

4. Elementare Kombinatorik

Rechenregeln für endliche Mengen

- **Erinnerung:** für endliche Mengen M ist $|M|$ die Anzahl der Elemente von M , auch **Kardinalität von M** genannt

$$|M| = n \Leftrightarrow M \text{ gleichmächtig wie } [n] = \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow \exists \text{ Bijektion } M \rightarrow [n]$$

- falls $A \cap B = \emptyset$ dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$ und im Allgemeinen für paarweise disjunkte endliche Mengen A_1, \dots, A_k gilt die **Additionsregel**

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + \dots + |A_k| = \sum_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

klar ✓

- für beliebige endliche Mengen A, B gilt $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ und im Allgemeinen für endliche Mengen A_1, \dots, A_k gilt die **Multiplikationsregel**

$$\left| \prod_{i=1}^k A_i \right| = |A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|.$$

Wieso? Beweis?

z. B. Induktion nach k und $|A_k|$ ✓

- $|A| = |B| \iff \exists \text{ Bijektion } A \rightarrow B$

Gleichheitsregel

Geordnete Teilmengen/Tupel

k -Tupel von n -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der k -Tupel einer n -elementigen Menge M gegeben durch

$$|M^k| \stackrel{\text{Multiplikationsregel}}{=} |M|^k = n^k.$$

Für $n = k = 0$ gilt $0^0 = 1$, gerechtfertigt durch den leeren 0-Tupel.

Bsp.: es gibt $2^3 = 8$ verschiedene **binäre Tripel** (3-Tupel mit Elementen aus $\{0, 1\}$)

$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$

k -Tupel von n -Mengen ohne Doppelungen/Wiederholungen

Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der k -Tupel einer n -elementigen Menge M , **in denen kein Element doppelt vorkommt**, gegeben durch

$$|M| \cdot (|M| - 1) \cdot \dots \cdot (|M| - (k - 1)) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1)) =: (n)_k.$$

Für die **fallende Faktorielle** $(n)_k$ schreibt man auch $n^{\underline{k}}$ (z. B. im Skript).

- wegen des leeren Produkts ist $(n)_0 = 1$ und tatsächlich ist das leere 0-Tupel das einzige Tupel, welches hier gezählt wird
- für $n < k$ gilt $(n)_k = 0$ und für $n = k$ erhält man die Anzahl der Auflistungen

Permutationen

Definition (Permutation)

Eine bijektive Abbildung $\pi: M \rightarrow M$ auf einer (abzählbaren) Menge M heißt **Permutation**.

Ist M eine endliche Menge $\{m_1, \dots, m_n\}$, wobei wir annehmen, dass die m_i paarweise verschieden sind, so kann man eine Permutation $\pi: M \rightarrow M$ darstellen durch

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ \pi(m_1) & \pi(m_2) & \dots & \pi(m_n) \end{pmatrix}.$$

Falls $M = [n]$, dann schreiben wir auch abkürzend nur die „untere Zeile“ $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ an Stelle von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$.

Bsp.: $\pi(1) = 2$, $\pi(2) = 4$, $\pi(3) = 3$ und $\pi(4) = 1$ definiert eine Permutation auf $[4]$ und wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (2, 4, 3, 1).$$

Fakultät

Definition (Fakultät)

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ heißt

$$n! := \prod_{i=1}^n i = (n)_n$$

Fakultät von n . Insbesondere ist $0! = 1$.

Bemerkungen

- Bsp.: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$
- Fakultät ist schnell wachsende Funktion auf \mathbb{N}_0 , z. B. $70! > 10^{100}$
- Anzahl Permutationen einer n -elementigen Menge M
 - = Anzahl Bijektion von M nach M
 - = Anzahl der n -Tupel von M ohne Doppelungen = $(n)_n = n!$
- $0! = 1$ entspricht der leeren Abbildung, die eine Bijektion auf \emptyset ist

Ungeordnete Teilmengen

k -elementige Teilmengen n -elementigen Mengen

Für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge M gegeben durch

$$|\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Für $k > n$ gibt es offensichtlich keine k -elementigen Teilmengen von M .

Insbesondere $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ und heißt **Binomialkoeffizient**.

Beweis: Sei M eine n -elementige Menge und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$.

- es gibt $(n)_k$ geordnete k -Tupel (k -elementige Teilmengen) mit Elementen aus M ohne Wiederholungen und es gilt

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- hierbei zählen wir jede k -elementige Teilmenge $A \subseteq M$ genau so oft, wie wir die Elemente von A anordnen können, also $|A|! = k!$ Mal

$$\Rightarrow |\{A \subseteq M : |A| = k\}| = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

□

Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

Satz

Für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1. **Beweis** (einsetzen und nachrechnen):

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$



Rekursive Identität der Binomialkoeffizienten

Satz

Für alle natürlichen Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n > k \geq 1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Beweis (kombinatorische Interpretation ausnutzen):

Sei M eine n -elementige Menge und $x \in M$ (existiert wegen $n \geq 2$).

