Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht, Fabian Hundertmark

WS 2011/12
27. Oktober 2011

Übungen zur Grapentheorie 2 - Blatt 2

Besprechung am 3. November 2011

Die Adjazenzmatrix A_G eines Graphen G ist eine symmetrische reelle Matrix und hat daher nur reelle Eigenwerte; diese bezeichnen wir auch als die *Eigenwerte von* G. Das *Spektrum* eines Graphen G ist die absteigende Folge $\lambda_1, \ldots, \lambda_{|G|}$ seiner Eigenwerte, wobei jeder Eigenwert entsprechend seiner Multiplizität gezählt wird.

1. Es sei T der Baum mit 4 Blättern und 2 inneren Ecken von Grad 3. Zeige, dass jeder 3-reguläre Graph, der sich durch ein System eckendisjunkter Kopien von T überdecken lässt, den Eigenwert 0 besitzt. (Natürlich kann G auch weitere Eigenwerte besitzen.)

2. Bestimme das Spektrum
   a) des vollständigen Graphen K_n,
   c) des Sterns S_n mit $n-1$ Blättern,
   b) des vollständig bipartiten Graphen $K_{m,n}$,
   d) des Kreises C_n der Länge n.

3. Zeige, dass ein Graph mit zwei kantendisjunkten Spannbäumen einen aufspannenden zusammenhängenden Teilgraphen enthält, dessen Eckengrade alle gerade sind.

4. Zeige, dass jeder ebene Graph die Vereinigung dreier Wälder ist.

Hinweise

1. Betrachte einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{|G|}$ als eine Funktion, die jeder Ecke v des Graphen einen Wert x_v zuweist. Was macht $A_G \cdot x$?
2. Man kann ohne die Berechnung einer einzigen Determinante auskommen!
3. Beginne die Konstruktion mit einem der beiden Spannbäume und erweitere sie mit Hilfe des anderen.