Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht, Fabian Hundertmark

WS 2011/12
8. Dezember 2011

Übungen zur Grapentheorie 2 - Blatt 7

Besprechung am 15. Dezember 2011

1. Die Rundflüsse auf einem Graphen mit Werten in $\mathbb{Z}_2$ bilden in natürlicher Weise nicht nur eine Gruppe, sondern einen $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum. Zu welchem Raum aus Kapitel 0.9 ist er isomorph? Benenne einen Isomorphismus explizit.

2. Es sei H eine abelsche Gruppe, $G = (V, E)$ ein Graph mit Spannbaum T, und f eine (F1) erfüllende Abbildung von der Menge der Orientierungen der Kanten in $E \setminus E(T)$ nach H. Zeige, dass f eindeutig zu einem Rundfluss auf G mit Werten in H fortsetzbar ist.

3. (Fortsetzung der vorigen Übung)

   Es sei $\mathcal{V}_H = \mathcal{V}_H(G)$ die Gruppe aller Abbildungen $V \to H$ und $\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_H(G)$ die Gruppe aller (F1) erfüllenden Abbildungen $\vec{E} \to H$, jeweils mit punktweiser Addition. Jedes $\varphi \in \mathcal{V}_H$ definiert ein $\psi \in \mathcal{E}_H$ durch $\psi(e, x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$.

   (i) Zeige, dass diese ψ eine Untergruppe $\mathcal{D}_H = \mathcal{D}_H(G)$ von $\mathcal{E}_H$ mit $\mathcal{D}_H = \{\, \psi \in \mathcal{E}_H \mid \psi(\vec{C}) = 0 \text{ für jeden orientierten Kreis } C \subseteq G \,\}$ bilden.

   (ii) Zeige, dass jede (F1) erfüllende Abbildung $\vec{E}(T) \to H$ eindeutig zu einer Abbildung in $\mathcal{D}_H$ fortsetzbar ist.

4.$^+$ (Fortsetzung der vorigen Übung)

   Zeige, dass $\mathcal{E}_H/\mathcal{D}_H$ isomorph ist zur Gruppe $\mathcal{C}_H$ der Rundflüsse auf G mit Werten in H.

Hinweise

1. Eckengrade.
2. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachte Fundamentalschnitte.
3. (i) Zu gegebenem $\psi \in \mathcal{D}_H$ konstruiere $\varphi \in \mathcal{V}_H$ wie die Eckenfärbung im Beweis von Satz 5.5.3.

   (ii) Die Fundamentalkreise erzeugen die anderen Kreise auch „mit Orientierung“.

4.$^+$ Indirekt kann man dies zeigen durch einen Beweis, dass $\mathcal{E}_H/\mathcal{D}_H$, wie $\mathcal{C}_H$, direktes Produkt von so vielen Exemplaren von H ist wie T Sehnen hat. Schöner wäre ein direkter Beweis: finde einen Epimorphismus $\mathcal{E}_H \to \mathcal{C}_H$ mit Kern $\mathcal{D}_H$.