■ die Menge der k -elementigen Teilmengen von M kann man aufspalten in die Mengen solcher Teilmengen,

■ die x nicht enthalten

davon gibt es $\binom{n-1}{k}$

■ die x enthalten

davon gibt es $\binom{n-1}{k-1}$

\Rightarrow

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Bemerkung:

■ rekursive Berechnung wegen vieler Doppelberechnungen nicht effizient

□

Binomischer Lehrsatz

Satz (Binomischer Lehrsatz)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell}.$$

Konsequenzen:

- für $x = y = 1$ folgt die Identität $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell}$
- für $n = 2$ folgen die **binomischen Formeln**

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{und} \quad (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

- für $n = 3$ gilt $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Beweis: $(x + y)^n = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$

Beweis (Induktion nach n)

- Induktionsanfang $n = 0$: klar, wegen $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$
- Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

✓

$$(x + y)^{n+1} \stackrel{\text{l.A.}}{=} (x + y) \cdot \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell$$

Es gilt

$$x \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell = x^{n+1} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell$$

sowie

$$y \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{n-\ell} y^{\ell+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\overbrace{n-(\ell-1)}^{=n+1-\ell}} y^\ell = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell-1} x^{n+1-\ell} y^\ell + y^{n+1}.$$

Mit $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell} + \binom{n}{\ell-1}$ folgt also

$$(x + y)^{n+1} = \underbrace{\binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0}_{=x^{n+1}} + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell + \underbrace{\binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1}}_{=y^{n+1}} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x^{n+1-\ell} y^\ell$$

□

Kugeln auf Gefäße aufteilen

Partitionen einer natürlichen Zahl

Für natürliche Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $\ell \in \mathbb{N}$ gibt es genau

$$\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1} = \binom{\ell + m - 1}{m}$$

Möglichkeiten, um m als Summe von ℓ natürlichen Zahlen $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ darzustellen, d. h. $|\{(m_1, \dots, m_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell : m_1 + \dots + m_\ell = m\}| = \binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$.

Interpretation: Verteile m ununterscheidbare Kugel auf ℓ unterscheidbare Gefäße
Gefäß i bekommt m_i Kugeln

Beweis: Betrachte m als Folge von m Einsen und für $i = 1, \dots, \ell - 1$ „trenne“ m_i von m_{i+1} durch das Einfügen einer Null. Z. B. für $m = 6$ und $\ell = 4$ kodiert

110111001

die Zerlegung

$$m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 0 \quad \text{und} \quad m_4 = 1.$$

Tatsächlich definiert dies eine Bijektion zwischen den Zerlegungen von m und den 0-1-Folgen der Länge $m + \ell - 1$ mit m Einsen. Eine solche 0-1-Folge ist bestimmt durch die Platzierung der Nullen und dafür gibt es $\binom{m + \ell - 1}{\ell - 1}$ Möglichkeiten. \square

Anagramme

Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen $\ell \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ und Buchstaben/Zeichen Z_1, \dots, Z_ℓ gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} =: \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$, für $i = 1, \dots, \ell$ jeweils m_i -Mal das Zeichen Z_i enthalten.

Insbesondere $\binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell} \in \mathbb{N}_0$ und heißt **Multinomialkoeffizient**.

Bemerkungen:

- Wörter, die aus einem Wort durch Vertauschung/Permutation der Buchstaben entstehen, nennt man **Anagramme**, z. B.

AMPEL LAMPE PALME oder ERLE LEER

- in dem Problem oben müssen die Wörter nicht unbedingt Sinn ergeben
- für $m_1 = \dots = m_\ell = 1$ ergibt jede Permutation ein anderes Anagramm

→ $\ell!$ „Anagramme“

Anagramme – Beweis

Zeichenketten mit vorgegebener Buchstabenverteilung

Für natürliche Zahlen $\ell \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ und Buchstaben/Zeichen Z_1, \dots, Z_ℓ gibt es genau

$$\frac{(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!}{\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)} = \binom{m_1 + \dots + m_\ell}{m_1, \dots, m_\ell}$$

verschiedene Zeichenketten der Länge $m := \sum_{i=1}^{\ell} m_i$, für $i = 1, \dots, \ell$ jeweils m_i -Mal das Zeichen Z_i enthalten.

