \ \wedge \ f(-x) > f(0) \ \ \forall\, x \in [s, \infty[$, und nach 16. gibt es $c, c' \in \mathbb{R}$ mit $f(0) \in f([-s,s]) = [c, c']$. Mit (3) und 15. führt dies auf (ii).
2) Ist $a_k < 0$, so führt 1) mit $-f$ anstelle von f auf (i) und (iii). $\square$

19. Ist eine reelle Funktion $f : D \to B$ mit $\emptyset \neq D, B \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, so heißt diese
streng monoton steigend, wenn $(x, y \in D \ \wedge \ x < y \ \Rightarrow \ f(x) < f(y))$ gilt,
streng monoton fallend, wenn $(x, y \in D \ \wedge \ x < y \ \Rightarrow \ f(x) > f(y))$ gilt,
monoton steigend, wenn $(x, y \in D \ \wedge \ x < y \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(y))$ gilt,
monoton fallend, wenn $(x, y \in D \ \wedge \ x < y \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(y))$ gilt,
streng monoton, wenn sie streng monoton steigend oder streng monoton fallend ist,
monoton, wenn sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Offenbar ist jede streng monotone Funktion injektiv. Umgekehrt erhalten wir

20. **Satz**. *Ist I ein eigentliches oder uneigentliches Intervall und ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.*

Beweis: Angenommen, es gibt $x, y, u, v \in I$ mit $x < y \;\wedge\; f(x) < f(y)$ einerseits und mit $u < v \;\wedge\; f(u) > f(v)$ andererseits. Dann ist

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : t \to f(u + t(x-u)) - f(v + t(y-v))$$

wegen $(t \in [0,1] \;\Rightarrow\; u + t(x-u),\; v + t(y-v) \in I\,)$ eine Abbildung, die nach 6.(i) und 11. stetig ist. Wegen $g(0) = f(u) - f(v) > 0$ und $g(1) = f(x) - f(y) < 0$ gibt es gemäß 15. ein $s \in]0,1[$ mit $g(s) = 0$. Es folgt $f(u+s(x-u)) = f(v+s(y-v))$, aber wegen $sx < sy \;\wedge\; (1-s)u < (1-s)v$ ist $u+s(x-u) = sx+(1-s)u < sy+(1-s)v = v+s(y-v)$ im Widerspruch zur Injektivität von f. Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Unter Verwendung von 20. erhalten wir nun

21. **Satz über die Umkehrfunktion**. *Gegeben seien ein eigentliches oder uneigentliches Intervall I und eine stetige Injektion $f : I \to \mathbb{R}$. Dann existiert eine stetige streng monotone Bijektion g von $J := f[I]$ auf I mit $g \circ f = id_I \;\wedge\; f \circ g = id_J$.*

Beweis: Wegen 15. ist J ein eigentliches oder uneigentliches Intervall, und wir können uns f als Bijektion von I auf J definiert denken. Dann ist $g := f^{-1}$ ebenfalls bijektiv, und es gilt $g \circ f = id_I \;\wedge\; f \circ g = id_J$. Wegen 20. ist f streng monoton, und damit ist auch g streng monoton. Zu beweisen bleibt, daß g auf J stetig ist:

Dazu sei $y \in J$ vorgegeben, und es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus J mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Ist nun $x := g(y)$ und ist $x_n := g(y_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ zu zeigen. Zu diesem Zweck sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig ausgewählt. Wir betrachten $u, v \in I$ mit

$$\begin{cases} x = u < v < x + \varepsilon & \text{im Falle } \; x = \min I, \\ x - \varepsilon < u < v = x & \text{im Falle } \; x = \max I \; \text{ und} \\ x - \varepsilon < u < x < v < x + \varepsilon & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ und wegen der Monotonie von f gibt es dann ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$n \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \geq r \;\Rightarrow\; \begin{cases} y, y_n \in [f(u), f(v)], & \text{falls } f \text{ monoton steigt,} \\ y, y_n \in [f(v), f(u)], & \text{falls } f \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Mit der Monotonie von g führt dies auf $x - \varepsilon < u \leq x_n \leq v < x + \varepsilon \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq r$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig gewählt war, bedeutet dies $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. $\square$

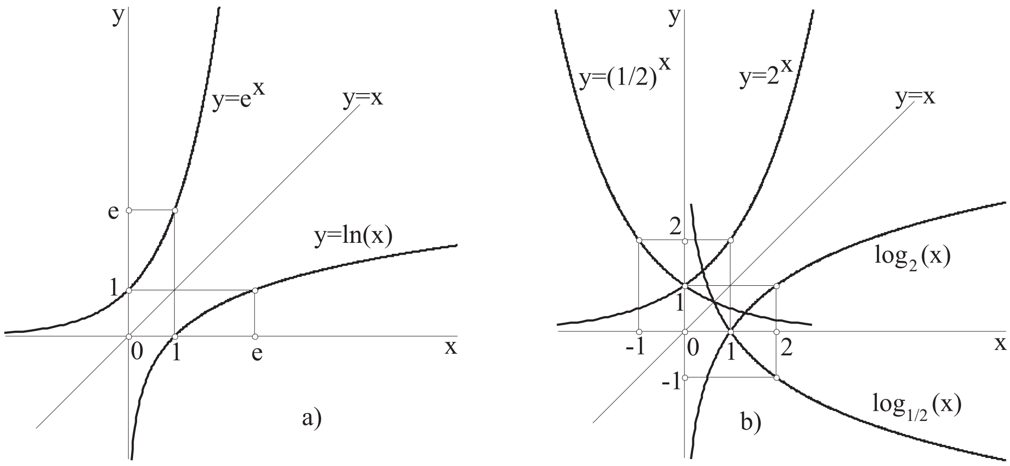
E. Logarithmus und allgemeine Potenz

In diesem Abschnitt wollen wir anhand der gewonnenen Resultate einige wichtige reelle Funktionen behandeln.

Zunächst zeigen wir

22. **Satz über die reelle Exponentialfunktion**. *Die Funktion* $\exp_e := \exp|_{\mathbb{R}} : x \to e^x$ *ist eine streng monoton steigende und auf $\mathbb{R}$ stetige Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+^*$ mit* $\exp_e(\mathbb{R}_+) = [1, \infty[\;\wedge\; \exp_e(\mathbb{R}_-) =]0, 1]$ *(Figur a)).*

    Die zu $\exp_e$ *inverse Funktion wird der* **natürliche Logarithmus** $\ln$ *genannt und ist eine streng monoton steigende und auf $\mathbb{R}_+^*$ stetige Bijektion von $\mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{R}$ mit* $\ln 1 = 0 \;\wedge\; \ln e = 1 \;\wedge\; \ln([1, \infty[) = \mathbb{R}_+ \;\wedge\; \ln(]0, 1]) = \mathbb{R}_-$ *(Figur a)).*



Beweis: Aus 14.24.(i) folgt $e^x \in]1, +\infty[\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$, und wegen 14.24.(v) gilt dann $e^x \in]0, 1[\ \forall\ x \in \mathbb{R}_-^*$. Sind $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u < v$, so ist $x := v - u > 0$, und mit 14.24.(iii) erhalten wir $e^u = e^u \cdot 1 < e^u \cdot e^x = e^{u+x} = e^v$, d.h. $\exp_e$ ist gemäß 5.(iii),(xi) eine stetige und streng monoton wachsende Injektion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+^*$. Wegen 14.24.(i) ist $n < e^n\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, und mit 14.24(v) folgt $e^{-n} < \dfrac{1}{n}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Gemäß 15. bedeutet dies, daß $\exp_e$ ein Bijektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+^*$ ist, und nach 21. besitzt $\ln$ dann die angegebenen Eigenschaften. $\square$

23. **Corallar**. *Die reelle Exponentialfunktion ist ein Gruppenisomorphismus von* $\mathbb{R}(+)$ *auf* $\mathbb{R}_+^*(\cdot)$, *und der natürliche Logarithmus ist ein Gruppenisomorphismus von* $\mathbb{R}_+^*(\cdot)$ *auf* $\mathbb{R}(+)$. *In der Tat gilt*

(*i*) $\exp_e(u + v) = \exp_e u \cdot \exp_e v \quad \forall\ u, v \in \mathbb{R}$ *sowie*

(*ii*) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Beweis: Ist $x = e^u$ und $y = e^v$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, so ist $\ln x = u$ und $\ln y = v$, und gemäß 14.24.(iii) ist $e^{u+v} = e^u \cdot e^v = x \cdot y = e^{\ln(x \cdot y)}$, also $u + v = \ln(x \cdot y)$. $\square$

24. Im folgenden sei $b \in \mathbb{R}_+^*$. Unte Verwendung von 22. setzen wir fest: Die Abbildung

(1) $\exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* : x \to e^{x \cdot \ln b}$

wird die **reelle Exponentialfunktion zur Basis** b genannt (Figur b)).

Im Falle $b = 1$ ist $\exp_b(\mathbb{R}) = \{1\}$, während $\exp_b$ im Falle $b \neq 1$ nach 11. und 22. *eine auf* $\mathbb{R}$ *stetige und streng monotone Bijektion* mit $\exp_b(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ ist, steigend für $b > 1$ und fallend für $b < 1$.

Aus 14.24., 22. und 23. folgt

(2) $\exp_b(x + y) = \exp_b(x) \cdot \exp_b(y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

(3) $\exp_b(0) = 1 \ \wedge\ \exp_b(1) = b$,

(4) $\exp_b(-x) = (\exp_b(x))^{-1} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$,

(5) $\exp_b(n \cdot x) = (\exp_b(x))^n \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Aus (3) und (5) ergibt sich

(6) $\exp_b(n) = b^n \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$,

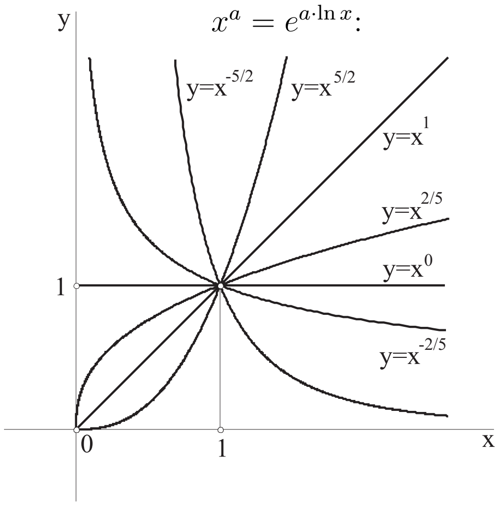
aber auch $(\exp_b(1/n))^n = b\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und damit

(7) $\exp_b(1/n) = \sqrt[n]{b} = b^{1/n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wegen (6) und (7) und wegen $\ln e = 1$ ist es mit den in 2.20., 2.27., 7.22. und 14.24. eingeführten Notationen verträglich, die Schreibweise

(8) $\boxed{b^x := \exp_b(x) = e^{x\cdot\ln b}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

zu verwenden. Aus (2)–(4) erhalten wir dann



(9) $\boxed{b^{x+y} = b^x \cdot b^y} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$,

(10) $\boxed{b^0 = 1 \ \wedge\ b^1 = b}$,

(11) $\boxed{b^{-x} = 1/b^x = (b^x)^{-1}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$,

und weiter führt $\ln(e^{x\cdot\ln b}) = x \cdot \ln b$ auf die Regel

(12) $\boxed{\ln(b^x) = x \cdot \ln b} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aus $e^{y\cdot\ln(b^x)} = e^{y\cdot x\cdot\ln b} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich dann

(13) $\boxed{(b^x)^y = b^{x\cdot y}} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

und damit insbesondere

(14) $\boxed{b^{m/n} = (b^m)^{1/n} = \sqrt[n]{b^m}} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wegen $e^{x\cdot\ln(a\cdot b)} = e^{x\cdot\ln a} \cdot e^{x\cdot\ln b}$ für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir außerdem

(15) $\boxed{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x} \quad \forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aus (14) geht hervor, daß sich die reelle Exponentialfunktion zur Basis b für **rationale** Exponenten $\frac{m}{n}$ in natürlicher Weise auf Potenzieren und Wurzelziehen zurückführen läßt und damit die „richtigen“ Werte liefert.

Offenbar ist $\exp_b$ eine stetige Fortsetzung der Funktion $\exp_b|_{\mathbb{Q}}$ auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}$. Der folgende Satz zeigt, daß dies die **einzige** Möglichkeit ist, $\exp_b|_{\mathbb{Q}}$ stetig fortzusetzen:

25. **Satz**. *Ist D ein reelles Intervall oder ein reelles uneigentliches Intervall und sind $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$* **stetig** *auf D mit $f|_{D\cap\mathbb{Q}} = g|_{D\cap\mathbb{Q}}$, so gilt $f = g$.*

Beweis: Ist $a \in D\backslash\mathbb{Q}$, so existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $D \cap \mathbb{Q}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, und mit der Stetigkeit von f und g ergibt sich dann $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$. $\square$

26. Im folgenden sei $b \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. Die nach 21. und 24. zu $\exp_b$ gehörige inverse Funktion wird der **Logarithmus zur Basis** b genannt und mit $\log_b$ bezeichnet. Nach 21. und 24. ist $\log_b$ eine auf $\mathbb{R}_+^*$ stetige streng monotone Bijektion von $\mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{R}$ (Figur b)).

Für $x \in \mathbb{R}$ und $u := b^x$ gilt $x = \log_b u$ sowie $\ln u = \ln(b^x) = x \cdot \ln b$, und mithin folgt

(1) $\boxed{\log_b u = \dfrac{\ln u}{\ln b}} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$.

Mit 23. und 24. führt dies auf

(2) $\boxed{\log_b(u \cdot v) = \log_b u + \log_b v} \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}_+^*$,

(3) $\boxed{\log_b(u^x) = x \cdot \log_b u} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$,

(4) $\boxed{\log_b 1 = 0 \ \wedge\ \log_b b = 1}$,

(5) $\boxed{\log_b \frac{1}{u} = -\log_b u} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$,

(6) $\boxed{\log_c b \cdot \log_b u = \log_c u} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}_+^*$.

Offenbar ist $\log_e = \ln$. Statt „ln“ wird auch „log“ geschrieben, und überdies setzt man $lg := \log_{10}$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit bemerkenswert einfachen Kennzeichnungen der gerade betrachteten Funktionen. Dazu zeigen wir zunächst

27. **Satz**. *Ist* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **stetig** *und gilt* $(*)$ $\boxed{f(x+y) = f(x) + f(y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$,
so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ *mit* $\boxed{f(x) = a \cdot x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Es sei $a := f(1)$. Aus $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ folgt $f(0) = 0$. Durch Induktion ergibt sich $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{Q}$ und damit insbesondere $n \cdot f(m/n) = f(m) = m \cdot f(1) = m \cdot a \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}^*$.
Wegen $0 = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)\ \forall\, x \in \mathbb{Q}$ ist dann $f(-x) = -f(x) = -x \cdot a\ \ \forall\, x \in \mathbb{Q}_+$, also $f(x) = a \cdot x\ \ \forall\, x \in \mathbb{Q}$. Mit 5.(i),(iii), 6.(i) und 25. führt dies auf die Behauptung. □

28. **Corollar 1**. *Ist* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ **stetig** *und gilt* $(*)$ $\boxed{g(x+y) = g(x) \cdot g(y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$,
so gibt es ein $b \in \mathbb{R}_+^*$ *mit* $\boxed{g(x) = b^x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Beweis: Da $f := \ln \circ g$ die Bedingung $(*)$ aus 27. erfüllt, gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\ln \circ g(x) =$ $= a \cdot x\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, und für $b := e^a$ führt 24. dann auf $g(x) = e^{a \cdot x} = (e^a)^x = b^x\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. □

29. **Corollar 2**. *Ist* $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ **stetig** *und gilt* $(*)$ $\boxed{h(x \cdot y) = h(x) + h(y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$,
so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ *mit* $\boxed{h(x) = a \cdot \ln x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, *und im Falle* $a \neq 0$ *existiert ein* $b \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ *mit* $h = \log_b$.

Beweis: Da $f := h \circ \exp_e$ die Bedingung $(*)$ aus 27. erfüllt, gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $h(e^v) = a \cdot v = a \cdot \ln(e^v)\ \forall\, v \in \mathbb{R}$, also mit $h(x) = a \cdot \ln x\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$. Ist $a \neq 0$, so ist $a = 1/\ln b$ für $b := e^{1/a} \neq 1$, und mit 26.(1) folgt $h = \log_b$. □

Schließlich erhalten wir

30. **Corollar 3**. *Ist* $p : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ **stetig** *und gilt* $(*)$ $\boxed{p(x \cdot y) = p(x) \cdot p(y)} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{Q}$,
so gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ *mit* $\boxed{p(x) = x^a = e^{a \cdot \ln x}} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.
Ist $a = 0$, *so ist* $p(x) = 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$. *Ist* $a \neq 0$, *so ist* p *eine streng monotone stetige Bijektion von* $\mathbb{R}_+^*$ *auf* $\mathbb{R}_+^*$ *mit* $p(1) = 1$, *steigend für* $a > 0$ *und fallend für* $a < 0$.

Beweis: Nach 29. gibt es zu $h := \ln \circ p$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = a \cdot \ln x \overset{24.(12)}{=} \ln x^a\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, und durch Vorschalten von $\exp_e$ folgt $p(x) = x^a\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ (vgl.24.(15)). Die verbleibenden Aussagen folgen mit 14.24.(iv) und 22. und 24.(8) aus $p(x) = e^{a \cdot \ln x}\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$. □

16. Trigonometrie

A. Die Funktionen Cosinus und Sinus

Im folgenden werden wir zu der überraschenden Erkenntnis gelangen, daß wir mit der komplexen Exponentialfunktion nicht nur die reelle Exponentialfunktion, sondern auch die trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus „im Griff" haben.

1. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Aussage

(i) *Es gilt* $\boxed{\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}}$.

Diese folgt gemäß 15.4($*$) und 15.5.(ix) aus

$$\overline{e^z} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (z^\nu/\nu!)} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\nu=0}^{n} (z^\nu/\nu!)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (\overline{z}^\nu/\nu!) = e^{\overline{z}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Wegen $\overline{it} = -it \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ führt (i) mit 8.27.f) und 14.24.(iii) auf

(ii) $|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it} \cdot e^{-it} = 1 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$

und damit auf

(iii) $\boxed{e^{it} \in k_{0,1} = \mathbb{E} \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}}$ (vgl. 8.25.).

Es wird sich herausstellen, daß der Einheitskreisbogen von 1 bis e^{it} für gewisse $t \in \mathbb{R}_+$ die Länge t hat (Figur a)), so daß t dann als Bogenmaß für den durch $1, 0, e^{it}$ festgelegten Winkel verwendet werden kann. Allerdings wird es einige Mühe kosten, diesen Zusammenhang exakt zu begründen.

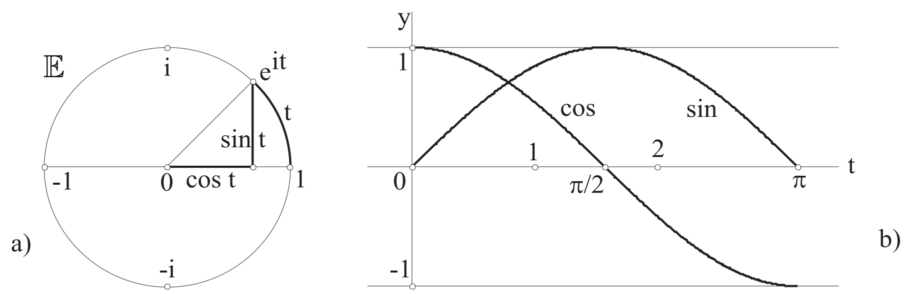
Deshalb werden wir die Funktionen Cosinus und Sinus zunächst unabhängig von Winkelbetrachtungen als reelle Funktionen definieren, werden dann eine Reihe von Eigenschaften dieser Funktionen entwickeln und werden schließlich mit Hilfe dieser Eigenschaften die Verbindung zum Bogenmaß herstellen.

