

Übungen zur Graphentheorie 2 - Blatt 1

Besprechung am 27. Oktober 2011

1. Zeige, dass der Zyklenraum eines Graphen aufgespannt wird durch
 - (i) seine induzierten Kreise;
 - (ii) seine geodätischen Kreise.

(Ein Kreis $C \subseteq G$ heißt *geodätisch* in G , wenn für je zwei Ecken von C ihr Abstand in G nicht kürzer ist als ihr Abstand in C .)
- 2.⁺ In einem Graphen G seien a, b zwei Ecken, die durch einen Schnitt F von k Kanten getrennt werden aber nicht durch weniger als k Kanten. Zeige, dass F keine Summe von Schnitten aus weniger als k Kanten ist.
(Tipp: Zeige, dass die a von b nicht trennenden Schnitte einen Unterraum von $\mathcal{C}^*(G)$ bilden. Dazu konstruiere zu a und b eine „Invariante“ von Schnitten in G , die konstant ist unter Summenbildung und die die a von b trennenden Schnitte von den anderen unterscheidet.)
3. Für kubische Graphen stellt Lemma 1.3.1 eine erhebliche Verschärfung des Satzes von Erdős und Pósa dar. Existiert allgemeiner eine Funktion $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass jeder Graph mit Minimalgrad ≥ 3 und mindestens $g(k)$ Ecken k disjunkte Kreise enthält (für alle $k \in \mathbb{N}$)?
4. Ein Graph G heißt *ausgewogen*, falls $\varepsilon(H) \leq \varepsilon(G)$ gilt für jeden Teilgraphen $H \subseteq G$.
 - (i) Finde ein paar natürliche Klassen ausgewogener Graphen.
 - (ii) Zeige, dass die Arborizität eines ausgewogenen Graphen nicht größer ist als sein Durchschnittsgrad. Ist sie sogar durch ε beschränkt? Oder durch $\varepsilon + 1$?
 - (iii) Charakterisiere – mit Hilfe der ausgewogenen Graphen oder sonstwie – die Graphen G , für die $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$ gilt für jeden Untergraphen $H \subseteq G$.

Hinweise

1. Da der Zyklenraum eines Graphen durch seine Kreise aufgespannt wird, reicht es zu zeigen, dass diese erzeugt werden durch die induzierten bzw. geodätischen Kreise. Zeige dies mit Induktion nach der Länge des zu erzeugenden Kreises.
- 2.⁺ Betrachte einen a - b -Weg P . Wie liegt dieser zu den betrachteten Schnitten?
3. Wo im Beweis von Lemma 1.3.1 geht $\Delta(G) \leq 3$ ein?
4. (i) Für welche Graphen sinkt der Durchschnittsgrad, wenn man beliebige Ecken löscht? Für (ii) vergleiche die Arborizität zunächst grob mit ε . Teil (iii) hat eine vielleicht unerwartete Lösung.