Fachbereich Mathematik
Diskrete Mathematik
Prof. Mathias Schacht, Fabian Hundertmark

WS 2011/12
12. Januar 2012

Übungen zur Grapentheorie 2 - Blatt 10

Besprechung am 19. Januar 2012

Für $c \geqslant 2$ und Graphen $F_1, \dots, F_c$ bezeichne $R(F_1, \dots, F_c)$ die kleinste natürliche Zahl n, so dass für jede Partition (beliebig viele leere Partitionsklassen sind zulässig) $E_1 \cup \dots \cup E_c$ der Kanten des K^n in c Klassen, ein Index $1 \leqslant i \leqslant c$ mit $F_i \subseteq K^n[E_i]$ existiert. Falls $F_i = F$ für alle $1 \leqslant i \leqslant c$ schreiben wir abkürzend $R(F; c)$.

1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $m-1$ sei ein Teiler von $n-1$. Zeige, dass für jeden Baum T mit m Ecken gilt: $R(T, K_{1,n}) = m+n-1$.

2. Beweise für jedes $c \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $2^c < R(K^3; c) \leqslant 3c!$.
   (Tipp: Induktion nach c.)

3. Zeige, dass es zu je zwei Graphen H_1, H_2 einen Graphen $G = G(H_1, H_2)$ gibt mit der Eigenschaft, dass es für jede Parition $V_1 \cup V_2 = V(G)$ seiner Eckenmenge ein Index $i \in \{1, 2\}$ gibt, so dass H_i ein *Unter*graph von $G[V_i]$ ist.

4.

(*i*) Zeige dass es für jedes $c \geqslant 2$ und jeden bipartiten Graphen F einen bipartiten Graphen G gibt, so dass für jede Partition $E_1 \cup \dots \cup E_c = E(G)$ der Kanten von G ein Index $1 \leqslant i \leqslant c$ existiert, mit $F \subseteq G[E_i]$.

(*ii*) Gilt die analoge Aussage auch, wenn wir $\chi(F) = k \geqslant 3$ voraussetzen, und $\chi(G) = k$ verlangen?

Hinweise

1. Ahme den Beweis von Proposition 7.2.1 nach.
2. Die untere Schranke ist einfach. Für die obere Schranke betrachte zu gegebener Partition die Nachbarn einer Ecke mittels der Kanten einer geeigneten Partitionsklasse.
3. Für Graphen $G = (V, E)$ und H, sowie eine Eckenmenge $U \subseteq V$ bezeichne $G[U \to H]$ den Graphen, den wir aus G erhalten, indem wir die Ecken $u \in U$ durch disjunkte Kopien $H(u)$ von H ersetzen und jedes $H(u)$ vollständig mit allen $H(u')$ mit $uu' \in E$ und allen Ecken $v \in V \setminus U$ mit $uv \in E$ verbinden.
4. Zu (i): Verwende einen passenden Satz aus Graphentheorie 1, genauer: aus dem Kapitel über extremale Graphentheorie.