2. Wir setzen

(i) $\boxed{\cos t := Re(e^{it})}$ und $\boxed{\sin t := Im(e^{it})}$ $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

und bezeichnen die Abbildungen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to \cos t$ bzw. $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to \sin t$ als **Cosinus** bzw. **Sinus** (Figur a), b)).

Nach 15.5.(iii), (xii) und 15.12. sind die Funktionen cos und sin auf $\mathbb{R}$ **stetig**.



Aufgrund von (i) gilt die sog. **EULERsche Formel**

(ii) $\boxed{e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t}$ $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, und aus $|e^{it}|^2 = 1$ folgt

(iii) $\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1} \ \wedge \ \boxed{\cos t, \sin t \in [-1, 1]}$ $\quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Für $s, t \in \mathbb{R}$ ist

$$\cos(s+t) + i \cdot \sin(s+t) = e^{i(s+t)} = e^{is} \cdot e^{it} = (\cos s + i \sin s) \cdot (\cos t + i \sin t) = \\ = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t + i \cdot (\cos s \cdot \sin t + \sin s \cdot \cos t),$$

und damit sind die sog. **Additionstheoreme**

(iv) $\boxed{\cos(s+t) = \cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}$,

(v) $\boxed{\sin(s+t) = \sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}$

bewiesen. Wegen $(e^{it})^n \overset{14.24.(vi)}{=} e^{i(nt)}$ und (ii) gelten die sog. **MOIVREschen Formeln**

(vi) $\boxed{(\cos t + i \cdot \sin t)^n = \cos(nt) + i \cdot \sin(nt)} \quad \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \ \forall\ t \in \mathbb{R}$, und dies impliziert

(vii) $\boxed{\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t} \wedge \boxed{\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$,

(viii) $\boxed{\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t} \wedge \boxed{\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$,

(ix) $\boxed{\cos 0 = 1\ \wedge\ \sin 0 = 0}$.

Aus $e^{i(-t)} = \overline{e^{it}}$ erhalten wir

(x) $\boxed{\cos(-t) = \cos t} \ \wedge\ \boxed{\sin(-t) = -\sin t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$,

und mit 1.(i) und 8.27.b) ergibt sich

(xi) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\ \wedge\ \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Sind $s, t \in \mathbb{R}$ und setzen wir $u := (s+t)/2\ \wedge\ v := (s-t)/2$, so gilt $s = u + v\ \wedge$ $\wedge\ t = u - v\ \wedge\ e^{is} - e^{it} = e^{iu}(e^{iv} - e^{-iv}) = e^{iu} \cdot 2i \cdot \sin v$, und mit (i) und (ii) folgt

(xii) $\cos s - \cos t = -2 \cdot \sin \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}$,

(xiii) $\sin s - \sin t = 2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \cdot \sin \frac{s-t}{2} \quad \forall\ s, t \in \mathbb{R}$.

Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$i^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = (-1)^\nu\ \wedge\ i^{2\nu+1} = i \cdot (-1)^\nu\ \wedge\ (-i)^{2\nu+1} = -i \cdot (-1)^\nu \\ \wedge\ (it)^{2\nu+1} + (-it)^{2\nu+1} = 0\ \wedge\ (it)^{2\nu} - (-it)^{2\nu} = 0,$$

und deshalb führen (xi), 14.3. und 14.24.(i) auf

(xiv) $\boxed{\cos t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} \mp \cdots} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$,

(xv) $\boxed{\sin t = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} \mp \cdots} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Mit (xiv) und (xv) stehen sehr gute Berechnungsverfahren für die näherungsweise Bestimmung der Funktionswerte zur Verfügung, die insbesondere auch bei Taschenrechnern Verwendung finden und die natürlich auch zur Erstellung eines Graphen für cos und sin dienen können (Figur b)).

3. Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und ist $t \in [0, n+1]$, so gilt $\frac{t^\nu}{\nu!} \geq \frac{t^\nu}{\nu!} \cdot \frac{t}{\nu+1} = \frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$ $\forall\, \nu \in \mathbb{N}_0$ mit $\nu \geq n$. Wegen 14.5. können wir deshalb bei geeigneter Wahl von t die Formel $(*)$ aus 14.30. auf 2.(xiv) und 2.(xv) anwenden und erhalten die Beziehungen

(i) $0 < 1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} < 1 \qquad \forall\, t \in]0,1]$,

(ii) $0 < t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t \qquad \forall\, t \in]0,2]$,

(iii) $t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \leq \sin t \leq t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} \qquad \forall\, t \in [0,2]$,

(iv) $\cos 1 > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;\wedge\; \cos 2 < 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3}$.

Sind $s, t, \in]0,2]$ mit $t < s$, so führen (ii) und 2.(xii) wegen $0 < t < \frac{s+t}{2} < s \wedge 0 < s-t < 2$ auf $\cos s - \cos t < 0$.

In Verbindung mit (i), 15.5.(iii), 15.16. und 2. bedeutet dies:

(v) $\cos|_{[0,2]}$ *ist eine stetige und streng monoton fallende Bijektion von dem Intervall* $[0,2]$ *auf das Intervall* $[\cos 2, \cos 0]$ *mit* $\cos 0 = 1 \;\wedge\; \cos 1 > \frac{1}{2} \;\wedge\; \cos 2 \leq -\frac{1}{3}$ *(Figur b)).*

Die Aussage (v) ist der Ausgangspunkt für die nachfolgenden Erörterungen.

B. Die Zahl π

4. Nach 15.15. und 3.(v) gibt es in $]1,2[$ genau eine Zahl a mit cos $a = 0$. Wegen 2.(iii) und 3.(ii) folgt sin $a = 1$ und damit $e^{ia} = i$. Wir bezeichnen die Zahl $2a \in]2,4[$ mit „π" und werden uns später davon überzeugen, daß es sich hierbei um die berühmte „**Kreiszahl**" handelt. Vorerst haben wir lediglich die Information, daß π diejenige Zahl aus dem Intervall $]2,4[$ ist, die die Bedingung

(i) $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i} \;\wedge\; \boxed{\cos\frac{\pi}{2} = 0} \;\wedge\; \boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$

erfüllt. Aus (i) folgt durch Quadrieren der ersten Gleichung die Beziehung

(ii) $\boxed{e^{i\pi} = -1} \;\wedge\; \boxed{\cos\pi = -1} \;\wedge\; \boxed{\sin\pi = 0}$

und damit die berühmte **EULERsche Gleichung**

(iii) $\boxed{0 = 1 + e^{i\pi}}$,

in der die fünf „Fundamentalzahlen" $0, 1, e, i, \pi$ „auf gar wundersame Art" miteinander verwoben sind. Indem wir die erste Gleichung aus (ii) quadrieren, erhalten wir

(iv) $\boxed{e^{2\pi i} = 1} \;\wedge\; \boxed{\cos 2\pi = 1} \;\wedge\; \boxed{\sin 2\pi = 0}$,

und zusammen mit 14.24(iii), (vi) führen (i), (ii), (iv) auf

(v) $e^{z+\frac{n}{2}\pi i} = i^n \cdot e^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$,

(vi) $e^{z+n\pi i} = (-1)^n \cdot e^z \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$,

(vii) $\boxed{e^{z+2n\pi i} = e^z} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Wegen 2.(i) und 2.(x) führt dies mit $z \in \{it, -it\}$ auf

(viii) $-\cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi + t\right) = (-1)^n \cdot \sin t = \cos\left(\frac{2n+1}{2}\pi - t\right) = \cos\left(t - \frac{2n+1}{2}\pi\right)$,

(ix) $\sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi + t\right) = (-1)^n \cdot \cos t = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi - t\right) = -\sin\left(t - \frac{2n+1}{2}\pi\right)$,

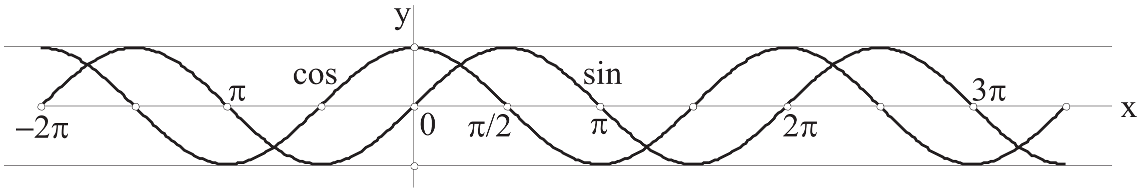
(x) $\cos(n\pi + t) = (-1)^n \cdot \cos t = \cos(n\pi - t) = \cos(t - n\pi)$,

(xi) $\sin(n\pi + t) = (-1)^n \cdot \sin t = -\sin(n\pi - t) = \sin(t - n\pi)$,

(xii) $\boxed{\sin(2n\pi + t) = \sin t} \ \wedge \ \boxed{\cos(2n\pi + t) = \cos t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

Da $\cos|_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ gemäß 3.(v) und 4.(i) eine streng monoton fallende Bijektion von $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ auf $[0,1]$ ist, folgt aus $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \ \ \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (vgl. 4.(viii)), daß $\cos|_{[\frac{\pi}{2},\pi]}$ eine streng monoton fallende Bijektion von $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ auf $[0,-1]$ ist. Demnach ist $\cos|_{[0,\pi]}$ eine stetige und streng monoton fallende Bijektion von $[0,\pi]$ auf $[-1,1]$, und mit 4.(x) folgt

5. **Satz**. $\cos|_{[n\pi,(n+1)\pi]}$ *ist für* $n \in 2\mathbb{Z}$ *(bzw.* $n \in 2\mathbb{Z}+1$*) eine stetige streng monoton fallende (bzw. steigende) Bijektion von* $[n\pi, (n+1)\pi]$ *auf* $[-1,1]$ *(vgl. d. Figur).*



In Verbindung mit $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ (vgl.4.(ix)) führt 5. auf

6. **Satz**. $\sin|_{[\frac{2n+1}{2}\pi, \frac{2n+3}{2}\pi]}$ *ist für* $n \in 2\mathbb{Z}$ *(bzw.* $n \in 2\mathbb{Z}+1$*) eine stetige streng monoton fallende (bzw. steigende) Bijektion von* $\left[\frac{2n+1}{2}\pi, \frac{2n+3}{2}\pi\right]$ *auf* $[-1,1]$ *(vgl. d. Figur).*

7. Gemäß 3.(ii) ist $\sin t > 0 \ \ \forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, und wegen 4.(ix) ist $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ $\forall\, t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Demnach gilt $\sin t > 0 \ \ \forall\, t \in]0,\pi[$, und mit 4.(ix), (xi) erhalten wir

(i) $\sin t > 0$ für $t \in]n\pi, (n+1)\pi[$ und $n \in 2\mathbb{Z}$,

(ii) $\sin t < 0$ für $t \in]n\pi, (n+1)\pi[$ und $n \in 2\mathbb{Z}+1$,

(iii) $\cos t > 0$ für $t \in \left]\frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi\right[$ und $n \in 2\mathbb{Z}$,

(iv) $\cos t < 0$ für $t \in \frac{2n-1}{2}\pi, \frac{2n+1}{2}\pi[$ und $n \in 2\mathbb{Z}+1$.

Ist $z = x + iy \in \mathbb{E}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_+$, so ist $y = \sqrt{1-x^2}$, also $-1 \le x \le 1$, und wegen 5. gibt es dann genau ein $t \in [0,\pi]$ mit $x = \cos t$. Hierbei ist $\sin t = \sqrt{1-x^2} = y$ gemäß (i) und 2.(iii), und folglich *existiert genau ein* $t \in [0,\pi]$ *mit* $z = e^{it}$.

Ist $w \in \mathbb{E}$ mit $Im(w) < 0$, so ist $Im\,\bar{w} > 0$, und mithin gibt es genau ein $s \in]0,\pi[$ mit $\bar{w} = e^{is}$, also mit $w = e^{i(-s)} = e^{i(2\pi - s)}$. In Verbindung mit (i) und (ii) bedeutet dies:

8. **Satz**. *Die Abbildung* $\boxed{[0,2\pi[\to \mathbb{E}: \ t \to e^{it}}$ *ist eine* **Bijektion**.

Sind $s,t\in\mathbb{R}$ mit $e^{is}=e^{it}$, so ist $e^{i(s-t)}=1$. Ist nun $n=\left\lfloor\frac{s-t}{2\pi}\right\rfloor$ (vgl. 3.7.), so gilt $n\le\frac{s-t}{2\pi}<n+1$ und damit $2\pi n\le s-t<2\pi n+2\pi$, also $0\le s-t-2\pi n<2\pi$. Es folgt $e^{i(s-t-2\pi n)}=e^{i(s-t)}=1$ und mit 8. dann $s-t-2\pi n=0$, also $s-t\in 2\pi\mathbb{Z}$.

Mit 4.(vii) führt dies auf

9. **Satz**. *Für $s,t\in\mathbb{R}$ gilt $e^{is}=e^{it}$ genau dann, wenn $s-t\in 2\pi\mathbb{Z}$ ist.*

10. Nach 2.(iii),(vii) ist $0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}=-1+2\cos^2\frac{\pi}{4}=1-2\sin^2\frac{\pi}{4}$, und mithin gilt

(i) $\boxed{\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}}$.

Nach 2.(viii) ist $0=\cos\frac{\pi}{2}=4\cos^3\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}\cdot(4\cos^2\frac{\pi}{6}-3)$, und dann führen 2.(iii), (vii) und 3.(ii), (v) auf

(ii) $\boxed{\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \wedge\ \boxed{\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}}\ \wedge\ \boxed{\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}}\ \wedge\ \boxed{\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Wäre $\pi\le 3$, so wäre $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\overset{6.}{\le}\sin\frac{3}{6}\overset{3.(ii)}{<}\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Deshalb gilt

(iii) $\boxed{3<\pi<4}$.

11. Einen Näherungswert für π findet man bereits um 1900 v. Chr. im Rechenbuch des Ahmes mit 3,16, um 500 v. Chr. im indischen Śulbasūtras mit 3,08, um 400 v. Chr. bei Platon mit $\sqrt{2}+\sqrt{3}\approx 3,146$, um 240 v. Chr. bei Archimedes mit $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{10}{70}$, um 150 n. Chr. bei Ptolemaios mit 3,14166, um 260 n. Chr. bei dem chinesischen Gelehrten Liu Hui mit 3,14159 und um 1450 n. Chr. bei dem islamischen Astronomen Al–Kāšī von der Sternwarte in Samarkand (Turkmenistan) mit $\pi=3,1415926535897\ldots$, also auf 14 Stellen genau!

Ludolph van Ceulen (1540–1610, Leiden) gab π auf 36 Stellen genau an; daher wird π auch oft die "Ludolphsche Zahl" genannt. William Shanks (1812–1882) berechnete π auf 527 Stellen genau; er verwendete darauf 20 Jahre seines Lebens, und sein Rekord blieb bis 1945 bestehen. Im Jahre 1999 bestimmte der japanische Mathematiker Yasumasa Kanada die Zahl π mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage auf mehr als $6\cdot 10^{10}$ Stellen.

12. Wie bereits erwähnt, hat man mit der Sinus–Reihe 2.(xv) ein sehr gutes Verfahren zur Berechnung von Sinus–Werten.

Hiervon ausgehend kann man nach W. Benz eine Folge angeben, die sehr schnell gegen π konvergiert. Man definiert diese rekursiv durch

(i) $\boxed{a_1:=3\ \wedge\ a_{n+1}:=a_n+\sin a_n}\qquad\forall\ n\in\mathbb{N}$.

Um

(ii) $\boxed{\lim_{n\to\infty}a_n=\pi}$

zu beweisen, zeigen wir zuerst induktiv

(iii) $\boxed{3 \le a_n < a_{n+1} < \pi}$ $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

In der Tat: Es ist $3 \le a_1 \overset{10.(iii)}{<} \pi$, und aus $3 \le a_n < \pi < 4$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt

$0 \overset{7.(i)}{<} \sin a_n \overset{4.(xi)}{=} \sin(\pi - a_n) \overset{3.(ii)}{<} \pi - a_n$, also $3 \le a_n < a_n + \sin a_n = a_{n+1} < \pi$.

Damit ist (iii) gezeigt, und nach 13.17. existiert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $3 \le a \le \pi$ gemäß 13.14..
Da die Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist, folgt

$a \overset{13.1.(i)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \overset{13.6.}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} (\sin a_n) \overset{15.4.(*)}{=} a + \sin a$, also $\sin a = 0$.

Mit 7. und 4.(ii) impliziert dies $a = \pi$, also (ii).

Wie „schnell" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen π konvergiert, erkennt man an

(iv) $a_3 = \boxed{3,1415926535\ldots}$ (11 korrekte Stellen)
bzw.
(v) $a_5 =$ 3.1415 92653 58979 32384 62643 38327 95028 84197 16939 93751 05820 97494
45923 07816 40628 62089 98628 03482 53421 17067... (100 korrekte Stellen),

wobei diese Angaben mit „Mathematica" anhand der Befehlszeilen

```
BZ[u_Real]:=u+Sin[u]; Nest[BZ,N[3,30],2]    bzw.
BZ[u_Real]:=u+Sin[u]; Nest[BZ,N[3,105],4]
```

erstellt wurden.

Hierbei läßt sich die Korrektheit der Ziffern wie folgt ermitteln:

Nach 3.(ii) ist $t\cdot\big(1-\frac{1}{6}\big) \le t\cdot\big(1-\frac{t^2}{6}\big) \le \sin t \quad \forall\ t \in [0,1]$, also $(\pi-a_n)\cdot\frac{5}{6} \le \sin(\pi-a_n) \overset{4.(xi)}{=}$
$= \sin a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$, und folglich gilt

(vi) $\boxed{|\pi - a_n| \le \frac{6}{5}\cdot(a_{n+1} - a_n)}$ $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Hat man also a_n und a_{n+1} bis zu einer bestimmten Stelle errechnet und ist $a_{n+1} - a_n <$
$< \frac{5}{6}\cdot 10^{-(k+1)}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so sind k Nachkommastellen von a_n identisch mit denen von π, falls die anschließende $(k+1)$–te a_n–Ziffer $\ne 9$ ist.

