ENDE VOM BEWEIS VON SATZ 10.3.8

Zusammenfassung. Dies sind die Details vom Ende des Beweises des Dualitätssatzes für Baumzerlegungen, welche wir in der letzten Vorlesung nicht mehr ausführlich besprochen haben.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\mathrm{bd}(G) = k + 1$ und $\mathcal{B}$ ein beliebiges *Netz* von G. Wir wollen zeigen, dass es eine $\mathcal{B}$-zulässige Baumzerlegung von G gibt, d. h. es gibt eine Baumzerlegung $(T, (V_t)_{t\in V(T)})$ mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in V(T)$ mit $|V_t| \geq k + 2$ ist V_t keine Überdeckung von $\mathcal{B}$.

Im Beweis haben wir eine kleinste Überdeckung $X \subseteq V$ von $\mathcal{B}$ mit $|X| = \ell \leq k+1$ und eine Komponente A aus $G - X$ fixiert. Mit H bezeichnen wir $G[X \dot\cup V(A)]$ und wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{V(A)\}$ ein größeres Netz ist, für welches es (wegen der maximalen Wahl von $\mathcal{B}$) eine $\mathcal{B}'$-zulässige Baumzerlegung $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ gibt. Da wir annehmen können, dass $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ nicht $\mathcal{B}$-zulässig ist (sonst wären wir fertig), muss es ein $t' \in V(T')$ mit $|V_{t'}| \geq k + 2$ geben, so dass $V_{t'}$ das Netz $\mathcal{B}$ überdeckt. Auf der anderen Seite folgt aus der $\mathcal{B}'$-Zulässigkeit von $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ und $\mathcal{B}' \setminus \mathcal{B} = \{V(A)\}$, dass

$$V_{t'} \cap V(A) = \emptyset\,. \tag{1}$$

Aus der Wahl von X als eine kleinste Überdeckung zusammen mit Lemma 10.3..7 folgt nun, dass jeder Trenner von X und $V_{t'}$ in G aus mindestens $|X| = \ell$ Ecken besteht. Somit folgt durch den Satz von Menger (Satz 2.3.1), dass es ℓ eckendisjunkte Wege $P_1, \ldots, P_\ell$ zwischen $V_{t'}$ und X in G gibt. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_\ell\}$, so dass für $i = 1, \ldots, \ell$ die Ecke x_i die Endecke von P_i in X ist.

Als nächstes definieren wir eine Baumzerlegung $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ von H mit den Eigenschaften

(*i*) $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ ist $\mathcal{B}$-zulässig und
(*ii*) es gibt ein $s \in V(S)$ mit $V_s = X$.

Wir haben bereits eingesehen, dass die Baumzerlegungen die man durch diese Argumentation angewandt auf jede Komponente aus $G - X$ erhält zu einer $\mathcal{B}$-zulässigen Baumzerlegung von G entlang der Beutel die X entsprechen „zusammenkleben" kann.

Hinsichtlich der Definition von der Baumzerlegung $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ wählen wir zuerst für jedes $i = 1, \ldots, \ell$ eine Ecke $t'_i \in V(T')$ mit $x_i \in V_{t'_i}$ aus. Wir setzen

$$S = T'$$

und bezeichnen mit $\varphi\colon V(S) \to V(T')$ den Isomorphismus. Für alle $s \in V(S)$ setze

$$V_s = (V_{\varphi(s)} \cap V(H)) \cup \{x_i\colon \varphi(s) \text{ liegt auf dem } t'_i\text{-}t'\text{-Weg in } T'\}\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ eine Baumzerlegung von H ist, die (*i*) und (*ii*) erfüllt und der Beweis folgt nach Behauptungen 1-3. □

Behauptung 1. *$(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ ist eine Baumzerlegung von H.*

Date: 3. Februar 2012.

Beweis. Die Eigenschaften (T1) und (T2) folgen direkt aus der Definition von $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$, da diese $S = T'$ und $V_s \supseteq V_{\varphi(s)} \cap V(H)$ für alle $s \in V_s$ sicherstellt und sich (T1) und (T2) der Baumzerlegung $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ von $G \supseteq H$ somit direkt übertragen.

Im Hinblick auf (T3) seien s_1, s_2 und $s_3 \in V(S)$, wobei s_2 auf dem s_1-s_3-Weg in S liegt. Genauso, wie sich (T1) und (T2) von T' auf S übertragen, brauchen wir nur

$$v \in (V_{s_1} \setminus V_{\varphi(s_1)}) \cap V_{s_3} \quad \Rightarrow \quad v \in V_{s_2}$$

nachzuweisen. (Der symmetrische Fall $v \in V_{s_1} \cap (V_{s_3} \setminus V_{\varphi(s_3)})$ ist analog). Aus der Definition von V_{s_1} folgt, dass für jede Ecke $v \in V_{s_1} \setminus V_{\varphi(s_1)}$ gelten muss, dass $v = x_i$ für ein $i = 1, \dots, \ell$ und $\varphi(s_1)$ liegt auf dem t'_i-t'-Weg in T'.