Beweis

- ausgehend von der Zeichenkette beginnend mit m_1 Zeichen Z_1 , gefolgt von m_2 Zeichen Z_2 , hinzu m_ℓ Zeichen Z_ℓ , gibt es $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)!$ Permutationen dieser Zeichenkette
- allerdings ergeben Permutationen die gleiche Zeichenkette, wenn sie jeweils nur Zeichen vom gleich Typ vertauschen
- so gibt es für jede Permutation genau $\prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)$ Permutationen, die die gleiche Zeichenkette erzeugen (unabhängig kann man jeweils auf $m_i!$ Weisen die Zeichen vom Typ Z_i vertauschen)
- es gibt also nur $(\sum_{i=1}^{\ell} m_i)! / \prod_{i=1}^{\ell} (m_i!)$ Permutationen, die unterschiedliche Zeichenketten erzeugen □

Multinomialatz

- für $\ell = 2$ reduzieren **Multinomialkoeffizienten** zu Binomialkoeffizienten

$$\binom{m_1 + m_2}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)!}{m_1! m_2!} = \binom{m_1 + m_2}{m_1, m_2} = \binom{m_1 + m_2}{m_2}$$

- der Multinomialatz erweitert dementsprechend den binomischen Lehrsatz

Satz (Multinomialatz)

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_\ell)^n &= \left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i \right)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} x_i^{n_i} \\ &= \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle ℓ -Tupel $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{N}_0^\ell$ mit $\sum_{i=1}^{\ell} n_i = n$ läuft.

Multinomialsatz – Beweis

Satz (Multinomialsatz)

Seien $\ell \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_\ell \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_\ell = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_\ell} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}.$$

Beweis: Wir können

$$(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_\ell) \cdot \dots \cdot (x_1 + \dots + x_\ell)}_{n \text{ Faktoren}}$$

durch Ausmultiplizieren berechnen. Für $n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 + \dots + n_\ell = n$ zählen wir, wie oft das Produkt $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ beim Ausmultiplizieren auftritt. Beim Ausmultiplizieren wählen wir aus jedem der n Faktoren $(x_1 + \dots + x_\ell)$ eine Variable aus. Wir wählen also eine Zeichenkette der Länge n aus den Zeichen x_1, \dots, x_ℓ . Um das Produkt $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$ zu erhalten, muss in der Zeichenkette, die wir auswählen, die Variable x_1 genau n_1 -mal auftreten, die Variable x_2 n_2 -mal und so weiter. Wir wissen bereits (siehe Anagramme), dass es genau $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell}$ solche Zeichenketten gibt. Damit ist der Koeffizient vor $x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{n_\ell}$, der sich beim Ausmultiplizieren von $(x_1 + \dots + x_\ell)^n$ ergibt, der Multinomialkoeffizient $\binom{n}{n_1, \dots, n_\ell}$. \square

Ziehen von Elementen

Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

- ziehen **mit** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

???

Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge

Satz

Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es genau $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten, k Elemente mit Zurücklegen aus einer n -elementigen Menge zu ziehen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, nicht berücksichtigt wird.

Beweis:

Wenn die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, keine Rolle spielt, so müssen wir nur zählen, wie oft jedes Element der n -elementigen Menge gezogen wurde.

D. h. wir zählen Zerlegungen der natürlichen Zahl $m = k$ in $\ell = n$ Summanden $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}_0$ mit

$$m_1 + \dots + m_\ell = m.$$

Für diese Problem wissen wir bereits, dass es $\binom{m+\ell-1}{\ell-1} = \binom{\ell+m-1}{m}$ unterschiedliche Kombinationen gibt und wegen $m = k$ und $\ell = n$ folgt der Satz. \square

Ziehen von Elementen

Grundproblem

Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge zu ziehen?

Hierbei unterscheidet man folgende Varianten:

- ziehen **mit** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge, in der die Elemente gezogen werden, **mit** berücksichtigt wird

$$k\text{-Tupel} \implies n^k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **mit** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-Tupel ohne Wiederholung} \implies (n)_k$$

- ziehen **ohne** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$k\text{-elementige Teilmengen} \implies \binom{n}{k}$$

- ziehen **mit** Zurücklegen, **ohne** Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Taubenschlag-/Schubfachprinzip

Beobachtung (Schubfachprinzip)

Für natürliche Zahlen m und $n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt, falls m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Für $m > n$ gibt es keine injektive Abbildung von einer m -elementigen Menge M in eine n -elementige Menge N .

Allgemeiner gilt, wenn m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ Objekten.

Satz (Unendliche Variante)

Sei M eine unendliche Menge und $n \in \mathbb{N}$. Sind M_1, \dots, M_n Teilmengen von M mit $M = M_1 \cup \dots \cup M_n$, so ist (mindestens) eine der Mengen M_1, \dots, M_n unendlich.