C. Die Funktionen Tangens und Cotangens

13. Man bezeichnet die Funktion

(i) $\boxed{\tan : D_{\tan} \to \mathbb{R} : t \to \frac{\sin t}{\cos t}}$ $\quad$ mit $\quad D_{\tan} := \mathbb{R}\backslash\big(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\big)$

als **Tangens** und die Funktion

(ii) $\boxed{\cot : D_{\cot} \to \mathbb{R} : t \to \frac{\cos t}{\sin t}}$ $\quad$ mit $\quad D_{\cot} := \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$

als **Cotangens** (vgl. 4.). Offenbar gilt

(iii) $\tan t = \dfrac{1}{\cot t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

und mit 2. und 4. folgt

(iv) $\boxed{\tan(n\pi + t) = \tan t}$ $\quad \forall\ t \in D_{\tan}, \quad \forall\ n \in \mathbb{Z}$,

(v) $\boxed{\cot(n\pi + t) = \cot t}$ $\forall\, t \in D_{\cot}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$,

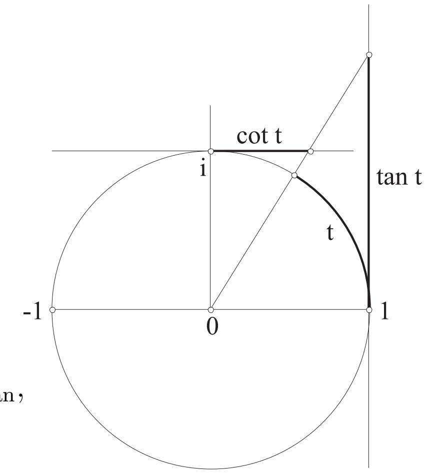
(vi) $\tan(-t) = -\tan t \ \ \forall\, t \in D_{\tan}$,

(vii) $\cot(-t) = -\cot t \ \ \forall\, t \in D_{\cot}$,

(viii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cot t = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

(ix) $\cot\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \tan t = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

(x) $\tan 0 = \cot\frac{\pi}{2} = 0 \ \wedge\ \tan\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$,



(xi) $\boxed{\tan(s+t) = \dfrac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \cdot \tan t}}$ für $s, t, s+t \in D_{\tan}$,

(xii) $\boxed{\cot(s+t) = \dfrac{\cot s \cdot \cot t - 1}{\cot s + \cot t}}$ für $s, t, s+t \in D_{\cot}$,

(xiii) $1 + i \cdot \tan t = \dfrac{1}{\cos t} \cdot e^{it}$
$\forall\, t \in D_{\tan}$,

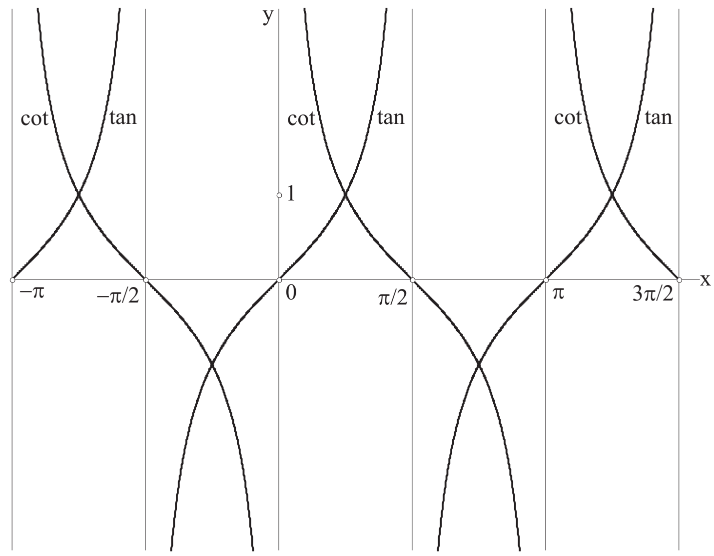
(xiv) $i + \cot t = \dfrac{1}{\sin t} \cdot e^{it}$
$\forall\, t \in D_{\cot}$,

(xv) $\cos 2t = \dfrac{1 - \tan^2 t}{1 + \tan^2 t}$
$\forall\, t \in D_{\tan}$,

(xvi) $\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1 + \tan^2 t}$
$\forall\, t \in D_{\tan}$,

(xvii) $\boxed{\tan t = \dfrac{\sin 2t}{1 + \cos 2t}}$

$\forall\, t \in D_{\tan}$ (vgl. d. Figuren).



14. *Nach 15.6.(iii) und 2. sind* tan *und* cot *auf ihrem Definitionsbereich stetig.*

Da $\frac{1}{\cos}$ und sin gemäß 5. und 6. auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ streng monoton steigend sind, gilt dies auch für tan, und mit 13.(vi) folgt dann

(i) $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ *ist stetig und streng monoton steigend.*

Entsprechend erhalten wir

(ii) $\cot|_{]0,\pi[}$ *ist stetig und streng monoton fallend.*

Wegen $\lim\limits_{t>0, t\to 0} \dfrac{1}{\cot t} = \lim\limits_{t>0, t\to 0} \tan t = 0$ ist $\cot t$ nach oben unbeschränkt, und wegen 13.(iv)–(ix) gelten dann gemäß 15.15. die Aussagen

(iii) $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ *ist eine Bijektion von* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *auf* $\mathbb{R}$,

(iv) $\cot|_{]0,\pi[}$ *ist eine Bijektion von* $]0, \pi[$ *auf* $\mathbb{R}$

(vgl. d. Figuren).

15. Die zu $\cos\big|_{[0,\pi]}$ bzw. $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ bzw. $\tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ bzw. $\cot\big|_{]0,\pi[}$ nach 15.21. existierenden inversen Bijektionen

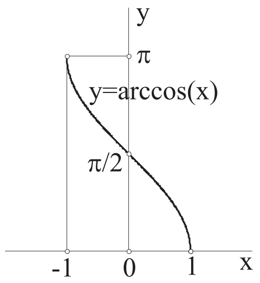
(i) $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ mit $(t = \arccos x \;\Leftrightarrow\; x = \cos t)$ bzw.

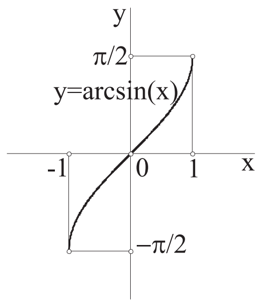
(ii) $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mit $(t = \arcsin x \;\Leftrightarrow\; x = \sin t)$ bzw.

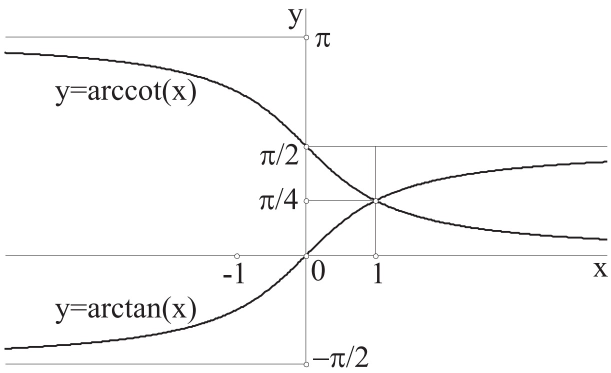
(iii) $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $(t = \arctan x \;\Leftrightarrow\; x = \tan t)$ bzw.

(iv) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ mit $(t = \operatorname{arccot} x \;\Leftrightarrow\; x = \cot t)$,

die **Arcus Cosinus** bzw. **Arcus Sinus** bzw. **Arcus Tangens** bzw. **Arcus Cotangens** genannt werden, sind nach 15.21., 5., 6. und 14. auf ihren Definitionsbereichen streng monoton und stetig (vgl. d. Figuren).

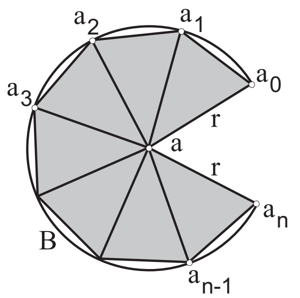


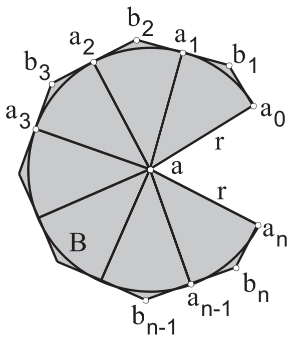




D. Kreisbögen und Kreissektoren

16. Es seien $a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+^*$ und $s,t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t - s \leq 2\pi$. Ist nun $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ und ist $x := \dfrac{t-s}{2n}$, so können wir auf dem Kreis $k_{a,r}$ die Punkte





$$
\begin{aligned}
a_0 &:= a + r \cdot e^{i(s+0\cdot 2x)} = a + r \cdot e^{is},\\
a_1 &:= a + r \cdot e^{i(s+1\cdot 2x)},\\
a_2 &:= a + r \cdot e^{i(s+2\cdot 2x)},\\
&\vdots\\
a_{n-1} &:= a + r \cdot e^{i(s+(n-1)\cdot 2x)},\\
a_n &:= a + r \cdot e^{i(s+n\cdot 2x)} = a + r \cdot e^{it}
\end{aligned}
$$

betrachten.

Abgesehen von der Möglichkeit $a_n{=}a_0$ (im Falle $t{-}s{=}2\pi$) sind die Punkte $a_0, \ldots, a_n$ nach 9. paarweise verschieden.

Wir nennen $S_n := [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1},a_n]$ den dem **Kreisbogen**

$$\boxed{B := \{a + r \cdot e^{ix} \mid x \in [s,t]\}}$$

einbeschriebenen n**–Streckenzug**. Außerdem bezeichnen wir $L_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k{-}a_{k-1}|$ als die **Länge** von S_n und nennen $F_n := \sum\limits_{k=1}^{n} F(a,a_{k-1},a_k)$ die durch S_n bestimmte **einbeschriebene** n**-Sektorfläche**.

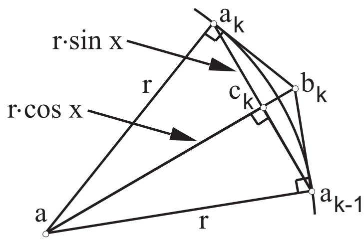
Die Punktmenge $\boxed{K := \{a + u \cdot e^{ivt} \mid u \in [0,r] \;\wedge\; v \in [s,t]\}}$ wird der durch B bestimmte **Kreissektor** genannt.

Für $k \in \{1,\ldots,n\}$ sei b_k der Schnittpunkt der Tangenten in a_{k-1} und in a_k an $k_{a,r}$. Dann nennen wir $S_n' := [a_0,b_1] \cup [b_1,b_2] \cup \cdots \cup [b_{n-1},b_n] \cup [b_n,a_n]$ den dem Kreisbogen B **umbeschriebenen** n**–Streckenzug**, bezeichnen $L_n' := |b_1-a_0|+|a_n-b_n|+\sum_{k=2}^{n}|b_k-b_{k-1}|$ als dessen **Länge** und $F_n' := F(a,a_0,b_1)+F(a,b_n,a_n)+\sum_{k=2}^{n} F(a,b_{k-1},b_k)$ als die durch S_n' bestimmte **überdeckende** n**-Sektorfläche**.

Für $k \in \{1,\ldots,n\}$ erhalten wir

$|a_k - a_{k-1}| = |r\cdot e^{is}\cdot e^{ik2x}\cdot(1-e^{-i2x})| = r\cdot|1-e^{-i2x}|\cdot|e^{ix}| = r\cdot|e^{ix}-e^{-ix}| \overset{2.(xi)}{=} 2r\cdot\sin x$,

also



(i) $\boxed{L_n = 2rn\cdot \sin\frac{t-s}{2n}}$.

Für $k\in\{1,\ldots,n\}$ sei c_k der Fußpunkt des Lotes von a auf $\langle a_{k-1},a_k\rangle$. Wegen $|a_k-c_k| = \frac{1}{2}|a_k-a_{k-1}| = r\cdot\sin x$ führt der Satz des PYTHAGORAS auf $|a-c_k| = \sqrt{r^2-r^2\cdot\sin^2 x} = r\cdot\cos x$.

Demnach ist $F(a,a_{k-1},a_k) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot r^2\cos x\sin x = \frac{r^2}{2}\cdot\sin 2x$, und wir erhalten

(ii) $\boxed{F_n = \frac{r^2}{2}\cdot n\cdot\sin\frac{t-s}{n}}$.

Da die Dreiecke (a,c_k,a_k) und (a,a_k,b_k) ähnlich sind, gilt

$|a_k-b_k|/r = |a_k-c_k|/|c_k-a| = \tan x$, also $|a_k-b_k| = r\cdot\tan x = |b_k-a_{k-1}|$, und damit folgt

(iii) $\boxed{L_n' = 2nr\cdot\tan\frac{t-s}{2n}} \quad\wedge\quad \boxed{F_n' = nr^2\cdot\tan\frac{t-s}{2n}}$.

Nach 2.(xi) und 15.2.(iii) ist $\lim\limits_{z\in\mathbb{R}^*,z\to0}\frac{\sin z}{z} = \lim\limits_{z\in\mathbb{R}^*,z\to0}\big(\frac{e^{iz}-1}{2iz}+\frac{e^{-iz}-1}{2(-iz)}\big) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, also

(iv) $\boxed{\lim\limits_{z\in\mathbb{R}^*,z\to0}\frac{\sin z}{z} = 1}$.

Da cos in 0 stetig ist, ist $\lim\limits_{z\in\mathbb{R}^*,z\to0}\cos z = \cos 0 = 1$, und mithin gilt

(v) $L := \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty}\big(r\cdot(t-s)\cdot\frac{\sin((t-s)/2n)}{(t-s)/2n}\big) = r\cdot(t-s),$

$\wedge\ L' := \lim\limits_{n\to\infty} L_n' = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{r\cdot(t-s)}{\cos((t-s)/2n)}\cdot\frac{\sin((t-s)/2n)}{(t-s)/2n}\big) = r\cdot(t-s),$

$\wedge\ F := \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{r^2}{2}(t-s)\cdot\frac{\sin((t-s)/n)}{(t-s)/n}\big) = \frac{r^2}{2}\cdot(t-s),$

$\wedge\ F' := \lim\limits_{n\to\infty} F_n' = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\frac{r^2(t-s)}{2\cos((t-s)/2n)}\cdot\frac{\sin((t-s)/2n)}{(t-s)/2n}\big) = \frac{r^2}{2}\cdot(t-s).$

Dies bedeutet: Für $n\to\infty$ streben L_n und L_n' gegen den gleichen Grenzwert, ebenso auch F_n und F_n'!

Wegen $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\tan\frac{x}{2} = \frac{2\sin x}{1+\cos x} < \frac{2\sin x}{2\cos x} = \tan x$ ergeben sich nun außerdem die Ungleichungketten

(vi) $\boxed{L_n < L_{2n} < L'_{2n} < L'_n \quad \wedge \quad F_n < F_{2n} < F_{4n} < F'_{2n} < F'_n}$.

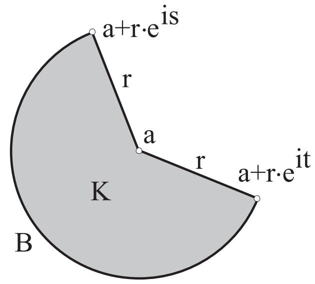
Demnach sind $(L_{2^r \cdot n})_{r\in\mathbb{N}_0}$, $(L'_{2^r \cdot n})_{r\in\mathbb{N}_0}$ bzw. $(F_{2^r \cdot n})_{r\in\mathbb{N}_0}$, $(F'_{2^r \cdot n})_{r\in\mathbb{N}_0}$ monotone Folgen (steigend/fallend) mit dem Grenzwert L bzw. F, und mit (v), (vi) folgt

(vii) $\boxed{L_n < L < L'_n} \quad \wedge \quad \boxed{F_n < F < F'_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Wegen (v) sind die reellen Zahlen L und F durch (vii) *eindeutig festgelegt*.

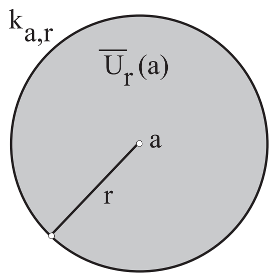
Deshalb und weil es anschaulich naheliegend ist, wird L nun als die **Länge** $L(B)$ **des Bogens** B und F als die **Fläche** $F(K)$ **des Kreissektors** K bezeichnet, und wir erhalten

(viii) $\boxed{L(B) = r \cdot (t - s)} \quad \wedge \quad \boxed{F(K) = \frac{r^2}{2} \cdot (t - s)}$.



Im Falle $s = 0 \ \wedge \ t = 2\pi$ ist B der Kreis $k_{a,r}$ und K die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U}_r(a)$ (vgl. 13.1). Dann wird $L(k_{a,r})$ der **Umfang** von $k_{a,r}$ und $F(k_{a,r}) := F(\overline{U}_r(a))$ die **Fläche** von $k_{a,r}$ genannt, und es folgt

(ix) $\boxed{L(k_{a,r}) = 2\pi r} \quad \wedge \quad \boxed{F(k_{a,r}) = \pi r^2}$.



Speziell für $a = 0$ und $r = 1$ bedeutet dies

(x) $\boxed{L(\mathbb{E}) = 2\pi} \quad \wedge \quad \boxed{F(\mathbb{E}) = \pi}$.

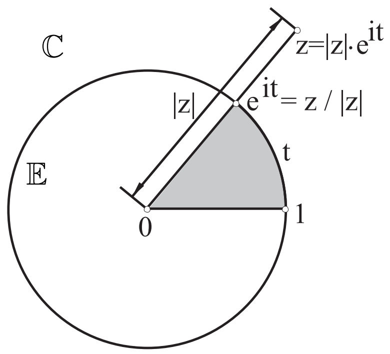
Mit $\sin 2x \cdot \tan x = 2 \sin^2 x$ und $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \dfrac{x}{2}$ folgt

(xi) $\boxed{F_{2n} = \sqrt{F_n \cdot F'_n}} \quad \wedge \quad \boxed{F'_{2n} = 2 \cdot F_{2n} \cdot F'_n / (F_{2n} + F'_n)}$.

Geht man hier von $a{=}0 \wedge r{=}1 \wedge s{=}0 \wedge t{=}2\pi \wedge n{=}6$ aus, so ist $F_6{=}3\cdot \sin(\pi/3){=}3\cdot\sqrt{3}/2$ und $F'_6{=}6\cdot \tan(\pi/6){=}2\cdot\sqrt{3}$, und man kann mit (xi) sukzessive die Zahlen $F_{12}, F'_{12}; F_{24}, F'_{24}; F_{48}, F'_{48}; F_{96}, F'_{96}; \ldots$ zur Bestimmung von π errechnen.
Dies ist das von Archimedes verwendete Verfahren; er ging 5 Schritte bis zum 192–Eck und fand $3{+}10/71 < \pi < 3{+}10/70$. Will man π mit diesem Verfahren auf 10 korrekte Stellen ermitteln, so muß man 15 Schritte bis zum 196608–Eck gehen.

E. Winkel und Winkelmessung

17. Ist $z \in \mathbb{C}^*$, so ist $\boxed{z/|z| \in \mathbb{E}}$ wegen $|z/|z|| = |z|/|z| = 1$. Nach 8. existiert genau ein $t \in]0, 2\pi]$ mit $z/|z| = e^{it}$, also mit $\boxed{z = |z| \cdot e^{it}}$.



Hierbei ist t gemäß 16. die Länge des Bogens $B_t :=$ $= \{e^{ix} \mid 0 \le x \le t\}$, der auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$ von 1 bis e^{it} verläuft, wobei $\operatorname{Im} e^{ix} > 0 \ \ \forall\, x \in]0, \pi[$ gilt. Nach 9. ist $\boxed{z = |z| \cdot e^{is} \ \Leftrightarrow \ s - t \in 2\pi\mathbb{Z}}$.

Ist $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = r \cdot e^{is}$ mit $r \in \mathbb{R}_+ \ \wedge \ s \in \mathbb{R}$ gegeben, so bezeichnet man das Paar $(r; s) := r \cdot e^{is}$ als eine **Polarkoordinatendarstellung** von z mit $r = |z|$ als **Absolutbetrag** und mit s als **Argument**.

Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ in der Form $z_1 = (r_1; s_1)$ und $z_2 = (r_2; s_2)$ gegeben, so führt 14.24.(iii) auf

(∗) $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2\,;\ s_1 + s_2)}$,

d.h. zwei komplexe Zahlen werden **multipliziert**,
indem man die $\boxed{\textit{Absolutbeträge multipliziert}}$ und die $\boxed{\textit{Argumente addiert}}$.