Falls $x_i \in V_{s_3} \setminus V_{\varphi(s_3)}$, dann liegt auch $\varphi(s_3)$ auf dem t'_i-t'-Weg in T'. In diesem Fall muss dann auch $\varphi(s_2)$ auf dem t'_i-t'-Weg in T' liegen, was $x_i \in V_{s_2}$ nach sich zieht.

Sei also $x_i \in V_{\varphi(s_3)} \cap V(H) \subseteq V_{s_3}$. In diesem Fall liegt $\varphi(s_2)$ entweder auf dem t'_i-$\varphi(s_3)$-Weg in T', was dann wegen (T3) der Baumzerlegung $(T', (V_t)_{t\in V(T)})$ auch $x_i \in V_{\varphi(s_2)}$ zur Folge hat und somit auch $x_i \in V_{s_2}$ nach sich zieht, oder $\varphi(s_2)$ liegt auf dem t'_i-t'-Weg in T', welches ebenfalls $x_i \in V_{s_2}$ bedeutet. Wir haben somit auch (T3) für die Baumzerlegung $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ von H nachgewiesen. □

Behauptung 2. *$(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ ist $\mathcal{B}$-zulässig.*

Beweis. Sei $s^* \in V(S)$ mit $|V_{s^*}| \geq k+2$. Es ist zu zeigen, dass V_{s^*} das Netz $\mathcal{B}$ nicht überdeckt.

Als erstes beobachten wir

$$|V_{\varphi(s^*)}| \geq |V_{s^*}| \geq k+2\,. \tag{2}$$

Tatsächlich muss für jede Ecke $x_i \in V_{s^*} \setminus V_{\varphi(s^*)}$ die Ecke $\varphi(s^*)$ auf dem t'_i-t'-Weg in T' liegen. Da T' ein Baum ist, müssen die Mengen V_t für die t auf dem t'_i-t'-Weg in T' liegen die Kanten und Ecken eines jeden x_i-V'_t-Weg in G überdecken. Da wegen (T3) die Ecken zusammenhängender Teilgraphen $P \subseteq G$ nur in Teilbäumen von $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ liegen können, d. h. $T'[\{t \in V(T')\colon\ V(P) \cap V_t \neq \emptyset\}]$ ist zusammenhängend in T', enthält $V_{\varphi(s^*)}$ mindestens eine Ecke des Weges P_i. Mit der Disjunktheit der Wege $P_1, \dots, P_\ell$ folgt dann (2).

Als nächstes überzeugen wir uns von

$$V_{\varphi(s^*)} \cap V(A) \neq \emptyset\,. \tag{3}$$

Da wir $|V_{s^*}| \geq k+2 > \ell = |X|$ annehmen und $V_{s^*} \subseteq X \cap V(A)$ gilt, muss $V_{s^*} \cap V(A) \neq \emptyset$ gelten. Somit gilt (3), da $V_s \cap V(A) = V_{\varphi(s)} \cap V(A)$ für alle Ecken $s \in V(S)$ wegen der Definition der Baumzerlegung $(S, (V_s)_{s\in V(S)})$ gilt.

Da die Baumzerlegung $(T', (V_t)_{t\in V(T')})$ per Annahme $\mathcal{B}'$-zulässig ist, folgt aus (2), dass $V_{\varphi(s^*)}$ das Netz $\mathcal{B}'$ nicht überdeckt und wegen (3) muss es ein $B \in \mathcal{B}' \setminus \{V(A)\} = \mathcal{B}$ mit $V_{\varphi(s^*)} \cap B = \emptyset$ geben.

Abschließend zeigen wir, dass $V_{s^*} \cap B = \emptyset$, was die Behautptun 2 nach sich zieht. Angenommen $V_{s^*} \cap B \neq \emptyset$. Da $V_{s^*} \setminus V_{\varphi(s^*)} \subseteq X$ ist, muss also für ein $i = 1, \dots, \ell$ die Ecke x_i in B enthalten sein und $\varphi(s^*)$ muss auf dem t'_i-t'-Weg in T' liegen. Folglich gilt $x_i \in B \cap V_{t'_i}$. Weiterhin gilt $V_{t'} \cap B \neq \emptyset$, da $V_{t'}$ das Netz $\mathcal{B}$ überdeckt. Schließlich ist

$$T'[\{t \in V(T')\colon\ V_t \cap B \neq \emptyset\}]$$

ein zusammenhängender Teilbaum von T', da B als Teil des Netzes $\mathcal{B}$ zusammenhängend ist. Da aber $\varphi(s^*)$ auf dem t'_i-t'-Weg in T' liegt, erhalten wir somit den Widerspruch $V_{\varphi(s^*)} \cap B \neq \emptyset$. $\square$

Behauptung 3. *$X = V_s$ für ein $s \in V(S)$.*

Beweis. Wähle $s = \varphi^{-1}(t')$. Aus (1) folgt $V_{t'} \cap V(H) \subseteq X$ und somit auch $V_s \subseteq X$. Da offensichtlich t' auf jedem t'_i-t'-Weg in T' liegt, folgt aus der Definition von V_s, dass $x_i \in V_s$ für jedes $i = 1, \ldots, \ell$ und somit gilt $V_s = X$. $\square$