Beweis: Angenommen, M_1, \dots, M_n sind endlich. Dann existiert $m \in \mathbb{N}_0$ definiert als das Maximum der Mächtigkeiten der M_i , d. h. $m = \max_{1 \leq i \leq n} |M_i|$. Dann gilt aber

$$|M| \leq \sum_{i=1}^n |M_i| \leq m \cdot n$$

und somit ist auch M endlich. ⚡



Zwei einfache Anwendungen des Schubfachprinzips

Teilerfremde und teilende Paare

Für $n \in \mathbb{N}$ seien n beliebige natürliche Zahlen $1 \leq x_1 < \dots < x_{n+1} \leq 2n$ gegeben. Dann gibt es

- zwei Indizes $1 \leq i < j \leq n$, sodass x_i und x_j teilerfremd sind
- und es gibt zwei Indizes $1 \leq k < \ell \leq n$, sodass $x_k \mid x_\ell$.

Beweis: Für die erste Aussage müssen wir uns nur klar machen, dass es unter $n + 1$ Zahlen zwischen 1 und $2n$, in jedem Fall ein Zahlenpaar der Form $a, a + 1$ gibt. D. h. es gibt ein i und a sodass $x_i = a$ und $x_{i+1} = a + 1$ gilt und offensichtlich sind $x_i = a$ und $x_{i+1} = a + 1$ teilerfremd. Formal können wir auch die Zahlen zwischen 1 und $2n$ in n Schubladen S_1, \dots, S_n der Form $S_j = \{2j - 1, 2j\}$ unterteilen und wegen des Schubfachprinzips muss eine der Schubladen mindestens zwei der x_i enthalten.

Für die zweite Aussage betrachten wir als Schubladen die n ungeraden Zahlen zwischen 1 und $2n$ und wir legen x_i in die Schublade der ungeraden Zahl u , falls u der größte ungerade Teiler von x_i ist. Wegen des Schubfachprinzips gibt es also ein ungerades u und $x_k < x_\ell$, sodass u der größte ungerade Teiler von x_k und x_ℓ ist. Also ist $x_k = 2^a u$ und $x_\ell = 2^b u$ für $a < b$ aus \mathbb{N}_0 . Somit gilt $x_\ell = 2^{b-a} x_k$. \square

Allgemeine Additionsregel

$$A_1, \dots, A_n \text{ paarweise disjunkt und endlich} \implies \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

Frage

Was passiert wenn die Mengen A_i nicht paarweise disjunkt sind?

Antworten:

- Elemente die in mehreren A_i vorkommen, werden in der Summe mehrfach gezählt, z. B. für zwei Mengen A, B gilt:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

- **allgemein:** seien $A_1, \dots, A_n \subseteq X$ und $f: X \rightarrow \mathbb{N}_0$ ordne jedem Element seine Vielfachheit in der Mengenfamilie zu

$$f(x) = |\{i \in [n] : x \in A_i\}| = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x),$$

wobei die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A(\cdot)$ einer Menge A durch $\mathbb{1}_A(x) = 1$ falls $x \in A$ und $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sonst definiert ist, dann gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{x \in X} \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}(x) = \sum_{x \in X} f(x)$$

Verallgemeinerung von $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Für drei Mengen A , B und C gilt:

- $|A| + |B| + |C|$ zählt alle Elemente in $A \cup B \cup C$ mindestens einmal, aber die Elemente in den paarweisen Schnitten $A \cap B$, $A \cap C$ und $B \cap C$ werden mindestens zweimal gezählt
- **Idee:** paarweise Schnitte einfach abziehen

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

Problem: Elemente in $A \cap B \cap C$ werden in $|A| + |B| + |C|$ dreimal gezählt, aber durch $-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ auch dreimal abgezogen, da sie in jedem der drei Schnitte enthalten sind, d. h. Elemente in $A \cap B \cap C$ werden oben gar nicht mehr mitgezählt

⇒ einfach wieder hinzuaddieren, ergibt die richtige Formel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Siebformel – Prinzip von Inklusion und Exklusion

Satz (Siebformel)

Für endliche Mengen A_1, \dots, A_n gilt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Bemerkungen:

- die Summe läuft über alle nicht-leeren Teilmengen von $[n] = \{1, \dots, n\}$
- für die 1-elementigen Mengen $J = \{j\}$ erhält man die Summanden $|A_j|$
- für $n = 2$ und 3 erhalten wir die bekannten Formeln
- Durchschnitte mit leerer Indexmenge definiert man als Grundmenge, hier $\bigcap_{j \in \emptyset} A_j = \bigcup_{i=1}^n A_i$, und so erhält man durch umstellen die elegante Identität

$$\sum_{J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = 0$$

Nützliches Lemma

Lemma

Für jede natürliche Zahl $\ell \geq 1$ und jede ℓ -elementige Menge gibt es genauso viele Teilmengen mit gerader, wie mit ungerader Anzahl von Elementen.