18. Sind zwei Strahlen $g^+ = A + \mathbb{R}_+ B$ und $h^+ := A + \mathbb{R}_+ C$ mit dem Scheitel $A \in \mathbb{C}$ und den Richtungsvektoren $B, C \in \mathbb{C}^*$ gegeben (vgl. 9.9.), so wird die Menge $\{g^+, h^+\}$ als ein **Winkel** mit dem **Scheitel** A und den **Schenkeln** g^+, h^+ bezeichnet, und

(i) $\boxed{\sphericalangle\{g^+, h^+\} := \arccos \dfrac{B \circ C}{|B| \cdot |C|}}$

wird das **Bogenmaß** von $\{g^+, h^+\}$ genannt.

Mit den Umrechnungsformeln

(ii) $\boxed{x^\circ := \dfrac{\pi}{180} \cdot x} \quad \wedge \quad \boxed{y = \left(\dfrac{180}{\pi} \cdot y\right)^\circ}$ für $x, y \in \mathbb{R}$,

wobei „x°“ als „x Grad“ gelesen wird, hat man mit dem Bogenmaß y zugleich auch das zugehörige **Gradmaß** $\left(\frac{180}{\pi} \cdot y\right)^\circ$. Insbesondere gilt

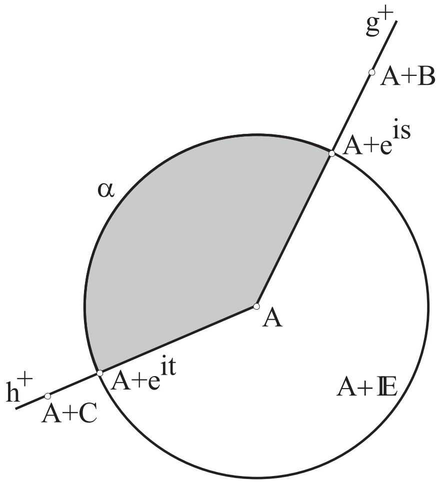
(iii) $\boxed{0^\circ = 0 \ \wedge\ 90^\circ = \frac{\pi}{2} \ \wedge\ 180^\circ = \pi \ \wedge\ 360^\circ = 2\pi}$.

Wir wollen uns überlegen, daß (i) eine sinnvolle Definition ist:

Nach 10.7.(v) ist $|B \circ C| \leq |B| \cdot |C|$, also $-1 \leq$ $\leq (B \circ C)/(|B| \cdot |C|) \leq +1$, und folglich ist durch

(iv) $\boxed{\alpha := \arccos((B \circ C)/(|B| \cdot |C|))}$

gemäß 15.(i) eine eindeutig bestimmte reelle Zahl α aus dem Intervall $[0, \pi] = [0^\circ, 180^\circ]$ festgelegt.



Hierbei ist α wirklich durch g^+ und h^+ bestimmt, denn ist $D \in g^+ \setminus \{A\}$ und $E \in h^+ \setminus \{A\}$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ mit $D = A + \lambda B \ \wedge\ E = A + \mu C$, und dann ist

$$\sphericalangle\{[A, D\!>, [A, E\!>\} = \arccos\left(\frac{(\lambda B) \circ (\mu C)}{|\lambda B| \cdot |\mu C|}\right) = \arccos\left(\frac{B \circ C}{|B| \cdot |C|}\right) = \sphericalangle\{g^+, h^+\}.$$

Weiter wollen wir uns jetzt davon überzeugen, daß man dem Winkel $\{g^+, h^+\}$ einen Kreisbogen B des Kreises $A + \mathbb{E}$ derart „einbeschreiben“ kann, daß B genau die Länge α hat (vgl. d. Figur):

Dazu bemerken wir zunächst, daß man (i) wegen (iv) und 15. auch notieren kann als

(v) $\boxed{B \circ C = |B| \cdot |C| \cdot \cos \alpha}$.

Wegen 17. gibt es nun eindeutig bestimmte Zahlen $s, t \in [0, 2\pi[$ mit $B = |B| \cdot e^{is}$ und $C = |C| \cdot e^{it}$, und damit folgt $B \circ C = |B| \cdot |C| \cdot (e^{is} \circ e^{it}) \overset{11.11.(i)}{=} |B| \cdot |C| \cdot \frac{1}{2}(e^{is} \cdot e^{-it} + e^{-is} \cdot e^{it}) \overset{2.(xi)}{=}$ $= |B| \cdot |C| \cdot \cos(s-t)$, also $\cos \alpha = \cos(s-t) \overset{2.(x)}{=} \cos(|s-t|) \overset{4.(x)}{=} \cos(2\pi - |s-t|)$. Wegen $\alpha \in [0, \pi]$

und 5. ist dann $\alpha = \min\{|s-t|,\, 2\pi-|s-t|\}$, d.h. α ist die Länge des *kleineren* der beiden Bögen, die auf $A+\mathbb{E}$ durch $A+e^{is}$ und $A+e^{it}$ festgelegt sind (vgl. d. Figur).

In diesem Sinne wird die Größe des Winkels $\{g^+, h^+\}$ also durch die *Länge* α *eines* dem Winkel *einbeschriebenen Kreisbogens* gemessen, und damit ist die Redeweise, daß $\alpha = \sphericalangle\{g^+, h^+\}$ das **Bogenmaß** von $\{g^+, h^+\}$ ist, gerechtfertigt.

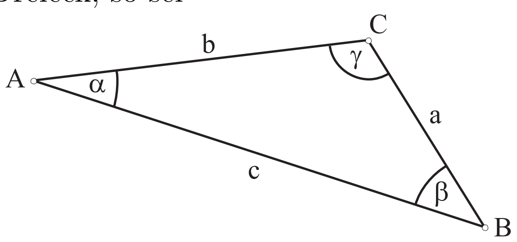
Zugleich verstehen wir nun auch, warum „$\arccos x$" als „Bogenlänge, deren cos gleich x ist", gelesen werden kann. (Entsprechend liest man $\arcsin, \arctan, \operatorname{arccot}$).

Schließlich ersehen wir aus (v), wie das Skalarprodukt $B \circ C$ mit den Längen $|B|, |C|$ und dem Winkelmaß $\sphericalangle\{\mathbb{R}_+B, \mathbb{R}_+C\}$ verbunden ist.

F. Sätze über Winkel und Dreiecke

19. Im folgenden verwenden wir die Abkürzung $\boxed{\sphericalangle(A,B,C) := \sphericalangle\{\,[B,A\rangle, [B,C\rangle\}}$ für $A,B,C \in \mathbb{C}$ mit $B \neq A, C$. Ist $\{A,B,C\}$ ein Dreieck, so sei

$a := |B-C|$, $\quad \alpha := \sphericalangle(B,A,C)$,
$b := |C-A|$, $\quad \beta := \sphericalangle(C,B,A)$,
$c := |A-B|$, $\quad \gamma := \sphericalangle(A,C,B)$.



Damit erhalten wir für das Dreieck $\{A,B,C\}$:

20. **Cosinussatz**. *Es gilt*

(i) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha}$, (ii) $\boxed{a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta}$,

(iii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cdot\cos\beta$, (iv) $b = c\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\gamma$,

(v) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$, (vi) $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$.

Beweis: Es ist $a^2 = ((A-C)+(B-A))\circ(B-C) \overset{18.(v)}{=} ab\cdot\cos\gamma + ac\cdot\cos\beta$, d.h. es gilt (ii). Entsprechend gelten auch (iv) und (vi). Multipliziert man (ii),(iv),(vi) mit a bzw. b bzw. c, so folgt $b^2+c^2-a^2 = 2bc\cdot\cos\alpha$, also (i). Entsprechend gelten auch (iii) und (v). □

21. **Sinussatz**. Es ist $\boxed{\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}}$.

Beweis: Aus $b^2\cdot\cos^2\alpha \overset{20.(vi)}{=} (c-a\cdot\cos\beta)^2 = c^2-2ac\cdot\cos\beta+a^2\cdot\cos^2\beta \overset{20.(iii)}{=} b^2-a^2+a^2\cdot\cos^2\beta$ und 2.(iii) folgt $b^2\cdot\sin^2\alpha = a^2\cdot\sin^2\beta$ und damit die erste Gleichung. Entsprechend gilt auch die zweite. □

22. **Satz über rechtwinklige Dreiecke**. Ist $\gamma = 90°$, so werden $[A,C], [B,C]$ als **Katheten** und $[A,B]$ als **Hypotenuse** bezeichnet, und es gilt

(i) $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\mathit{Ankathete}}{\mathit{Hypotenuse}}}$, (ii) $\boxed{\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\mathit{Gegenkathete}}{\mathit{Hypotenuse}}}$,

(iii) $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\mathit{Gegenkathete}}{\mathit{Ankathete}}}$, (iv) $\boxed{\cot\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\mathit{Ankathete}}{\mathit{Gegenkathete}}}$,

(v) $0 < \alpha < 90°$, (vi) $0 < \beta < 90°$,

(vii) $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$, (viii) $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$, $\cot\beta = \dfrac{a}{b}$.

Beweis: Wegen 4.(i), 5., 20.(ii),(iv) und 21. sind (i),(ii) und (v) –(vii) gültig, damit aber auch (iii), (iv) und (viii). $\square$

23. Sind $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B, C$ und ist $\alpha = \sphericalangle(B, A, C)$, so heißt $\{\,[A, B\rangle, [A, C\rangle\}$ ein **Nullwinkel** im Falle $\alpha = 0°$, ein **spitzer Winkel** im Falle $0° < \alpha < 90°$, ein **rechter Winkel** im Falle $\alpha = 90°$, ein **stumpfer Winkel** im Falle $90° < \alpha < 180°$, ein **gestreckter Winkel** im Falle $\alpha = 180°$. Mit 10.7.(ii), (iii) und 18.(v) folgt

(i) $\boxed{\alpha = 0° \;\Leftrightarrow\; [A, B\rangle = [A, C\rangle}$, (ii) $\boxed{\alpha = 90° \;\Leftrightarrow\; \langle A, B\rangle \perp \langle A, C\rangle}$,

(iii) $\boxed{\alpha = 180° \;\Leftrightarrow\; [A, B\rangle \cup [A, C\rangle = \langle A, C\rangle}$.

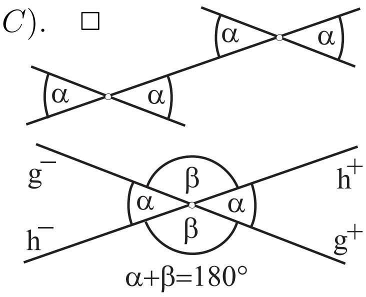
(iv) *Sind A, B, C nichtkollinear, so sind* $\sphericalangle(A, B, C), \sphericalangle(B, C, A), \sphericalangle(C, A, B) \in]0°, 180°[$.

Wir zeigen nun

24. **Satz**. *Jede Ähnlichkeit ist winkelmaßtreu. Genauer: Ist $f \in \ddot{\mathbb{A}}$ und sind $A, B, C \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B, C$, so ist* $\boxed{\sphericalangle(f(B), f(A), f(C)) = \sphericalangle(B, A, C)}$.

Beweis: Wegen 23. gelte o.B.d.A. $C \notin \langle A, B\rangle$. Hat f den Maßstab μ, so führt 20. auf $\cos \sphericalangle(f(B), f(A), f(C)) = \dfrac{\mu^2(b^2 + c^2 - a^2)}{\mu^2(2bc)} = \cos \sphericalangle(B, A, C)$. $\square$

25. *Bemerkung*. Gehen zwei Winkel durch eine Translation oder durch eine Punktspiegelung auseinander hervor, so sind sie gemäß 24. gleichgroß und heißen **Stufenwinkel** bzw. **Wechselwinkel** (vgl. d. Figur).



Ergänzend notieren wir

26. **Satz**. *Ist $\{g^+, h^+\}$ ein Winkel mit dem Scheitel A und ist $g^- := \widetilde{A}(g^+) \;\wedge\; h^- := \widetilde{A}(h^+)$, so ist* $\boxed{\sphericalangle\{g^+, h^+\} = \sphericalangle\{g^-, h^-\} = 180° - \sphericalangle\{g^+, h^-\} = 180° - \sphericalangle\{g^-, h^+\}}$.

Man nennt $\{g^-, h^-\}$ den **Gegenwinkel** *und $\{g^+, h^-\}, \{g^-, h^+\}$ die* **Nebenwinkel** *von $\{g^+, h^+\}$.*

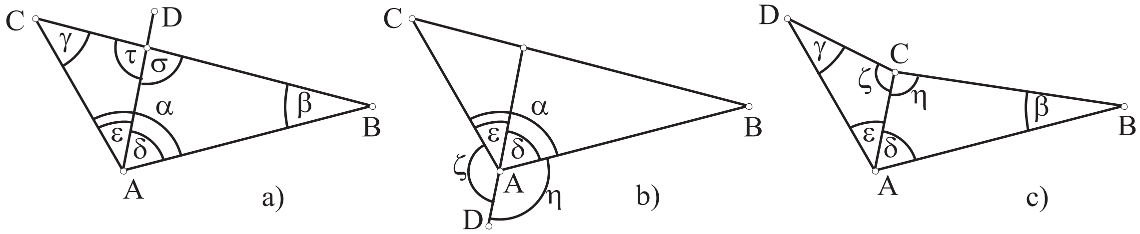
Beweis: Es sei $g^+ = A + \mathbb{R}_+ B$ und $h^+ = A + \mathbb{R}_+ C$ mit $|B| = |C| = 1$. Dann ist $g^- = A + \mathbb{R}_+(-B)$, und für $\alpha := \sphericalangle\{g^+, h^+\}$ und $\beta := \sphericalangle\{g^-, h^+\}$ folgt $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta \overset{18.(v)}{=} -(-B) \circ C = B \circ C \overset{18.(v)}{=} \cos\alpha$, also $180° - \beta = \alpha$. Durch Punktspiegelung an A ergeben sich mit 24. die verbleibenden Gleichungen. $\square$

27. **Satz**. *Die* **Winkelsumme im Dreieck** *ist* $180°$. *Jedes Dreieck hat wenigstens zwei spitze Winkel. Mit den Bezeichnungen aus 19. bedeutet dies: Es gilt*

(i) $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$, (ii) $(\alpha, \beta < 90°) \vee (\beta, \gamma < 90°) \vee (\gamma, \alpha < 90°)$.

Beweis: Nach 20.(ii),(iv),(vi) sind wenigstens zwei der Zahlen $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ positiv, d.h. es gilt (ii). Für $\alpha, \beta < 90°$ ergibt sich $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma \overset{20.(ii)}{=} \frac{1}{b} \cdot (c \cdot \cos\beta - a) \overset{20.(vi)}{=} = (\frac{a}{b}\cos\beta + \cos\alpha) \cdot \cos\beta - \frac{a}{b} = \cos\alpha\cos\beta - \frac{a}{b}\sin^2\beta \overset{21.}{=} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \overset{2.(iv)}{=} \cos(\alpha + \beta)$, also $180° - \gamma = \alpha + \beta$ gemäß 5.. Entsprechend folgt (i) in den verbleibenden Fällen. $\square$

28. **Satz zur Winkeladdition**. *Ist* $\{A,B,C\}$ *ein Dreieck und ist* $D\in\mathbb{C}\backslash\{A\}$, *so gilt:*
(i) $[A,D\!>\cap\,]B,C[\,\neq\emptyset \;\Rightarrow\; \sphericalangle(B,A,D)+\sphericalangle(D,A,C)=\sphericalangle(B,A,C)$ (Figur a).
(ii) $[A,\widetilde{A}(D)\!>\cap\,]B,C[\,\neq\emptyset \;\Rightarrow\; \sphericalangle(B,A,D)+\sphericalangle(D,A,C)+\sphericalangle(B,A,C)=360^\circ$ (Figur b).



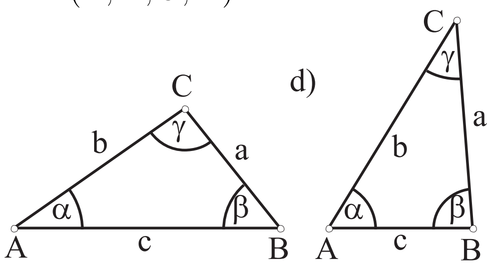
Beweis: Mit den Bezeichnungen der Figur a) folgt $(\delta{+}\varepsilon){+}180^\circ \overset{26.}{=} (\delta{+}\varepsilon){+}(\sigma{+}\tau){=}(\delta{+}\sigma){+}$ $+(\varepsilon{+}\tau) \overset{27.}{=} (180^\circ{-}\beta){+}(180^\circ{-}\gamma) \overset{27.}{=} \alpha{+}180^\circ$, also (i). Mit den Bezeichnungen der Figur b) erhalten wir $\delta{+}\eta \overset{26.}{=} 180^\circ \overset{26.}{=} \varepsilon{+}\zeta$ und $\delta{+}\varepsilon \overset{(i)}{=} \alpha$, also $\alpha{+}\zeta{+}\eta=(\delta{+}\eta){+}(\varepsilon+\zeta)=360^\circ$. □

29. **Corollar**. *Ist* (A,B,C,D) *ein Viereck mit* $\langle A,C\rangle\cap]B,D[\,\neq\emptyset$, *so hat* (A,B,C,D) *die Innenwinkelsumme* 360° *(Figur c)).*

Beweis. Mit den Bezeichnungen der Figur c) ist $(\delta+\varepsilon)+\beta+(\zeta+\eta)+\gamma=(\delta+\beta+\eta)+$ $+(\varepsilon+\zeta+\gamma) \overset{27.}{=} 360^\circ$ nach 28. die Innenwinkelsumme von (A,B,C,D). □

Weiter erhalten wir

30. **Satz über Größenvergleiche am Dreieck**.
Mit den Bezeichnungen der Figur d) gilt:
(i) $(a=b \;\Leftrightarrow\; \alpha=\beta)\;\wedge\;(a<b \;\Leftrightarrow\; \alpha<\beta)$,
(ii) $(b=c \;\Leftrightarrow\; \beta=\gamma)\;\wedge\;(b<c \;\Leftrightarrow\; \beta<\gamma)$,
(iii) $(c=a \;\Leftrightarrow\; \gamma=\alpha)\;\wedge\;(c<a \;\Leftrightarrow\; \gamma<\alpha)$,
Demnach liegt der größere Winkel stets der größeren Seite gegenüber.



Beweis: Wegen 20.(ii), (iv) ist $b^2-a^2=c\cdot(b\cdot\cos\alpha-a\cdot\cos\beta)$, also $a<b \;\Leftrightarrow\; a\cdot\cos\beta<$ $<b\cdot\cos\alpha \overset{21.}{\Leftrightarrow} \sin\alpha\cos\beta<\sin\beta\cos\alpha \overset{2.(v)}{\Leftrightarrow} 0<\sin(\beta-\alpha) \overset{6.}{\Leftrightarrow} \alpha<\beta$. Diese Rechnung gilt auch mit „=“ anstelle von „<“. Damit ist (i) gezeigt, und entsprechend gelten (ii) und (iii). □

31. **Kongruenzsatz**. *Sind Dreiecke* (A,B,C) *und* (A',B',C') *gegeben und sind die Bezeichnungen wie in 19. bzw. analog 19. gewählt (vgl. Figur d)), so sind äquivalent:*
(SSS) *Es gilt* $a=a' \;\wedge\; b=b' \;\wedge\; c=c'$.
(SWS) *Es gilt* $a=a' \;\wedge\; b=b' \;\wedge\; \gamma=\gamma'$.
(WSW) *Es gilt* $a=a' \;\wedge\; \beta=\beta' \;\wedge\; \gamma=\gamma'$.
(SSW) *Es gilt* $a=a' \;\wedge\; b=b' \;\wedge\; \alpha=\alpha' \;\wedge\; (\beta\leq 90^\circ \;\Leftrightarrow\; \beta'\leq 90^\circ)$.
$(*)$ *Die Dreiecke* (A,B,C) *und* (A',B',C') *sind kongruent.*

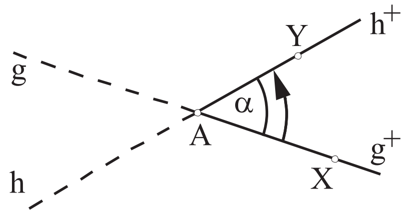
Beweis: Es gilt ((SSS) $\overset{20.}{\Rightarrow}$ (SSW) $\overset{21.,27.}{\Rightarrow}$ (WSW) $\overset{27.,21.}{\Rightarrow}$ (SWS) $\overset{20.}{\Rightarrow}$ (SSS)). Mit 12.4. $(\diamond)$ führt dies auf die Behauptung. □

32. **Ähnlichkeitssatz (WW)** *für gewöhnliche Winkel.*
Die Dreiecke (A,B,C), (A',B',C') *sind genau dann ähnlich, wenn* $\sphericalangle(A,B,C)=\sphericalangle(A',B',C')$ *und* $\sphericalangle(B,A,C)=\sphericalangle(B',A',C')$ *ist.*

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus 31. folgt: Durch Anwendung einer zentrischen Streckung auf (A, B, C) läßt sich aus (A, B, C) ein Dreieck (A'', B'', C'') mit $a'' = a'$ erzeugen. Wegen 27. und 31. sind (A'', B'', C'') und (A', B', C') dann kongruent, und mit 11.9.(ii) und 24. folgt die Behauptung. □

G. Der Zusammenhang zwischen $\mathbb{G}$–Winkeln und gewöhnlichen Winkeln

33. Wir stellen nun eine Verbindung zwischen den in 11.64. eingeführten $\mathbb{G}$–Winkeln und den in 18. definierten „**gewöhnlichen Winkeln**“ her:



Sind $g, h \in \mathbb{G}$ mit $g \nparallel h$, so existiert ein Dreieck (A, X, Y) mit $g := \langle A, X\rangle \;\wedge\; h := \langle A, Y\rangle \;\wedge$ $\wedge\; Det(A, X, Y) > 0$, und dann setzen wir

$$(*) \quad \boxed{\angle^\circ(g,h) := \sphericalangle\{g^+, h^+\} \in\,]0^\circ, 180^\circ[}$$

für $g^+ := [A, X>$ und $h^+ := [A, Y>$. Im Falle $\boxed{g \parallel h}$ setzen wir $\boxed{\angle^\circ(g,h) := 0^\circ = 0}$.

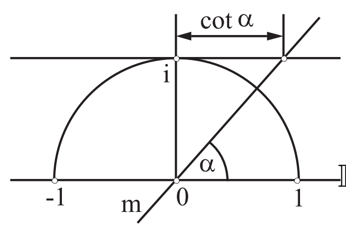
Damit haben wir jedem $\mathbb{G}$–Winkel $(g, h) \in \mathbb{G}\times\mathbb{G}$ ein **Winkelmaß** $\angle^\circ(g, h)$ zugeordnet; dies ist eine Zahl aus dem Intervall $[0^\circ, 180^\circ[= [0, \pi[$.

Wir müssen uns überlegen, daß $\angle^\circ(g, h)$ *wohldefiniert* ist. Da dies für $g \parallel h$ klar ist, sei $g \nparallel h$. Sind nun $U \in g$ und $V \in h$ mit Det $(A, U, V) > 0$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ mit $U{-}A = \lambda \cdot (X{-}A)$ und $V{-}A = \mu \cdot (Y{-}A)$, und wegen $0 < \operatorname{Det}(A, U, V) \overset{11.51.(i)}{=}$ $= \frac{1}{2}\det(U - A, V - A) = \lambda \cdot \mu \cdot \operatorname{Det}(A, X, Y)$ und $\operatorname{Det}(A, X, Y) > 0$ folgt $\lambda \cdot \mu > 0$, d.h. λ und μ haben das gleiche Vorzeichen. Dies bedeutet aber, daß $([A, U>, [A, V>)$ eines der Paare $(g^+, h^+), (\widetilde{A}(g^+), \widetilde{A}(h^+))$ ist, und nach 24. ist dann $\sphericalangle\{[A, U>, [A, V>\} = \sphericalangle\{g^+, h^+\}$.

Mit Blick auf 11.64.b) erkennen wir jetzt, daß die in Figuren eingezeichneten gebogenen Pfeile *bei $\mathbb{G}$–Winkeln stets die korrekten Maßzahlen* repräsentieren.

Bei *gewöhnlichen* Winkeln verwenden wir Bögen *ohne* Pfeilspitze, weil hier die Reihenfolge der Schenkel unerheblich ist.

Die Verbindung zwischen den in Paragraph 11 betrachteten *Öffnungen* und den hier eingeführten *Maßzahlen* zur Größenmessung von $\mathbb{G}$–Winkeln ergibt sich wie folgt:



$\boxed{m{=}\mathbb{R}\,(\cot\alpha, 1) \wedge \alpha{=}\angle^\circ(\mathbb{R}, m)}$

Ist $m \in \mathbb{G}_0$ eine Öffnung $\neq \mathbb{R}$, so gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $m = \mathbb{R}(x, 1)$, und dann ist

$$\alpha := \angle^\circ(\mathbb{R}, m) = \sphericalangle\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+(x, 1)\} \overset{18.(i)}{=} \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

also $\cos\alpha{=}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \;\wedge\; \sin\alpha{=}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \;\wedge\; \cot\alpha{=}x.$

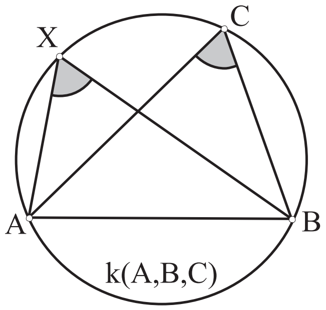
Mithin gehört zur Öffnung m die Gradzahl $\alpha = \angle^\circ(\mathbb{R}, m)$ und zur Gradzahl $\alpha \neq 0^\circ$ die Öffnung $\mathbb{R}\,(\cot\alpha, 1)$. Ergänzend zeigen wir

34. **Satz**. *Setzt man* $\alpha +_\pi \beta := \begin{cases} \alpha + \beta, & \textit{falls } \alpha + \beta < \pi \\ \alpha + \beta - \pi & \textit{sonst} \end{cases}$ *für* $\alpha, \beta \in [0, \pi[$, *so ist* $[0, \pi[\,(+_\pi)$ *eine abelsche Gruppe, die zur Gruppe* $\mathbb{G}_0(\oplus)$ *isomorph ist vermittels der Abbildung* $f : [0, \pi[\to \mathbb{G}_0$ *mit* $f(0) = \mathbb{R}$ *und mit* $f(\alpha) = \mathbb{R}\,(\cot\alpha, 1)$ *für* $\alpha \in]0, \pi[$.

Demnach entspricht die **Addition modulo** π „$+_\pi$“ *der Winkelmaße genau der Verknüpfung* „$\oplus$“ *der Öffnungen.*

Beweis: $[0,\pi[\,(+_\pi)$ ist offenbar ein Gruppoid mit dem neutralen Element 0 und mit $\alpha +_\pi (\pi-\alpha) = 0$ für $\alpha \in]0,\pi[$. Nach 33. ist f eine Bijektion, und mit $x = \cot\alpha \wedge y = \cot\beta$ folgt $f(\alpha +_\pi \beta) = \mathbb{R}(\cot(\alpha +_\pi \beta), 1) = \mathbb{R}(\cot(\alpha+\beta), 1) = \mathbb{R}\big(\frac{xy-1}{x+y}, 1\big) = \mathbb{R}(xy-1, x+y) = $ $= \mathbb{R}(x,1) \oplus \mathbb{R}(y,1) = f(\alpha) \oplus f(\beta)$ für $\alpha, \beta \in]0,\pi[$ mit $\beta \neq \pi - \alpha$. Ferner ist $f(\alpha +_\pi (\pi-\alpha)) =$ $= \mathbb{R} = \mathbb{R}(x\cdot(-x)-1, x+(-x)) = \mathbb{R}(x,1) \oplus \mathbb{R}(-x,1) = f(\alpha) \oplus f(\pi-\alpha)$. Damit ist klar, daß f die Homomorphiebedingung erfüllt, und mit 7.5., 7.8. folgt die Behauptung. □

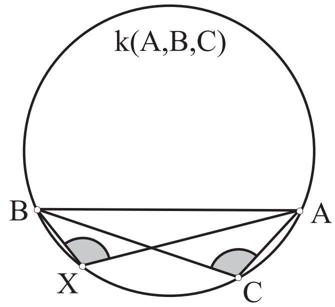
H. Der Randwinkelsatz für gewöhnliche Winkel



Indem wir 33. mit 12.30. verbinden, erhalten wir

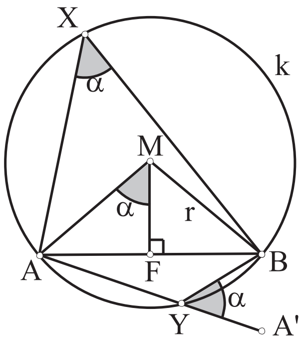
35. **Randwinkelsatz** *für gewöhnliche Winkel. Sind (A,B,C) und (A,B,X) Dreiecke mit gleicher Orientierung, also mit $[X,C] \cap \langle A,B\rangle = \emptyset$ (vgl. 11.62.), so gilt*

$$\boxed{X \in k(A,B,C) \;\Leftrightarrow \sphericalangle(A,X,B) = \sphericalangle(A,C,B)}.$$



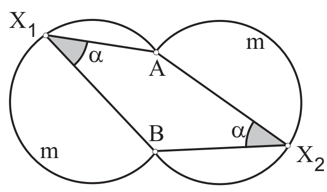
Beweis: Ggf. nach einer Vertauschung von A und B können wir davon ausgehen, daß (A,B,C) und (A,B,X) positiv orientiert sind. Nach 33. und 12.30. ist dann $X \in k(A,B,C) \;\Leftrightarrow\; \sphericalangle(A,X,B) =$ $= \angle^\circ(A,X,B) = \angle^\circ(A,C,B) = \sphericalangle(A,C,B)$. □

Indem wir 33. mit 12.29. verbinden, erhalten wir



36. **Mittenwinkelsatz** *für gewöhnliche Winkel. Auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M seien zwei verschiedene Punkte A, B mit $M \notin \langle A,B\rangle$ gegeben. Dann gilt:*
    (i) $X \in k \;\wedge\; [X,M] \cap \langle A,B\rangle = \emptyset$
    $\Rightarrow\; \sphericalangle(A,X,B) = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle(A,M,B) < 90^\circ$,
    (ii) $Y \in k \wedge\,]Y,M[\, \cap \langle A,B\rangle \neq \emptyset$
    $\Rightarrow\; \sphericalangle(A,Y,B) = 180^\circ - \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle(A,M,B)$.

Beweis: Es sei $\{F\} := \langle A,B\rangle \cap s_{A,B}$ und $A' \in [A,Y{>} \setminus [A,Y]$. Ggf. nach einer Vertauschung von A und B sind (M,A,B), (M,A,F), (X,A,B), (Y,A',B) gemäß 11.62. positiv orientiert. Nach 12.29. ist $\angle^\circ(A,M,F) = \angle^\circ(A,X,B) = \angle^\circ(A',Y,B)$, und mit 33. folgt $90^\circ >$ $> \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle(A,M,B) = \sphericalangle(A,M,F) = \sphericalangle(A,X,B) = \sphericalangle(A',Y,B) \overset{26.}{=} 180^\circ - \sphericalangle(A,Y,B)$. □



37. *Anmerkung*. Sind $A, B \in \mathbb{C}$ mit $A \neq B$ und ist $\alpha \in]0,\pi[$, so kann man nach der Menge m aller Punkte $X \in \mathbb{C}\setminus\{A,B\}$ mit $\sphericalangle(A,X,B) = \alpha$ fragen. Ist $\alpha = 90^\circ$, so ist $m = k_{Th}\{A,B\}$. Ist $\alpha \neq 90^\circ$, so ist m nach 35. und 36. die Vereinigung zweier Kreisbögen mit den Endpunkten A, B. Zwar ist m symmetrisch zu $\langle A,B\rangle$, aber im Falle $\alpha \neq 90^\circ$ ist m *kein Kreis*!

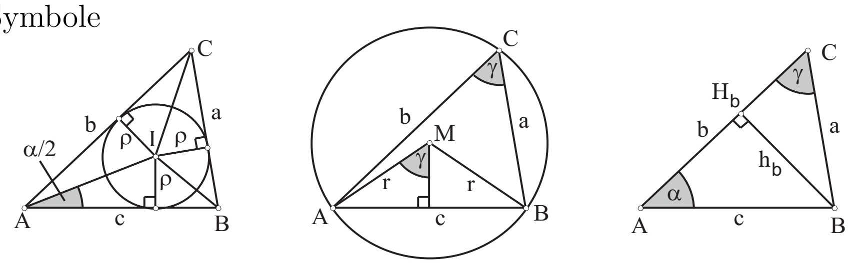
Wenn wir die gleiche Frage für $\mathbb{G}$–Winkel stellen, entsteht der Kreis
$k = \{A, B\} \cup \{X \in \mathbb{C}\backslash\{A, B\} \mid \angle^\circ(A, X, B) = \alpha\}$.

Damit erkennen wir nun, daß der Randwinkelsatz für verschiedene Winkelbegriffe eine unterschiedliche Qualität aufweist und daß er für $\mathbb{G}$–Winkel definitiv einfacher und damit besser handhabbar ist als in Verbindung mit gewöhnlichen Winkeln.

In Anbetracht dessen, daß der Randwinkelsatz zu den wichtigsten Sätzen der Elementargeometrie gehört – selbst bei Gebrauch gewöhnlicher Winkel – , wird hier eine gewisse Überlegenheit der $\mathbb{G}$–Winkel sichtbar. Gleichwohl gibt es Bereiche in der Elementargeometrie, in denen man auf gewöhnliche Winkel nicht verzichten kann. Deshalb haben beide Winkelbegriffe ihre Daseinsberechtigung.

I. Metrische Formeln für Dreiecke und Vierecke

38. Gegeben sei ein Dreieck $\{A, B, C\}$. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus 19. und wählen die Symbole



ϱ für den **Inkreisradius**, r für den **Umkreisradius** sowie $s := \frac{1}{2}(a + b + c)$ für den **halben Dreiecksumfang**.

Ist I der Mittelpunkt des Inkreises, so hat die **Dreiecksfläche** $F := F(A, B, C)$ den Wert $F(A, B, I) + F(B, C, I) + F(C, A, I) = \frac{1}{2}c\varrho + \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho = s\varrho$, d.h. es gilt

(i) $\boxed{F = s \cdot \varrho}$.

Andererseits ist $F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$ für $h_b := |B - H_b|$ (vgl. 11.56. und 12.20), und mit 22. folgt $h_b = a \cdot \sin\gamma$, also

(ii) $\boxed{F = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\gamma}$. Entsprechend gilt (iii) $\boxed{F = \frac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin\beta} \wedge \boxed{F = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha}$.

Nach dem Mittenwinkelsatz 36. und nach 22. ist $\sin\gamma = (c/2)/r$, und mit 21. folgt

(iv) $\boxed{\dfrac{a}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r}$, (v) $\boxed{F = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4r}}$, (vi) $\boxed{4s \cdot \varrho \cdot r = a \cdot b \cdot c}$.

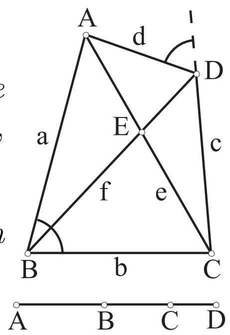
Nun ist $4s \cdot (s - a) = ((b + c) + a)((b + c) - a) = 2bc + b^2 + c^2 - a^2 \overset{20.}{=} 2bc(1 + \cos\alpha)$ und $4(s - b) \cdot (s - c) = (a - (b - c)) \cdot (a + (b - c)) = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) \overset{20.}{=} 2bc(1 - \cos\alpha)$, also $16s(s{-}a)(s{-}b)(s{-}c) = 4b^2c^2(1 - \cos^2\alpha) = 4b^2c^2\sin^2\alpha = 16F^2$.

Damit haben wir die Heronsche Formel

(vii) $\boxed{F = \sqrt{s \cdot (s{-}a) \cdot (s{-}b) \cdot (s{-}c)}}$

bewiesen, mit der sich die Fläche direkt aus den Seitenlängen bestimmen läßt, und mit (i), (v) folgt

(viii) $\boxed{\varrho^2 = (s{-}a){\cdot}(s{-}b){\cdot}(s{-}c)/s}$, (ix) $\boxed{r = a{\cdot}b{\cdot}c/\sqrt{16{\cdot}s{\cdot}(s{-}a){\cdot}(s{-}b){\cdot}(s{-}c)}}$.



Über Vierecke zeigen wir

39. **Satz** *des* PTOLEMAIOS. *Sind A, B, C, D vier verschiedene Punkte von $\mathbb{C}$ und ist $a := |A-B|,\ b := |B-C|,\ c := |C-D|,\ d := |D-A|,$ $e := |A-C|,\ f := |B-D|$, so gilt* $(*)$ $\boxed{a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f}$.

In $(*)$ liegt Gleichheit genau dann vor, wenn A, B, C, D konzyklisch oder kollinear sind mit

$$\sphericalangle(A, B, C) = 180°-\sphericalangle(A,D,C) \ \wedge\ <A, C> \cap\,]B, D[\, \neq \emptyset.$$

Beweis: Nach Anwendung einer Translation dürfen wir von $D = 0$ ausgehen.
Wir setzen $R := (A-B)\cdot C$ und $S := A\cdot(B-C)$. Dann ist $R+S = (A-C)\cdot B$, und mit 8.28. folgt $|R| + |S| \geq |R + S|$, also $(*)$.
Nach 10.7.(vii) ist $ac + bd = ef \ \Leftrightarrow\ |R| + |S| = |R + S| \ \Leftrightarrow\ S/R \in \mathbb{R}^*_+$ $(\diamond)$.
Für die gleichsinnige Ähnlichkeit $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : X \to A\cdot(X-B)/(A-B)$ gilt $\varphi(A)=A$, $\varphi(B)=0$ und $\varphi(C)=-S/(A-B)=(-S/R)\cdot C$. Deshalb ist $S/R \in \mathbb{R}^*_+ \Leftrightarrow \varphi(C) \in \mathbb{R}^*_- C$, und mit $(\diamond)$, 11.62., 11.73., 11.77., 12.31., 24. und 26. folgt die Behauptung. □

40. **Flächensatz.** *Ist (A, B, C, D) ein Viereck und existiert $E \in]A, C[\cap]B, D[$, so hat (A, B, C, D) die Fläche* $\boxed{F = \frac{1}{2}\cdot|A-C|\cdot|B-D| \cdot \sin\sphericalangle(A, E, B)}$.