Beweis: Sei L eine nicht-leere ℓ -elementige Menge. Wegen $\ell > 0$ folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1 - 1)^\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (-1)^k.$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned} |\{K \subseteq L : |K| \text{ ungerade}\}| &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ ungerade}}} \binom{\ell}{k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq \ell \\ k \text{ gerade}}} \binom{\ell}{k} = |\{K \subseteq L : |K| \text{ gerade}\}| \end{aligned}$$



Beweis der Siebformel

Siebformel

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Beweis: Sei $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ beliebig und $I_x = \{i \in [n] : x \in A_i\}$.

- x wird in $|\bigcup_{i=1}^n A_i|$ genau einmal gezählt
 - x trägt zur Summe $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$ bei $\iff J \subseteq I_x, J \neq \emptyset$
- $\Rightarrow x$ trägt in der Summe genau $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1}$ bei

Wegen der Definition ist $I_x \neq \emptyset$ und $\ell := |I_x| \geq 1$ und wegen dem Lemma gilt

$$0 = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j = \sum_{J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|} = (-1)^0 + \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|}.$$

Durch Umstellen und Division mit (-1) erhalten wir also $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}(I_x)} (-1)^{|J|-1} = 1$.

$\Rightarrow x$ wird in $\sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} |\bigcap_{j \in J} A_j|$ genau einmal gezählt □

Fixpunktfreie Permutation

Briefe falsch verschicken

Es werden n unterschiedliche Briefe zufällig auf n voradressierte Briefumschläge verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass **jeder** Brief in einen falschen Umschlag kommt?

Mathematisch: Eine Permutation $\pi: [n] \rightarrow [n]$ heisst **fixpunktfrei**, falls $\pi(i) \neq i$ für alle $i \in [n]$. Wieviele Permutationen auf $[n]$ sind fixpunktfrei?

Antwort

EULERSche Zahl $e = 2,718281828\dots$

Es gibt ungefähr (für große n) $n!/e$ fixpunktfreie Permutationen auf $[n]$, d. h. mit Wahrscheinlichkeit $1/e \approx 0,367$ liegen alle Briefe im falschen Umschlag für große n . Die Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0,36 und 0,37 für alle $n \geq 5$.

Beweis: Sei A_i die Menge der Permutationen π auf $[n]$ mit Fixpunkt $\pi(i) = i$. Die Siebformel ergibt also für die Anzahl der Permutationen **mit** Fixpunkt

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \in \mathcal{P}([n])} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} (n-j)! = n! \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

Wegen $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = e^{-1} = 1/e$ (**Analysis**) folgt $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = 1 - 1/e$. \square

Relationen und Graphen

Idee: Relation $R \subseteq M^2$ auf einer Menge M kann graphisch dargestellt werden, indem man die geordneten Paare in R als Pfeile zwischen den Elementen von M zeichnet

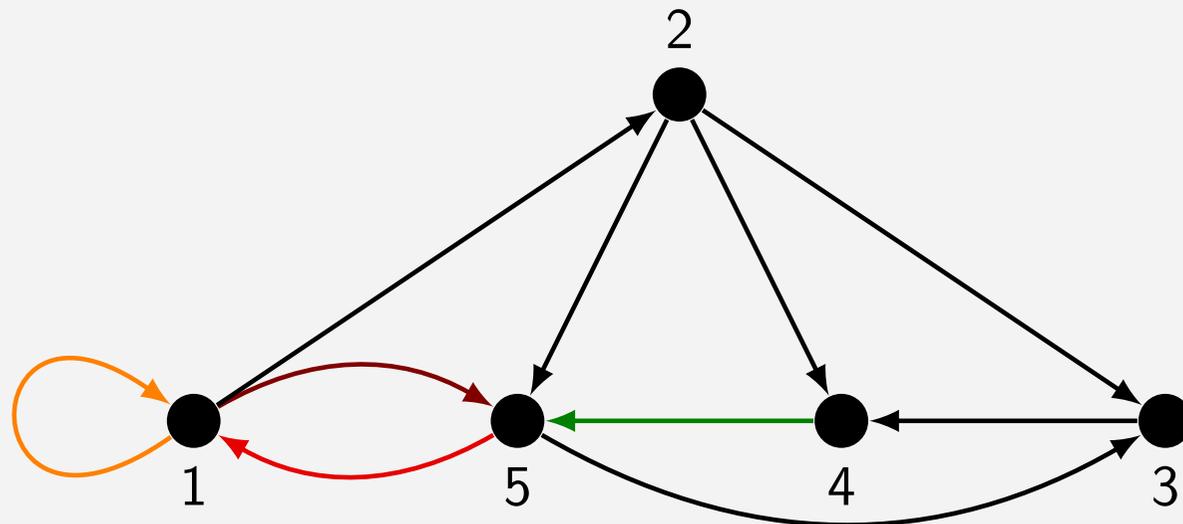
Definition (Gerichteter Graph)

Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar $D = (V, A)$ mit $A \subseteq V^2$ und **Kantenmenge** A und **Ecken/Knotenmenge** V . Kanten der Form (v, v) heißen **Schlingen**.