Beweis: Ist $e_1{=}|A-E| \wedge e_2{=}|E-C| \wedge f_1{=}|B-E| \wedge f_1{=}|E-D| \wedge \varepsilon{=}\sphericalangle(A, E, B)$, so führen 4.(xi) und 38.(ii) auf $F{=}\frac{1}{2}(e_1\cdot f_1{+}e_1\cdot f_2{+}e_2\cdot f_1{+}e_2\cdot f_2)\cdot \sin\varepsilon{=}\frac{1}{2}(e_1{+}e_2)\cdot(f_1{+}f_2)\cdot \sin\varepsilon$. □

J. Winkel und Kongruenz im $\mathbb{R}^3$

Zum Abschluß soll nun noch erörtert werden, wie sich einige unserer Resultate vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen lassen.

Wir bezeichnen $E_1 := (1, 0, 0), E_2 := (0, 1, 0), E_3 := (0, 0, 1)$ als die **Einheitsvektoren** des $\mathbb{R}^3$ und erinnern daran, daß $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach 10.45. vermittels der Identifikation

$(*)$ $\boxed{x + iy = xE_1 + yE_2}$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

als Ebene des $\mathbb{R}^3$ betrachtet wird. Wieder sei $\mathbf{0} := (0, 0, 0)$.

41. Um geometrische Gebilde des $\mathbb{R}^3$ miteinander zu vergleichen, benötigen wir den Begriff der *Kongruenz*, und dieser wird zurückgeführt auf den Begriff der *Bewegung*:
Analog zum ebenen Fall wird eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als **distanztreu** oder als **Bewegung** des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, wenn die Bedingung

(i) $\boxed{|f(X) - f(Y)| = |X - Y| \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^3}$

erfüllt ist (vgl. 11.1.). Ist $\mathbb{B}_3$ die Menge aller Bewegungen des $\mathbb{R}^3$, so führt (i) direkt auf

(ii) $\boxed{f, g \in \mathbb{B}_3 \ \Rightarrow\ f \circ g,\ g \circ f \in \mathbb{B}_3}$.

Als wichtig erweist sich nun

42. **Fundamentalsatz**. *Die Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ sind die Kollineationen des Typs*

$(*)$ $\boxed{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to x \cdot A + y \cdot B + z \cdot C + D}$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3 \ \wedge\ |A| = |B| = |C| = 1 \ \wedge\ A\perp B \ \wedge\ B\perp C \ \wedge\ C\perp A$. Es gilt

$(\diamond)$ $\mathbb{B}_3(\circ)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis: 1) Nach 10.49. ist die durch $(*)$ definierte Abbildung f eine Kollineation des $\mathbb{R}^3$, denn nach 10.18.(i) gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$ mit $B \times C = \lambda A$, und dann ist $\det(A,B,C) \overset{10.35.(iv)}{=}$
$= A \circ (B \times C) = A \circ (\lambda A) = \lambda \neq 0$.
Ferner ist f auch eine Bewegung, denn für $u, \ldots, z \in \mathbb{R}$ gilt
$|f((x,y,z)) - f((u,v,w))|^2 = ((x-u)A + (y-v)B + (z-w)C) \circ ((x-u)A + (y-v)B + (z-w)C)$
$= (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = |(x,y,z) - (u,v,w)|^2$.
2) Die Kollineation f^{-1} (vgl. 10.47.) ist ebenfalls eine Bewegung, denn sind $X, Y \in \mathbb{R}^3$, so gibt es $U, V \in \mathbb{R}^3$ mit $X = f(U), Y = f(V)$, und es folgt
$|f^{-1}(X) - f^{-1}(Y)| = |U - V| = |f(U) - f(V)| = |X - Y|$.
3) Es sei $g \in \mathbb{B}_3$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $D{:=}g(\mathbf{0}), A{:=}g(E_1)-D, B{:=}g(E_2)-D, C{:=}g(E_3)-D$ und erhalten $|A| = |E_1 - \mathbf{0}| = 1,\ |B| = |E_2 - \mathbf{0}| = 1,\ 1 - 2A \circ B + 1 =$
$= (A-B) \circ (A-B) = |A-B|^2 = |E_1 - E_2|^2 = 2$, also $A \circ B = 0$ und damit $A \perp B$. Entsprechend gilt auch $|C| = 1 \ \wedge\ B \perp C \ \wedge\ C \perp A$. Für die hier durch g bestimmten Vektoren A, B, C, D betrachten wir nun die gemäß $(*)$ definierte Kollineation f. Wegen $f(\mathbf{0}) = D \ \wedge\ f(E_1) = A + D \ \wedge\ f(E_2) = B + D \ \wedge\ f(E_3) = C + D$ hat die Bewegung $f^{-1} \circ g$ (vgl. 2) und 41.(ii)) die Fixpunkte $\mathbf{0}, E_1, E_2, E_3$. Gäbe es einen Punkt $S \in \mathbb{R}^3$ mit $T := f^{-1} \circ g(S) \neq S$, so wären $\mathbf{0}, E_1, E_2, E_3$ Punkte der Ebene $m_{S,T}$ (vgl. 10.19.). Demnach ist $f^{-1} \circ g = id_{\mathbb{R}^3}$ und damit $g = f$.
4) Aus 1), 2), 3) und 41.(ii) folgt die Behauptung. $\square$

43. **Corollar** 1. *Jede Translation $\tau \in T_{\mathbb{R}^3}$ (vgl. 10.52.) ist eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$ mit* $\det \tau{=}1$. *Zu jedem $f \in \mathbb{B}_3$ gibt es ein $g \in \mathbb{B}_3$ und ein $\tau \in T_{\mathbb{R}^3}$ mit* $\boxed{g(\mathbf{0}){=}\mathbf{0}} \wedge \boxed{f = \tau \circ g}$.

Beweis: Wegen 42. und 10.54. gilt die erste Behauptung und wegen 42. und 10.53. dann auch die zweite. $\square$

44. **Corollar** 2. *Ist $A \in \mathbb{R}^3$, so ist $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \to -X + 2A$ eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$, genannt* **Punktspiegelung** *an A. Es gilt*
(i) $\widehat{A} \circ \widehat{A} = id_{\mathbb{R}^3} \ \wedge\ \widehat{A} = \widehat{A}^{-1} \ \wedge\ \det \widehat{A} = -1$.
(ii) A ist der einzige Fixpunkt von $\widehat{A}$.
(iii) Für $g \in \mathbb{G}_3$ gilt: $\widehat{A}(g) = g \ \Leftrightarrow\ g \ni A$.

Beweis: Nach 42. ist $\widehat{0} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : X \to -X$ eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$ mit $\det \widehat{0} = -1$, und nach 42., 43. ist dann auch $\widehat{A} \in \mathbb{B}_3$ mit $\det \widehat{A} = -1$. Mit $\widehat{A} \circ \widehat{A}(X) = X \ \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3$ folgt (i), und wegen $\frac{1}{2}(X + \widehat{A}(X)) = A \ \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3$ gilt (ii) und „ $\Leftarrow$ “ in (iii). Hätte $\widehat{A}$ weitere Fixgeraden, so hätte $\widehat{A}$ auch weitere Fixpunkte. $\square$

45. **Corollar** 3. *Jede Kollineation φ von $\mathbb{C}$ ist fortsetzbar zu einer Kollineation des $\mathbb{R}^3$. Jede Bewegung φ von $\mathbb{C}$ ist fortsetzbar zu einer Bewegung des $\mathbb{R}^3$.*

Beweis: Ist $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gemäß 9.30. durch $\varphi((x,y,0)) = x{\cdot}A + y{\cdot}B + D$ mit $A, B, D \in \mathbb{C}$ $\wedge\ \det(A,B) \neq 0$ gegeben, so ist $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \to x{\cdot}A + y{\cdot}B + z{\cdot}E_3 + D$ wegen $\det(A,B,E_3) = \det(A,B) \neq 0$ eine Kollineation des $\mathbb{R}^3$ mit $\psi|_{\mathbb{C}} = \varphi$ (vgl. 10.49.). Wenn φ eine Bewegung ist, haben wir $|A|{=}1 \ \wedge\ B \in \{iA, -iA\}$ (vgl. 11.15.), also $|B|{=}1{=}|E_3|$ $\wedge\ A \perp B \ \wedge\ B \perp E_3 \ \wedge\ E_3 \perp A$, und nach 42. ist ψ dann eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$. $\square$

46. Sind M, N Mengen von Objekten des $\mathbb{R}^3$, so heißen diese **kongruent**, wenn es ein $f \in \mathbb{B}_3$ mit $f(M) = N$ gibt. Ebenso heißen zwei n–tupel $(A_1, \ldots, A_n), (B_1, \ldots, B_n)$ von Punkten des $\mathbb{R}^3$ **kongruent**, wenn es ein $f \in \mathbb{B}_3$ mit $f(A_i) = B_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gibt ($n \in \mathbb{N}$).

Mit diesen Bezeichnungen folgt

47. **Satz**. *Ist ε eine beliebige Ebene des $\mathbb{R}^3$, so gilt:*

(i) *Die Ebene ε ist kongruent zur Ebene $\mathbb{C}$.*

(ii) *Es gibt genau eine Bewegung $\widetilde{\varepsilon} \in \mathbb{B}_3$ mit ε als Fixpunktmenge. Diese wird die* **Ebenenspiegelung an** *ε genannt.*

(iii) *Es ist $\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon} = id_{\mathbb{R}^3}$ und $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}^{-1}$.*

(iv) *Ist $X \in \mathbb{R}^3 \backslash \varepsilon$, so ist $\varepsilon = m_{X,\widetilde{\varepsilon}(X)}$.*

(v) *Ist $X \in \mathbb{R}^3 \backslash \varepsilon$ und ist F der Fußpunkt des Lotes von X auf ε, so ist $\widetilde{\varepsilon}(X) = \widehat{F}(X)$.*

(vi) *Sind $X, Y \in \mathbb{R}^3$ mit $X \neq Y$ und ist $\delta := m_{X,Y}$, so ist $\widetilde{\delta}(X) = Y$.*

(vii) *Es ist $\widetilde{\alpha(\varepsilon)} = \alpha \circ \widetilde{\varepsilon} \circ \alpha^{-1} \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{B}_3$.*

(viii) *Es ist* $\det \widetilde{\varepsilon} = -1$.

Beweis: 1) Nach 10.17., 10.18. und 10.21. und wegen $\big||X|^{-1} \cdot X\big| = 1 \ \ \forall\, X \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ gibt es $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ mit $\varepsilon = D + \mathbb{R}A + \mathbb{R}B \ \wedge \ A \perp B \ \wedge \ B \perp C \ \wedge \ C \perp A \ \wedge \ |A| = |B| = |C| = 1$. Ist f wie in 42.$(*)$ definiert, so folgt $f(\mathbb{C}) = f(\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2) = \varepsilon$. Damit ist (i) gezeigt.
2) Die Kollineation $\gamma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \to (x, y, -z)$ ist gemäß 42. eine Bewegung, und es gilt $\gamma = \gamma^{-1}$ sowie $\det \gamma = -1$. Überdies ist $\mathbb{C}$ die Fixpunktmenge von γ. Nach 42. und 11.43. ist $\widetilde{\varepsilon} := f \circ \gamma \circ f^{-1}$ dann eine Bewegung mit der Fixpunktmenge ε, und nach 10.55. ist $\det \widetilde{\varepsilon} = -1$. Offenbar gilt auch $\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon} = id_{\mathbb{R}^3}$, also $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}^{-1}$.
3) Es sei $\beta \in \mathbb{B}_3$ mit ε als Fixpunktmenge, und es sei $X \in \mathbb{R}^3 \backslash \varepsilon$. Dann ist $Y := \beta(X) \neq X$, und gemäß 10.19. ist $\varepsilon \subseteq m_{X,Y}$, also $\varepsilon = m_{X,Y}$. Ist nun F der Fußpunkt des Lotes von X auf ε (vgl. 10.43.), so führen 10.19.(iii) und 10.41.(iii) auf $F = \frac{1}{2}(X + Y)$, also auf $Y = 2F - X \overset{44.}{=} \widehat{F}(X)$. Demnach ist Y durch X und ε festgelegt, und wir erhalten $\beta = \widetilde{\varepsilon}$ sowie (v). Insgesamt sind (ii)–(vi) und (viii) hiermit bewiesen, und mit (ii) folgt (vii), da $\widetilde{\alpha(\varepsilon)}$ und $\alpha \circ \widetilde{\varepsilon} \circ \alpha^{-1}$ Bewegungen mit der gleichen Fixpunktmenge $\alpha(\varepsilon)$ sind (vgl. 11.43.). $\square$

48. *Anmerkung*. Aus 47.(i) geht hervor, daß in allen Ebenen des $\mathbb{R}^3$ die gleichen geometrischen Verhältnisse vorliegen – wie wir es anschaulich erwarten.

49. **Corollar** 1. *Ist $\alpha \in \mathbb{B}_3 \backslash \{id_{\mathbb{R}^3}\}$ mit* $\det \alpha > 0$ *und besitzt α wenigstens einen Fixpunkt, so gilt:*

(i) *Die Fixpunktmenge von α ist eine Gerade g, und α heißt* **Drehung um** *g.*

(ii) *Es gibt $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{E}_3$ mit $\alpha = \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \widetilde{\varepsilon}_2 \ \wedge \ g = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$.*

(iii) *Es ist* $\det \alpha = 1$.

Beweis: Es sei $F \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(F) = F$. Wegen $\alpha \neq id_{\mathbb{R}^3}$ gibt es ein $F' \in \mathbb{R}^3 \backslash \{F\}$ mit $\alpha(F') \neq F'$, und dann ist $F \in \varepsilon_1 := m_{F',\alpha(F')}$, also $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha(F) = F$. Nach 47.(vi) gilt auch $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha(F') = F'$ und damit $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha(U) = U \ \ \forall\, U \in \langle F, F' \rangle$ gemäß 11.19.. Wäre jetzt $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha = id_{\mathbb{R}^3}$, so wäre $\det \alpha = \det \varepsilon < 0$. Also gibt es ein $F'' \in \mathbb{R}^3 \backslash \langle F, F' \rangle$ mit $E := \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha(F'') \neq F''$, und für $\varepsilon_2 := m_{E,F''}$ folgt $\langle F, F' \rangle \subseteq \varepsilon_2$ sowie $\widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha(X) = X \ \ \forall\, X \in \langle F, F' \rangle \cup \{F''\}$ (vgl. 47.(vi)). Mit 11.19. erhalten wir nun $\widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha = id_{\mathbb{R}^3}$, denn andernfalls wäre $\widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha$ eine Ebenenspiegelung mit Determinante -1 gemäß 47.(viii), während doch $\det(\widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \alpha) > 0$ ist. Damit ist $\alpha = \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \widetilde{\varepsilon}_2$ und $\det \alpha = (-1)^2 = 1$ gezeigt. Wegen $\alpha \neq id_{\mathbb{R}^3}$ ist $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, und wegen $F \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ ist dann $g := \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \in \mathbb{G}_3$. Es folgt $\alpha(Y) = Y \ \ \forall\, Y \in g$, und weitere Fixpunkte hat α nach 47.(viii) und 11.19. nicht wegen $\det \alpha > 0 \ \wedge \ \alpha \neq id_{\mathbb{R}^3}$. $\square$

50. **Corollar 2**. *Ist β eine Bewegung mit* $\det\beta < 0$, *aber keine Ebenenspiegelung, und besitzt β wenigstens einen Fixpunkt F, so gilt:*

(i) Es gibt eine Ebene ε und eine Drehung α um eine Gerade g mit $\beta = \widetilde{\varepsilon} \circ \alpha \wedge \varepsilon \perp g \wedge \varepsilon \cap g = \{F\}$. Man nennt β eine **Drehspiegelung um** *g mit dem* **Spiegel** *ε.*

(ii) Die Fixpunktmenge von β ist $\{F\}$, und überdies gilt $\beta(g) = g$ sowie $\beta(\varepsilon) = \varepsilon$.

(iii) Es ist $\det\beta = -1$.

Beweis: Es sei $\delta := \widehat{F} \circ \beta$, also $\det\delta > 0$ (vgl. 44.(i)). Ist $\delta = id_{\mathbb{R}^3}$, so sei g eine beliebige Gerade durch F. Ist $\delta \neq id_{\mathbb{R}^3}$, so ist δ nach 49. wegen $\delta(F) = F$ eine Drehung um eine Gerade g mit $g \ni F$. In beiden Fällen sei $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ mit $\varepsilon \ni F \wedge \varepsilon \perp g$. Für $X \in g$ haben wir $\widetilde{\varepsilon} \circ \beta(X) = \widetilde{\varepsilon} \circ \widehat{F} \circ \delta(X) = \widetilde{\varepsilon} \circ \widehat{F}(X) \overset{47.(v)}{=} X$, und nach 49. ist $\widetilde{\varepsilon} \circ \beta$ dann wegen $\det(\widetilde{\varepsilon} \circ \beta) > 0$ und wegen $\beta \neq \widetilde{\varepsilon}$ eine Drehung α mit der Fixpunktmenge g. Es folgt $\beta = \widetilde{\varepsilon} \circ \alpha$ mit $\det\beta = -1$. Für $A \in g \backslash \{F\}$ ist $A \neq \widehat{F}(A) = \widetilde{\varepsilon}(A) = \beta(A) \in g$ sowie $\varepsilon \overset{47.(iv)}{=} m_{A,\widetilde{\varepsilon}(A)}$, und mithin gilt $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\widetilde{\varepsilon}(g) = g$, also $\beta(\varepsilon) = \varepsilon$ und $\beta(g) = g$. Ist $\varepsilon' \in \mathbb{E}_3$ mit $\varepsilon' \| \varepsilon \wedge \varepsilon' \cap g = \{B\}$, so ist $\beta(\varepsilon') \in E_3$ mit $\beta(\varepsilon') \| \varepsilon \wedge \beta(\varepsilon') \cap g = \{\beta(B)\} = \{\widetilde{\varepsilon}(B)\}$, also mit $\varepsilon' \cap \beta(\varepsilon') = \emptyset$ im Falle $B \notin \varepsilon$. Deshalb liegt jeder Fixpunkt von β in ε. Da α in ε nur den Fixpunkt F hat, ist F der einzige Fixpunkt von β. $\square$

51. **Corollar 3**. *Jede Bewegung des $\mathbb{R}^3$ ist ein Produkt von drei oder vier Ebenenspiegelungen und hat die Determinante -1 oder $+1$.*

Beweis: 1) Für $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ ist $\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon} = id_{\mathbb{R}^3} = \widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\varepsilon}$.
2) Ist $f \in \mathbb{B}_3 \backslash \{id_{\mathbb{R}^3}\}$, so gibt es ein $X \in \mathbb{R}^3$ mit $X \neq f(X)$, und für $\varepsilon_1 := m_{X,f(X)}$ folgt $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ f(X) = X$ gemäß 47.(vi). Nach 1), 47.(ii), 49. und 50. gibt es nun $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \mathbb{E}_3$ mit $\widetilde{\varepsilon}_1 \circ f \in \{\widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_3,\ \widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_3 \circ \widetilde{\varepsilon}_4\}$, also mit $f \in \{\widetilde{\varepsilon}_1 \circ \widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_3,\ \widetilde{\varepsilon}_1 \circ \widetilde{\varepsilon}_2 \circ \widetilde{\varepsilon}_3 \circ \widetilde{\varepsilon}_4\}$, und wegen 47.(viii) und 10.55. ist dann $\det f \in \{-1, 1\}$. $\square$

52. Jede Menge des Typs $A + \mathbb{R}_+ B := \{A + \lambda B \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ mit $A, B \in \mathbb{R}^3 \wedge B \neq 0$ wird **Strahl** oder **Halbgerade** des $\mathbb{R}^3$ mit dem **Scheitel** A und dem **Richtungsvektor** B genannt (vgl. 9.9.). Nach 10.9. und 10.10. ist jeder Strahl Teilmenge einer Geraden des $\mathbb{R}^3$, und wegen 10.57.(∗) werden Strahlen durch Kollineationen stets auf Strahlen abgebildet.

Sind nun zwei Strahlen $g^+ := A + \mathbb{R}_+ B$ und $h^+ := A + \mathbb{R}_+ C$ mit $A \in \mathbb{R}^3 \wedge B, C \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ gegeben, so wird $\{g^+, h^+\}$ als ein **Winkel** mit dem **Scheitel** A und den **Schenkeln** g^+, h^+ bezeichnet, und

(i) $$\boxed{\sphericalangle\{g^+, h^+\} := \arccos \frac{B \circ C}{|B| \cdot |C|}}$$

heißt das **Bogenmaß** von $\{g^+, h^+\}$.

Wie in 18. erkennt man, daß $\boxed{\alpha := \sphericalangle\{g^+, h^+\}}$ eine wohlbestimmte Zahl des Intervalls $[0, \pi]$ ist, die sich gemäß 18.(ii) in das entsprechende Gradmaß aus dem Intervall $[0°, 180°]$ umrechnen läßt, und daß

(ii) $$\boxed{B \circ C = |B| \cdot |C| \cdot \cos\alpha}$$

gilt. Wegen $|B - C|^2 = (B - C) \circ (B - C) = |B|^2 + |C|^2 - 2B \circ C = |B|^2 + |C|^2 - 2|B| \cdot |C| \cdot \cos\alpha$ ist α durch die Seitenlängen des Dreiecks $\{A, A + B, A + C\}$ festgelegt, und mithin gilt

(iii) *Jede Bewegung des $\mathbb{R}^3$ ist winkelmaßtreu (vgl. 24.).*

Insbesondere bedeutet dies

(iv) *Jede Bewegung des* $\mathbb{R}^3$ *ist orthogonalitätstreu.*

Da die in 18. für $\mathbb{C}$ eingeführte Winkelmessung durch (i) auf den $\mathbb{R}^3$ übertragen wird, folgt nun mit 47.(i) und 10.7., daß die Aussagen in 20.−23. und in 25.−31. für *jede* Ebene des $\mathbb{R}^3$ gelten, wenn man die Bezeichnungen aus 23., 25. und 26. für den $\mathbb{R}^3$ übernimmt.

Ergänzend zeigen wir

53. **Erster Kongruenzsatz für den** $\mathbb{R}^3$. *Zwei geordnete Dreiecke* (A, B, C), (A', B', C') *des* $\mathbb{R}^3$ *sind genau dann kongruent, wenn (wenigstens) eine der Bedingungen (SSS), (SWS), (WSW), (SSW) aus 31. erfüllt ist.*

Beweis: Nach 47.(i) gibt es $f, g \in \mathbb{B}_3$ mit $f(\langle A, B, C\rangle) = \mathbb{C} = g(\langle A', B', C'\rangle)$, und nach 31., 45. und 52. existiert genau dann eine Bewegung $h \in \mathbb{B}_3$ mit $h \circ f(A) = g(A') \ \wedge\ h \circ f(B) = = g(B') \ \wedge\ h \circ f(C) = g(C')$, wenn (wenigstens) eine der Bedingungen (SSS), (SWS), (WSW), (SSW) gültig ist. □

54. **Corollar**. *Zwei Winkel* $\{g^+, h^+\}$, $\{r^+, s^+\}$ *des* $\mathbb{R}^3$ *sind genau dann kongruent, wenn sie die gleiche Größe haben.*

Beweis: Es gibt eindeutig bestimmte Punkte $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{R}^3$ mit $g^+ = [A, B\rangle \ \wedge$ $h^+ = [A, C\rangle \wedge r^+ = [A', B'\rangle \wedge s^+ = [A', C'\rangle \wedge |A-B| = |A-C| = |A'-B'| = |A'-C'| = 1$. Sind A, B, C und A', B', C' jeweils nichtkollinear, so folgt die Behauptung aus 53. mit (SWS). Dies impliziert nun mit 10.17., daß je zwei Strahlen des $\mathbb{R}^3$ kongruent sind, und deshalb gilt die Behauptung auch für Nullwinkel und für gestreckte Winkel. □

Damit gelangen wir zu

55. **Satz über Abtragbarkeit von Winkeln**. *Ist* $\varepsilon \in \mathbb{E}_3$ *und sind* $A, B \in \varepsilon$ *mit* $A \neq B$, *ist außerdem* $\alpha \in]0, \pi[$ *vorgegeben, so gibt es in* ε *genau zwei Strahlen* $[A, C\rangle, [A, D\rangle$ *mit* $\sphericalangle(B, A, C) = \sphericalangle(B, A, D) = \alpha$.

Beweis: Wegen 47.(i) und 54. dürfen wir o.B.d.A. von $\varepsilon = \mathbb{C} \wedge A = 0 \wedge B \in \mathbb{R}_+^*$ ausgehen. Setzen wir nun $C := e^{i\alpha}$ und $D := e^{-i\alpha}$, so haben $[A, C\rangle$ und $[A, D\rangle$ die gewünschten Eigenschaften. Ist $t \in]-\pi, \pi[$ mit $\sphericalangle(B, A, e^{it}) = \alpha$, so führt 52.(ii) auf $\cos t = \cos \alpha$, und mit 5. folgt $t \in \{\alpha, -\alpha\}$. Mithin ist die Behauptung gültig. □

Abschließend zeigen wir

56. **Zweiter Kongruenzsatz für den** $\mathbb{R}^3$. *Zwei geordnete Tetraeder* (A, B, C, D), (A', B', C', D') *des* $\mathbb{R}^3$ *sind genau dann kongruent, wenn*

   $(*)$ $\boxed{|X - Y| = |X' - Y'|}$ $\quad \forall\, X, Y \in \{A, B, C, D\}$ *gilt.*

Beweis: 1) Es gelte $(*)$. Nach 53. bzgl. (SSS) gibt es ein $f \in \mathbb{B}_3$ mit $f(A)=A' \ \wedge\ f(B)=B'$ $\wedge\ f(C) = C'$. Ist $f(D) = D'$, so liegt Kongruenz vor. Ist $D'' := f(D) \neq D'$, so sind $A', B', C' \in m_{D',D''} =: \varepsilon$, und nach 47.(vi) sind (A, B, C, D) und (A', B', C', D') dann vermittels $\widetilde{\varepsilon} \circ f$ kongruent.
2) Sind die Tetraeder kongruent, so folgt $(*)$ aus 41.(i). □

* * *

17. Anhang

Im folgenden gehen wir auf fünf Einzelthemen ein, die neben vielem anderen in den Übungen zu den Vorlesungen behandelt worden sind.

A. Goldener Schnitt und Fibonacci-Zahlen

Sind A,B zwei verschiedene Punkte der Anschauungsebene $\mathbb{C}$ und ist $C \in [A,B] \setminus \{A,B\}$, so sagt man, C teilt die Strecke $[A,B]$ im **goldenen Schnitt**, wenn für $a = |A-C|$ und $b = |B-C|$ die Bedingung

(1) $\boxed{(a+b)/b = b/a}$

erfüllt ist, wenn sich also die Gesamtstrecke zum größeren Streckenabschnitt so verhält wie der größere Streckenabschnitt zum kleineren.

Die Zahl $\boxed{\Phi := b/a}$ wird die **große goldene Schnittzahl** genannt, und $\boxed{\varphi := \Phi^{-1}}$ heißt **kleine goldene Schnittzahl**.

Aus (1) folgt $\varphi + 1 = a/b + 1 = (a+b)/b = b/a = \Phi > 1$, also $1 > \varphi > 0$ und

(2) $\boxed{\varphi + 1 = \Phi} \;\wedge\; \boxed{\varphi^2 + \varphi = 1} \;\wedge\; \boxed{1 + \Phi = \Phi^2}$.

Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ hat die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Wegen (2) und $\Phi > 1$ gilt dann

(3) $\boxed{\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = 1{,}6180339887498948482045868343656...} \;\wedge\; \boxed{\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$.

(4) Die Lösungen der Gleichung $\boxed{x^2 = x+1}$ sind Φ und $-\varphi$. Es ist $\boxed{\varphi + \Phi = \sqrt{5}}$.

Seit der Antike wird die Proportion des goldenen Schnitts als ästhetisch besonders ansprechend empfunden, und so kann man bis heute in Kunstwerken und Bauwerken immer wieder eine Realisierung dieses Verhältnisses vorfinden. Zur vertiefenden Lektüre wird das schöne Buch „Der goldene Schnitt“ von A. Beutelspacher und B. Petri empfohlen.

Durch $\boxed{f_0 := 0, f_1 := 1}$ und $\boxed{f_{n+1} := f_{n-1} + f_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist rekursiv eine Folge $f_0, f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...$ natürlicher Zahlen festgelegt, genannt **Folge der Fibonacci-Zahlen**.

Diese ist eine der berühmtesten Zahlenfolgen der Mathematik. Z. B. ist

$f_1 = 1$,	$f_9 = 34$,	$f_{17} = 1597$,	$f_{25} = 75025$,	$f_{33} = 3524578$,
$f_2 = 1$,	$f_{10} = 55$,	$f_{18} = 2584$,	$f_{26} = 121393$,	$f_{34} = 5702887$,
$f_3 = 2$,	$f_{11} = 89$,	$f_{19} = 4181$,	$f_{27} = 196418$,	$f_{35} = 9227465$,
$f_4 = 3$,	$f_{12} = 144$,	$f_{20} = 6765$,	$f_{28} = 317811$,	$f_{36} = 14930352$,
$f_5 = 5$,	$f_{13} = 233$,	$f_{21} = 10946$,	$f_{29} = 514229$,	$f_{37} = 24157817$,
$f_6 = 8$,	$f_{14} = 377$,	$f_{22} = 17711$,	$f_{30} = 832040$,	$f_{38} = 39088169$,
$f_7 = 13$,	$f_{15} = 610$,	$f_{23} = 28657$,	$f_{31} = 1346269$,	$f_{39} = 63245986$,
$f_8 = 21$,	$f_{16} = 987$,	$f_{24} = 46368$,	$f_{32} = 2178309$,	$f_{40} = 102334155$.

Wir zeigen

(5) Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = x{+}1$, so gilt $\boxed{x^n = f_{n-1} + x \cdot f_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Denn dies gilt für $n = 1$, und aus $x^n = f_{n-1} + x \cdot f_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt $x^{n+1} = xf_{n-1} + x^2 f_n$ $= xf_{n-1} + (x+1)f_n = f_n + xf_{n+1}$. Mit (4) und (5) erhalten wir

(6) $\boxed{\Phi^{\,n} = f_{n-1} + \Phi \cdot f_n} \quad \wedge \quad \boxed{(-\varphi)^{\,n} = f_{n-1} - \varphi \cdot f_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

also $\Phi^{\,n} - (-\varphi)^n = f_n \cdot (\varphi + \Phi) = f_n \cdot \sqrt{5}$ und damit

(7) $\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\Phi^{\,n} - (-\varphi)^n)}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ **(Formel von Binet)**.

Mit (7) haben wir eine genaue Brechnungsformel für Fibonacci-Zahlen. Dies ist insofern staunenswert, als hier natürliche Zahlen durch irrationale Zahlen bestimmt werden.

Wegen $0 < \varphi^n \le \varphi < 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit (7) die Abschätzung

(8) $\boxed{|f_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^{\,n}| = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^{\,n} < \frac{1}{\sqrt{5}}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

d.h. die Fibonacci-Zahlen wachsen wie die Potenzen von Φ.

Nun ist $\frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi = \frac{f_{n-1}+f_n}{f_n} - (1{+}\varphi) = \frac{f_{n-1}}{f_n} - \varphi \overset{(6)}{=} \frac{(-\varphi)^{\,n}}{f_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, und damit folgt

(9) $\boxed{|\frac{f_{n+1}}{f_n} - \Phi\,| = |\frac{f_{n-1}}{f_n} - \varphi\,| = \frac{\varphi^{\,n}}{f_n} < \frac{1}{f_n}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Nach (9) lassen sich Φ und φ durch Fibonacci-Zahlen hervorragend approximieren!

B. Die harmonische Reihe

Die sogenannte **harmonische Reihe** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ divergiert nach 14.6.; ihre n-te Partialsumme ist $\boxed{s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Die zugehörige **alternierende Reihe** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm ...$ konvergiert nach 14.30.; ihre n-te Partialsumme ist $\boxed{t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{\,k+1}}{k}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wegen $1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ und 14.28.(i) gilt $\frac{n+1}{n} < e^{1/n}$ und $e^{1/(n+1)} < \frac{n+1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, also

(1) $\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$ und (2) $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Mit $\ln n < \ln(n{+}1) = \ln(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n}) \overset{(1)}{<} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} = s_n$ folgt

(3) $\boxed{\ln n < s_n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Setzen wir nun $\boxed{a_n := s_n - \ln n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, so ist $0 < a_n$ gemäß (3), und wegen $a_n - a_{n+1} = \ln(n{+}1) - \ln n + s_n - s_{n+1} = \ln \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} \overset{(2)}{>} 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine monoton fallende Folge mit $\boxed{0 < a_n \le a_1 = 1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demnach wachsen die Werte s_n der harmonischen Reihe gerade so wie die Werte $\ln n$ der natürlichen Logarithmusfunktion, und nach 13.17. gibt es ein $a \in [\,0, 1]$ mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Die Zahl $\boxed{\mathrm{a} = 0{,}577215664901...}$ heißt EULER-MASCHERONI sche Konstante.

Durch Induktion erhalten wir

(4) $\boxed{s_{2n} - s_n = t_{2n}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Denn es ist $s_2 - s_1 = \frac{1}{2} = t_2$, und aus $s_{2n} - s_n = t_{2n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt
$s_{2(n+1)} - s_{n+1} = s_{2n} - s_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2(n+1)} = t_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = t_{2(n+1)}$.
Damit gilt

(5) $\boxed{a_{2n} - a_n + \ln 2 = t_{2n}}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

denn es ist $a_{2n} - a_n + \ln 2 = s_{2n} - \ln(2n) - s_n + \ln n + \ln 2 = s_{2n} - s_n \overset{(4)}{=} t_{2n}$.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind, führen 13.6. und 13.18. nun auf
$\ln 2 = \lim\limits_{n\to\infty} (a_{2n} - a_n + \ln 2) \overset{(5)}{=} \lim\limits_{n\to\infty} t_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$, und mithin gilt

(6) $\boxed{\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \ldots}$.

C. Nullstellen von Polynomen

Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und sind $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$, so wird

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

als *reelles Polynom vom Grad* n bezeichnet.
Die Abbildung $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 0$ wird *Nullpolynom vom Grad* -1 *genannt.*

a) Durch Induktion erhält man (1) $\boxed{x^k - x_1^k = (x - x_1) \cdot g_{k-1}(x)}$ $\forall\, x, x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$,
wobei g_{k-1} ein Polynom vom Grad $k-1$ ist.

b) Gegeben sei das reelle Polynom $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$, also mit $a_n \neq 0$, und es sei $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{f(x_1) = 0}$. Dann existiert ein reelles Polynom h_{n-1} vom Grad $n-1$ mit (2) $\boxed{f(x) = (x - x_1) \cdot h_{n-1}(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Denn ist $k \in \{1, \ldots, n\}$, so ist $a_k \cdot x^k - a_k \cdot x_1^k = a_k \cdot (x^k - x_1^k) \overset{(1)}{=} a_k \cdot (x - x_1) \cdot g_{k-1}(x)$ der k-te Summand der Differenz $f(x) - f(x_1)$, wobei g_{k-1} ein Polynom vom Grad $k-1$ ist. Dann ist $f(x) = f(x) - f(x_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x^k - x_1^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x^k - x_1^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (x - x_1) \cdot g_{k-1}(x) =$
$= (x - x_1) \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot g_{k-1}(x) = (x - x_1) \cdot h_{n-1}(x)$, wobei h_{n-1} (als Summe aus einem Polynom vom Grad $n-1$ und $n-1$ weiteren Polynomen vom Grad $\leq n-2$) ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

c) *Folgerung aus* b): Das Polynom f sei wie in b) gegeben, d.h. es gebe ein $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = 0$ und damit auch die Darstellung $f(x) = (x - x_1) \cdot h_{n-1}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Wenn nun ein $x_2 \in \mathbb{R}$ mit $h_{n-1}(x_2) = 0$ existiert, so gibt es nach b) eine Darstellung $h_{n-1}(x) =$
$= (x - x_2) \cdot h_{n-2}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, wobei h_{n-2} ein reelles Polynom vom Grad $n-2$ ist. Fährt man in dieser Weise so weit wie möglich fort, so entsteht eine Darstellung der Form

(3) $\boxed{f(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_r) \cdot h_{n-r}(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}}$

mit $r \in \{1, \ldots, n\} \wedge x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R} \wedge h_{n-r}(x) \neq 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$ wobei h_{n-r} ein reelles Polynom vom Grad $n-r$ ist.

d) Ist f ein Polynom vom Grad n mit $n \in \mathbb{N}_0$, so hat f höchstens n Nullstellen, d.h. es ist $|\{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x)=0 \,\}| \leq n$.

Denn wenn f keine Nullstelle hat (dies gilt insbesondere, wenn f den Grad Null hat), dann ist die Behauptung gültig. Andernfalls dürfen wir von der Darstellung c)(3) ausgehen; hier ist $r \leq n$ und $f(x) = (x{-}x_1)\cdot\ldots\cdot(x{-}x_r)\cdot h_{n-r}(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1,...,x_r\}$, wie behauptet.

e) Gegeben seien die Polynome $f_1(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $f_2(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und mit $a_k, b_k \in \mathbb{R} \;\; \forall\, k \in \{0,...,n\}$.
Wenn die Graphen von f_1 und f_2 mindestens $n{+}1$ verschiedene Punkte gemeinsam haben, dann gilt $\boxed{a_k = b_k}$ für $k = 0,...,n$ und damit insbesondere $\boxed{f_1 = f_2}$.

Zum Beweis betrachten wir $g := f_1{-}f_2$. Nach Voraussetzung hat g wenigstens $n{+}1$ verschiedene Nullstellen, und der Grad von g ist $\leq n$. Wäre $a_k \neq b_k$ für ein $k \in \{0,...,n\}$, so wäre der Grad von g nicht negativ, und g hätte nach d) höchstens n Nullstellen. Wegen dieses Widerspruchs ist $a_k = b_k \;\; \forall\, k \in \{0,...,n\}$ und damit $f_1 = f_2$.