Beispiel

Gerichteter Graph der Relation:

- $R := \{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 3)\}$
- auf $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Eigenschaften von Relationen und Graphen

Sei R eine Relation auf der Menge V :

- R ist reflexiv, falls jeder Ecke $v \in V$ im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- R ist irreflexiv, falls keine Ecke $v \in V$ im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
- R ist symmetrisch, falls im gerichteten Graphen für jede Kante $(u, v) \in A$ auch die „umgekehrte“ Kante (v, u) in A vorhanden ist.
- R ist antisymmetrisch, falls für je zwei verschiedene Ecken $u, v \in V$ im gerichteten Graphen höchstens eine Kante vorhanden ist.
- R ist transitiv, falls für den gerichteten Graphen folgendes gilt:
Immer wenn man entlang der gerichteten Kanten einen Weg (bzw. Kreis falls $u = v$) von einer Ecke u zu einer Ecke v finden kann, dann ist bereits die Kante (u, v) vorhanden.

HASSEdiagramme von Ordnungsrelationen

Ordnungsrelation/Teilordnung/partielle Ordnung:

reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Vereinfachte Darstellung:

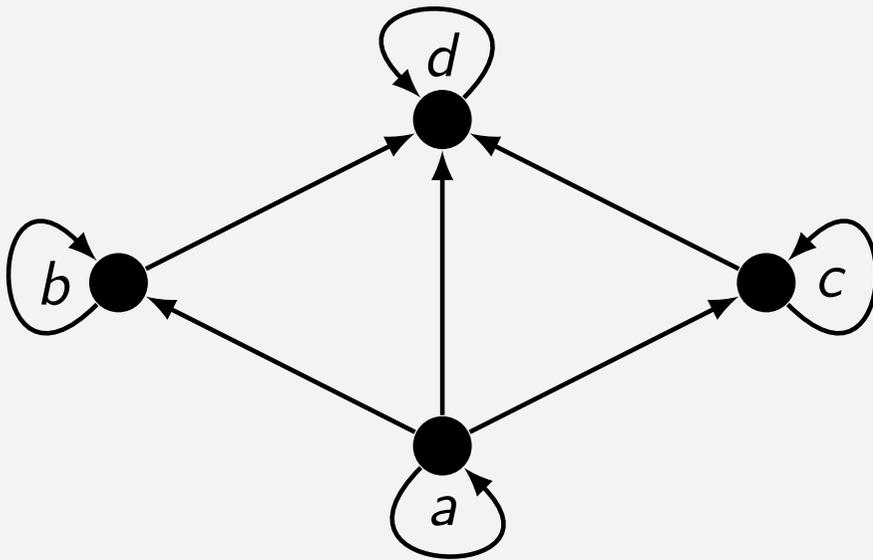
- reflexiv \Rightarrow Graph hat an jeder Ecke eine Schlinge
 \longrightarrow Schlingen einfach weglassen
- transitiv \Rightarrow Wege erzwingen „abkürzende Kanten“
 \longrightarrow nur Wege ohne Abkürzungen zeichnen
 $\Rightarrow (u, v)$ nur darstellen, wenn es **keinen** gerichteten Weg von u nach v mit mindestens zwei Kanten im Graphen der Relation gibt
- restlichen Graphen so zeichnen, dass alle Pfeilspitzen nach oben zeigen
 \longrightarrow und dann Pfeilspitzen weglassen
- die sich ergebende Darstellung einer Ordnungsrelation heißt:

HASSEdiagramm

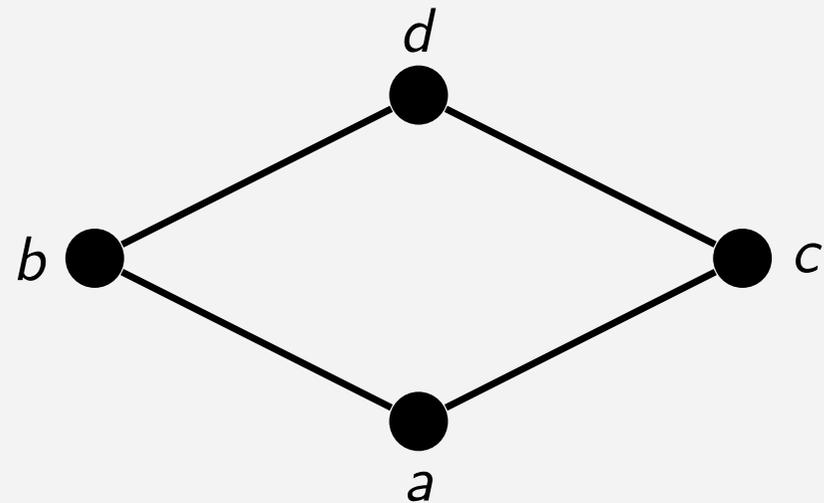
HASSEdiagramme – Beispiel

- $R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$
- auf $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von R



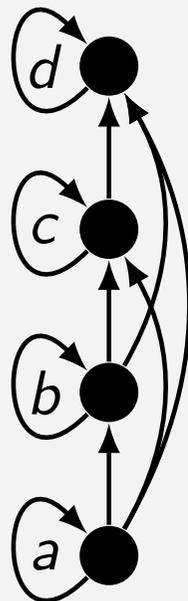
HASSEdiagramm von R



HASSEdiagramme – Beispiel 2

- $R := \{(a, a), \dots, (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$
- auf $M := \{a, b, c, d\}$

gerichteter Graph von R



HASSEdiagramm von R



Hüllenbildung

Idee:

- falls Relation R nicht ... erfüllt, dann erweitere/verringere R so **wenig** wie möglich bis ... erfüllt ist

Definition (Reflexive Hülle)

Für eine Relation R auf einer Menge M sei

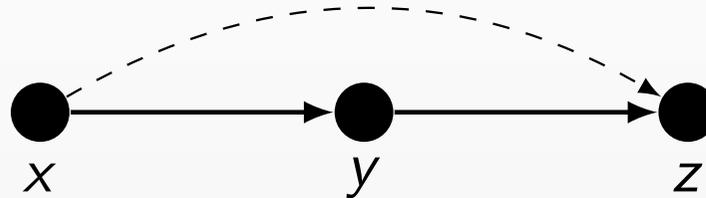
$$R' := R \cup \{(x, x) : x \in M\}.$$

Dann ist R' die kleinste reflexive Relation, die R umfasst, und diese wird die **reflexive Hülle** von R genannt.

Bsp.: Für $<$ auf \mathbb{N} ist \leq die reflexive Hülle.

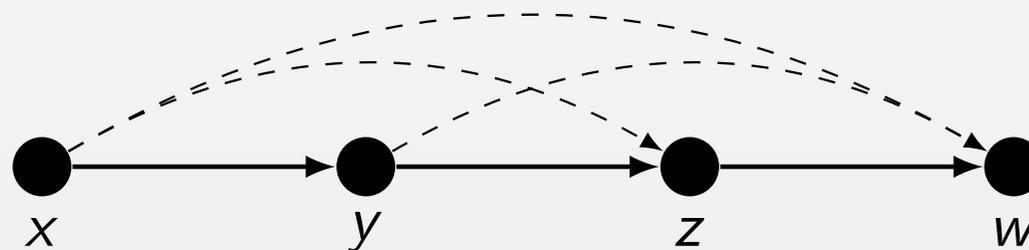
Transitive Hülle – Beispiele

- $R_1 := \{(x, y), (y, z)\}$ auf $M_1 = \{x, y, z\}$



⇒ für Transitivität fehlt (x, z)

- $R_2 := \{(x, y), (y, z), (z, w)\}$ auf $M_2 = \{x, y, z, w\}$



⇒ für Transitivität fehlen nicht nur (x, z) und (y, w) , sondern auch (x, w)

Transitive Hülle

Allgemein:

- wir brauchen für Transitivität die Eigenschaft:

$$\text{falls } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \implies (x_1, x_n) \in R$$

Definition (Transitive Hülle)

Für eine Relation R auf einer Menge A ist

$$R^+ := \left\{ (x, y) : \text{es gibt } n \geq 2 \text{ und } x_1, \dots, x_n \in A \text{ mit} \right. \\ \left. x = x_1, y = x_n \text{ und } (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \right\}$$

die kleinste transitive Relation mit $R \subseteq R^+$, die **transitive Hülle** von R heißt.

Des Weiteren ist $R^* = R^+ \cup R'$ die **reflexive, transitive Hülle** von R und R^* ist die kleinste reflexive, transitive Relation, die R umfasst.

Bemerkung

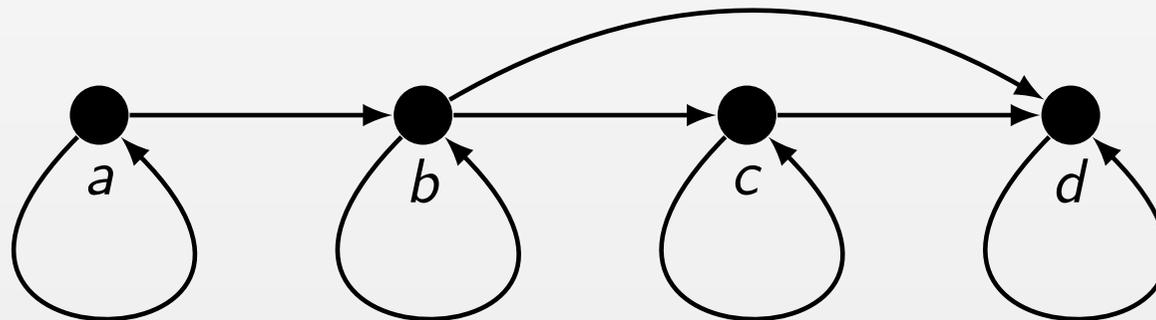
- Relationen die transitiv und reflexiv sind, heißen **Quasiordnungen**