D. Die Eulersche Darstellung der Zahl $\pi^2/6$

Nach L. Euler (1707 – 1783) hat die Reihe $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $\pi^2/6$, d.h. es ist

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots}\,.$$

Zum *Beweis nach J.–P. Delahaye* („$\pi-$die Story“, Seite 241) zeigen wir zunächst

Lemma. *Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $u_k := \cot \frac{k\pi}{2n{+}1}$ für $k = 1,...,n$, so gilt*

$$\boxed{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{2n^2{-}n}{3}.}$$

Beweis: Für $k = 1,...,n$ sei $t_k := \frac{k\pi}{2n{+}1}$. Für $1 \leq k < m \leq n$ gilt dann $0 < t_k < t_m < \pi/2$ und $u_k > u_m > 0$ (vgl.16.14.(ii)), d.h. es sind $u_1,...,u_n \in \mathbb{R}_+^*$ mit $|\{u_1,...,u_n\}| = n$.
Ist nun $w := -i \cdot u_k$ mit $k \in \{1,...,n\}$, so ist $w^2 = -u_k^2$, und es gilt

(1) $\quad (w{+}1)^{2n+1} = \left(-i \cdot \frac{\cos t_k}{\sin t_k}{+}1\right)^{2n+1} = \left(\frac{\cos t_k{+}i \cdot \sin t_k}{i \cdot \sin t_k}\right)^{2n+1} = \frac{e^{\,i t_k \cdot (2n+1)}}{i^{\,2n+1} \cdot (\sin t_k)^{2n+1}} \in i\mathbb{R}$

wegen $e^{\,i t_k \cdot (2n+1)} = e^{\,i\pi\cdot k} \in \{1,-1\}$ und $1/i^{\,2n+1} \in \{i,-i\}$

(vgl. 8.25., 14.24., 16.2. und 16.4.). Gemäß 3.16.($\diamond$) ist

$(w+1)^{2n+1} = \sum_{\nu=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{\nu} w^{2n+1-\nu}$, wobei $w^{2n+1-\nu}$ im Falle $2n{+}1{-}\nu \in 2\mathbb{N}$ reell und sonst imaginär ist. Wegen (1) ist $\operatorname{Re}[(w{+}1)^{2n+1}] = 0$, und folglich gilt

(2) $\quad \binom{2n+1}{1}(w^2)^n + \binom{2n+1}{3}(w^2)^{n-1} + \binom{2n+1}{5}(w^2)^{n-2} + \ldots + \binom{2n+1}{2n-1} w^2 + 1 = 0.$

Demnach ist $-u_k^2$ für jedes $k \in \{1,...,n\}$ eine Nullstelle des Polynoms

(3) $\quad f(x) := \binom{2n+1}{1} x^n + \binom{2n+1}{3} x^{n-1} + \binom{2n+1}{5} x^{n-2} + \ldots + \binom{2n+1}{2n-1} x + 1.$

Nach 2.24. ist $|\{-u_1^2, -u_2^2, ..., -u_n^2\}| = n$, und nach Anhang C. c) läßt sich $f(x)$ dann in der Form $f(x) = a \cdot (x + u_1^2) \cdot (x + u_2^2) \cdot \ldots \cdot (x + u_n^2)$ mit $a \in \mathbb{R}^*$ darstellen. Wenn man dieses Produkt ausmultipliziert, ergibt sich

(4) $f(x) = a \cdot x^n + a \cdot (u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2) \cdot x^{n-1} + p(x)$,

wobei $p(x)$ ein Polynom vom Grad $\leq n-2$ ist, und ein Koeffizientenvergleich zwischen (3) und (4) liefert nun gemäß Anhang C. e) die Gleichungen

(5) $a = \binom{2n+1}{1}$ und $a \cdot (u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2) = \binom{2n+1}{3}$.

Dies impliziert aber $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 = \frac{1}{a} \cdot \binom{2n+1}{3} = \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2n^2 - n}{3}$. □

Mit Hilfe des *Lemmas* ergibt sich der **Beweis** der EULERschen Darstellung wie folgt:

Ist $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, so gilt $t \cdot \cos t < \sin t < t$ gemäß 16.2.(xiv) – (xv), 16.3.(ii) und 16.7.. Mit 2.24. und 16.2.(iii) folgt $\cot^2 t < \frac{1}{t^2} < \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t} = \cot^2 t + 1$. Für $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ führt dies mit dem *Lemma* auf $\frac{2n^2-n}{3} = \sum_{k=1}^{n} \cot^2 t_k < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} < \sum_{k=1}^{n} (\cot^2 t_k + 1) = \frac{2n^2-n}{3} + n$, und durch Multiplikation mit $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$ ergibt sich (∗) $\pi^2 \cdot \frac{2n^2-n}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \pi^2 \cdot \frac{2n^2-n+3n}{3(2n+1)^2}$.

Für $n \to \infty$ streben die Faktoren von π^2 in (∗) gegen $\frac{1}{6}$. Mithin gilt die Behauptung. □

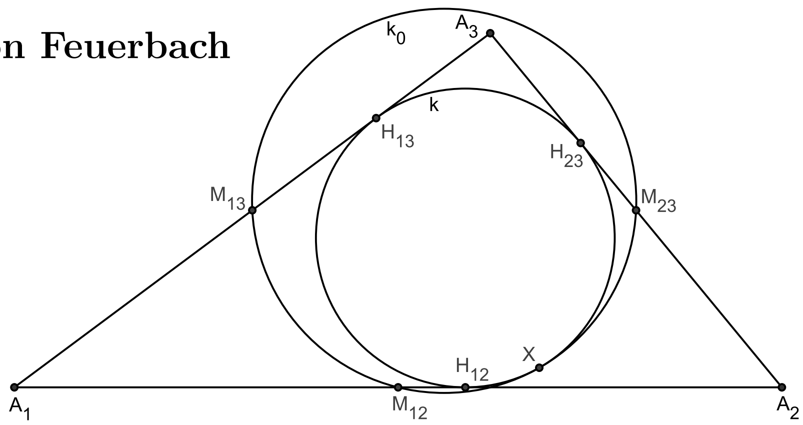
Anmerkung. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$. Dann führt die Eulersche Formel mit $\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \to \infty} (s_{2n} - \frac{1}{2^2} s_n)$ und $\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{2^2}\frac{\pi^2}{6} = \lim_{n \to \infty} (s_{2n} - \frac{2}{2^2} s_n)$

auf $$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + ...}$$

und $$\boxed{\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \pm ...}.$$

E. Der Berührsatz von Feuerbach

Nach K. W. FEUERBACH (1800 - 1834) gilt:
Der Seitenmittenkreis eines Dreiecks berührt stets die Berührkreise dieses Dreiecks (vgl. 12.20. und 12.28.).



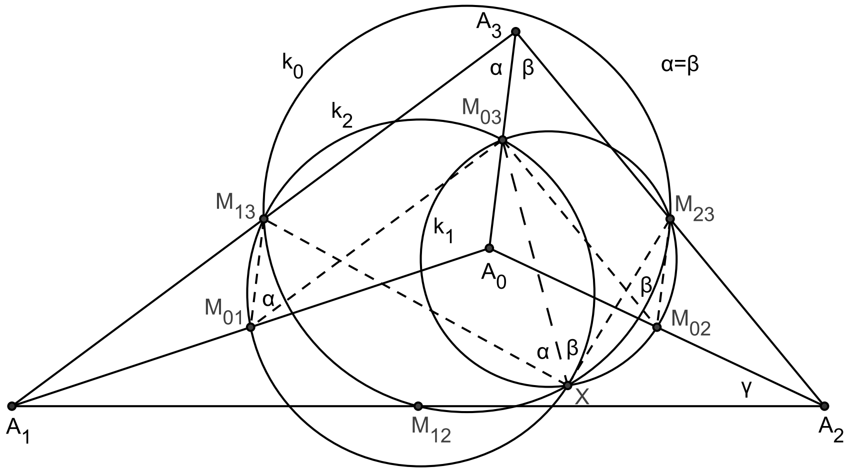
Vorbemerkung zum Beweis

Sind $X, Y, Z \in \mathbb{C}$ mit $X \neq Y \ \wedge \ Y \neq Z$, so sei $\angle XYZ := \angle(\langle X, Y \rangle, \langle Y, Z \rangle)$ (vgl. 11.67.). Ist k ein Kreis und gilt $X \in k \vee Y \in k$, so sei $\langle X, Y \rangle_k$ im Falle $X = Y$ die Tangente an k in X und sonst die Gerade $\langle X, Y \rangle$. Überdies setzen wir $\angle_k XYZ := \angle(\langle X, Y \rangle_k, \langle Y, Z \rangle_k)$ im Falle $X, Z \in k \vee Y \in k$.

Mit diesen Vereinbarungen lassen sich der Tangentenwinkelsatz 12.29. und der Randwinkelsatz 12.30. zusammenfassen zur Aussage

TR *Sind A, B, C Punkte eines Kreises k von $\mathbb{C}$ mit $|\{A, B, C\}| = 3$, so gilt:*
$\boxed{X \in k \;\Leftrightarrow\; \angle_k AXC = \angle ABC \qquad \forall\; X \in \mathbb{C}}$.

Das Symbol „$\overset{k}{=}$“ bedeute „Gleichheit aufgrund von **TR** bezüglich k“.



Figur F1

Beweis des Satzes von Feuerbach

Gegeben sei ein Dreieck $\{A_1, A_2, A_3\}$, und k sei ein Kreis mit Mittelpunkt A_0, der $\langle A_i, A_j\rangle$ in H_{ij} berührt für $i, j \underset{\neq}{\in} \{1, 2, 3\}$. Wir setzen $M_{ij} := \frac{1}{2}(A_i + A_j)$ für $i, j \underset{\neq}{\in} \{0, 1, 2, 3\}$.

Neben dem Seitenmittenkreis $k_0 := k(M_{12}, M_{23}, M_{13})$ betrachten wir die Hilfskreise $k_1 := = k(M_{23}, M_{02}, M_{03})$ und $k_2 := k(M_{13}, M_{01}, M_{03})$ (vgl. Figur F1).

Wegen $M_{03} \in k_1 \cap k_2$ können wir $X \in k_1 \cap k_2$ wählen mit $X \neq M_{03}$ im Falle $|k_1 \cap k_2| \geq 2$. Im 1. Beweisschritt werden wir $X \in k_0$ (Figur F1) und im 2. dann $X \in k$ (Figur F2) zeigen. Mit den zugehörigen Winkelbetrachtungen werden wir im 3. Schritt dann sehen, daß sich k_0 und k in X berühren:

1) a) Wegen $M_{ik} - M_{jk} = \frac{1}{2}(A_i - A_j)$ gilt $\langle M_{ik}, M_{jk}\rangle \parallel \langle A_i, A_j\rangle$ für $i, j, k \underset{\neq}{\in} \{0, 1, 2, 3\}$.

b) Um $X \in k_0$ zu zeigen, gehen wir wegen $M_{13}, M_{23} \in k_0$ von $X \neq M_{13}, M_{23}$ aus. Für $\alpha := \angle A_1A_3A_0$ führt a) auf $\alpha = \angle M_{03}M_{01}M_{13}$, und mit **TR** erhalten wir dann $\alpha \overset{k_2}{=} \angle_{k_2} M_{03}XM_{13}$. Ebenso ist $\beta := \angle A_0A_3A_2 = \angle M_{23}M_{02}M_{03} \overset{k_1}{=} \angle_{k_1} M_{23}XM_{03}$.

c) Aus b) folgt $\angle M_{23}XM_{13} = \beta \oplus \alpha$, denn es ist $\langle X, M_{03}\rangle_{k_1} = \langle X, M_{03}\rangle_{k_2}$ wegen $(X = M_{03} \Leftrightarrow k_1 \cap k_2 = \{M_{03}\})$. Nun ist aber auch $\angle M_{23}M_{12}M_{13} \overset{a)}{=} \angle A_1A_3A_2 = \beta \oplus \alpha$, und gemäß **TR** gilt dann $X \in k_0$.

d) Sind r_0, r_1 die Tangenten an k_0 bzw. k_1 in M_{23} und ist $\gamma := \angle A_0A_2A_1$, so ist
$\beta \oplus \alpha = \angle M_{23}M_{12}M_{13} \overset{k_0}{=} \angle(r_0, \langle M_{23}, M_{13}\rangle) \overset{a)}{=} \angle(r_0, \langle A_1, A_2\rangle)$ und
$\beta = \angle M_{23}M_{02}M_{03} \overset{k_1}{=} \angle(r_1, \langle M_{23}, M_{03}\rangle) \overset{a)}{=} \angle(r_1, \langle A_0, A_2\rangle)$, also
$\angle(r_0, r_1) = \angle(r_0, \langle A_1, A_2\rangle) \oplus \angle A_1A_2A_0 \oplus \angle(\langle A_0, A_2\rangle, r_1) = (\beta \oplus \alpha) \ominus \gamma \ominus \beta = \alpha \ominus \gamma$.

2) a) Um $X \in k$ zu zeigen - vgl. Figur F2 -, bemerken wir zunächst, daß 12.20. und 12.26. auf $k_1 \cap \langle A_2, A_3\rangle = \{M_{23}, H_{23}\}$ und auf $k_2 \cap \langle A_1, A_3\rangle = \{M_{13}, H_{13}\}$ führen, denn H_{23}, H_{13} sind die Fußpunkte der Lote von A_0 auf $\langle A_2, A_3\rangle$ bzw. $\langle A_1, A_3\rangle$.

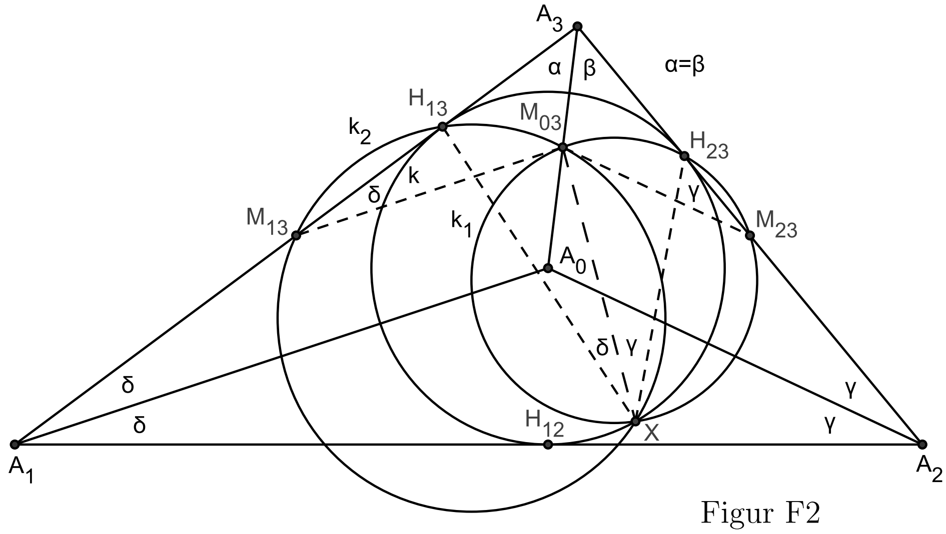
Da $\langle A_1, A_2\rangle, \langle A_2, A_3\rangle, \langle A_1, A_3\rangle$ Tangenten von k sind, erhalten wir mit 12.26. außerdem $\alpha = \beta \ \wedge \ \gamma = \angle A_3A_2A_0 \ \wedge \ \delta := \angle A_2A_1A_0 = \angle A_0A_1A_3$ sowie $\langle A_0, A_1\rangle \perp \langle H_{13}, H_{12}\rangle$ und $\langle A_0, A_2\rangle \perp \langle H_{12}, H_{23}\rangle$, also $\angle H_{23}H_{12}H_{13} = \angle A_2A_0A_1 = \angle A_0A_2A_1 \oplus \angle A_2A_1A_0 = \gamma \oplus \delta$.

b) Um $X \in k$ zu zeigen, gehen wir wegen $H_{13}, H_{23} \in k$ von $X \neq H_{13}, H_{23}$ aus. Mit 1) a) folgt $\gamma = \angle_{k_1} H_{23}M_{23}M_{03} \overset{k_1}{=} \angle_{k_1} H_{23}XM_{03}$ und $\delta = \angle_{k_2} M_{03}M_{13}H_{13} \overset{k_2}{=} \angle_{k_2} M_{03}XH_{13}$.

c) Aus b) ergibt sich $\angle H_{23}XH_{13} = \gamma \oplus \delta$, denn nach 1) c) ist $\langle X, M_{03}\rangle_{k_1} = \langle X, M_{03}\rangle_{k_2}$. Wegen a) und gemäß **TR** gilt dann $X \in k(H_{23}, H_{12}, H_{13}) = k$.

d) Sind s, s_1 die Tangenten an k bzw. k_1 in H_{23}, so ist $s = \langle A_2, A_3\rangle$, und nach 1) d) ist $\angle(r_1, s) = \angle(r_1, \langle A_0, A_2\rangle) \oplus \angle(\langle A_0, A_2\rangle, s) = \beta \ominus \gamma = \alpha \ominus \gamma$. Aus Symmetriegründen gilt dann $\angle(s, s_1) = \alpha \ominus \gamma$.

3) Sind t, t_0, t_1 die Tangenten an k bzw. k_0 bzw. k_1 in X, so führen 1) d) und 2) d) aus Symmetriegründen auf $\angle(t_1, t_0) = \alpha \ominus \gamma = \angle(t_1, t)$, und mithin ist $t_0 = t$. □



Figur F2

Anmerkungen

Die Beweisführung bezieht sich auf einen beliebigen Berührkreis eines beliebigen Dreiecks, also gleichermaßen auf den Inkreis wie auf die drei Ankreise dieses Dreiecks (vgl. 12.28.).

Der hier vorgelegte Beweis entsteht durch Spezialisierung von Erörterungen aus „Zwei 8-Kreise-Sätze für Vierecke“, erschienen in den „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg“, Band 18 (1999), 105 –117.

Andere Beweise verwenden die sog. „Spiegelung am Kreis“. Ein weiterer Beweis, der ohne dieses Hilfsmittel auskommt und der auch in nichteuklidischen Geomtrien gilt, findet sich z.B. in Mitt. Mat. Ges. Hamburg 17 (1998), 113 – 126.

Abkürzungen und Symbole §1 – §7

Abkürzungen und Symbole §8 – §12

Abkürzungen und Symbole §13 – §16

Grenzwerte:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 153, $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ 159

$\lim\limits_{x\in D, x\to a} f(x)$ 168

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 168

$a \sim D$ 168

e 165,166, π 167,181

Kongruenz:

$(SSS), ...$ 192,200

Funktionen:

$|f|$, $\overline{f}$ 172; b^x 177

Re f, Im f 172

ln 175, $\log_b x$ 177

cos, sin 179

tan, cot 183, 184

arccos, arcsin 186

arctan, arccot 186

$\widehat{A}$ 197, $\widetilde{\varepsilon}$ 198

Winkel:

$\mathbb{G}_0(\oplus)$ 131,193,194

$(r;s)$ 188

$\sphericalangle\{g^+, h^+\}$ 189,199

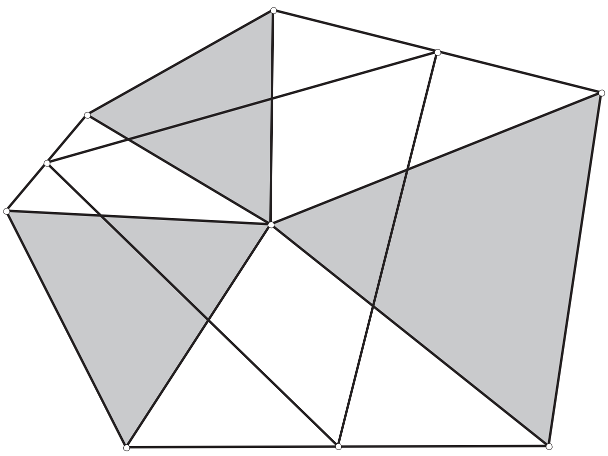
$\angle^\circ(g,h)$ 193

$+_\pi$ 193

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$: 191

Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$E_1, E_2, E_3, \mathbf{0}$ 196



Stichwortregister