Beispiel

$$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$$

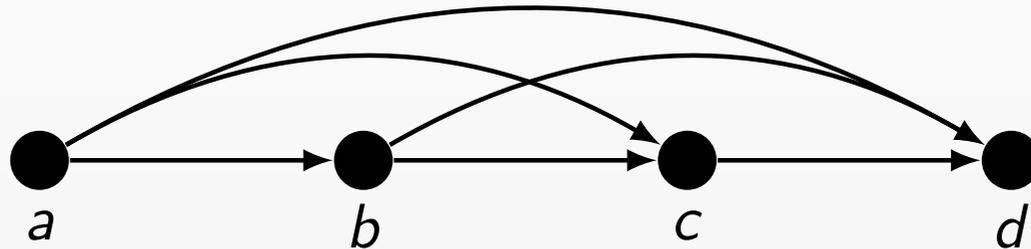


$$R' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$$

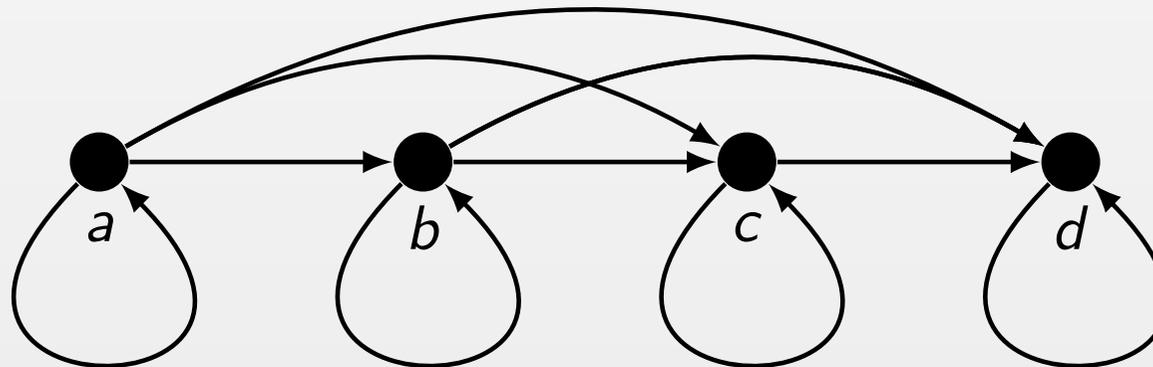


Beispiel

$$R^+ = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$



$$R^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$



Quasiordnungen zu Teilordnungen

Definition (Quasiordnung)

Eine reflexive und transitive Relation heißt **Quasiordnung**.

Idee:

- „entferne“ symmetrische Paare der Quasiordnung durch gleichsetzen/Äquivalenzen

Satz

Für jede Quasiordnung \preceq auf einer Menge A wird durch

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad (a \preceq b \text{ und } b \preceq a)$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert. Auf A/\sim definiert dann

$$[a] \preceq [b] \quad :\Leftrightarrow \quad a \preceq b$$

eine Teilordnung.

Beweis des Satzes

Beweis: Der Beweis hat drei Teile

- 1** \sim ist eine Äquivalenzrelation,
- 2** \leq ist wohldefiniert und
- 3** \leq ist eine Teilordnung.

zu 1: Reflexivität und Transitivität vererben sich von \leq und Symmetrie folgt von der Definition von \sim .

zu 2: Es ist zu zeigen, dass die Definition unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist. D. h. für alle $a' \in [a]$ und $b' \in [b]$ muss gelten:

$$a \leq b \iff a' \leq b'.$$

Es gilt: $a' \in [a] \Rightarrow a' \sim a \Rightarrow a' \leq a$ und $a \leq a'$.

Ebenso $b' \in [b] \Rightarrow b' \leq b$ und $b \leq b'$.

Wegen der Transitivität von \leq gilt also $a \leq b \Rightarrow a' \leq a \leq b \leq b' \Rightarrow a' \leq b'$ und ebenso $b \leq a \Rightarrow b' \leq a'$.

zu 3: Reflexivität und Transitivität vererben sich von \leq .

Für die Antisymmetrie seien $a, b \in A$ mit $[a] \leq [b]$ und $[b] \leq [a]$. Aus der Definition von \leq folgern wir $a \leq b \leq a$ und somit $a \sim b$, also $[a] = [b]$. \square