Blowup Ramseyzahlen Handout

Marina Szymanek

Juni 2021

Dieses Handout dient als begleitende Literatur zum Vortrag über Blowup Ramseyzahlen und beinhaltet alle Definitionen, Behauptungen und Beweisideen.
Es sei anzumerken, dass wir immer 2-Kantenfärbungen betrachten.

1 Einleitung

Definition 1.1 (t-Blowup)**.** Sei H ein Graph und $t \in \mathbb{N}$. Der t-Blowup von H sei der Graph $H[t]$, bei dem jede Ecke $i \in V(H)$ durch eine unabhängige Eckenmenge V_i der Größe t ersetzt wird und jede Kante $ij \in E(H)$ durch einen $K_{t,t}$ zwischen den Mengen V_i und V_j.

Ein t-Blowup vom K_r ist also der vollständige r-partite Graph $K_r(t, ..., t) = K_r[t]$, wobei $r \in \mathbb{N}$.

Definition 1.2 (Blowup Ramseyzahl)**.** Seien G, H Graphen so das $G \to H$. Für ein $t \in \mathbb{N}$ definiere die Blowup Ramseyzahl $B(G \to H; t)$ als minimale Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jede 2-Kantenfärbung von $G[n]$ eine einfarbige, kanonische Kopie von $H[t]$ enthält.

Dabei sei eine Kopie von $H[t]$ kanonisch in $G[n]$, wenn es ein t-blowup einer Kopie von H in G ist.

2 Theorem von Souza

Den Satz von Souza zeigt eine obere Schranke an $B(G \to H; t)$ wir zeigen nur die Beweisidee anhand eines Beispiels. Wichtig ist im Beweis allerdings der Satz von Nikiforov, den wir Beweisen werden.

Satz 2.1 ([V. Souza, 2019])**.** *Seien G, H Graphen mit $G \to H$. Dann existiert eine Konstante $c = c(G, H)$, so dass für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt*
$B(G \to H; t) \leq c^t$.

3 Theorem von Nikiforov

Um den Satz von Nikiforov zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 3.1 ([V. Nikiforov, 2008]). *Sei $F = (A \cup B, E(F))$ ein bipartiter Graph.*
Sei $(log|B|)^{-1/2} \leq \eta < 1/2$ und $t = \eta^2 log|B|$.
Falls $t \leq (\eta/2)|A| + 1$ und $e(F) \geq \eta|A||B|$, dann enthält F einen $K_2[t]$ mit Partitionsmengen $A_0 \subseteq A$ und $B_0 \subseteq B$, so dass $|A_0| = |B_0| = t$.

Die Behauptung vom Satz von Nikiforov:

Satz 3.2 ([V. Nikiforov, 2008]). *Sei H ein Graph mit $v(H) = r \geq 2$ Ecken, G ein Graph mit $v(G) = n$ Ecken und $\eta < 1/4$.*
Wenn G mindestens $\eta n^{v(H)}$ Kopien von H enthält, dann enthält G eine Kopie von einem $H[t]$ mit $t = \eta^{v(H)^2} logn$.

Wir zeigen nur den Spezialfall $H = K_r$.
Beweisidee:
Wir zeigen stärker, dass jedes $M \subseteq K_r(G)$ mit $|M| \geq \eta n^r$ einen $K_r[t]$ überdeckt per Induktion über r. Im Induktionsschluss zeigen wir folgendes:
1. Wir zeigen: Es existiert ein $L \subseteq M$ existiert mit $|L| > (\eta/2)n^r$, so dass $d_L(R) > \eta n$ gilt für alle $R \in K_{r-1}(L)$.
2. Zeige: Die IV ist auf $K_{r-1}(L)$ anwendbar ist.
3. Definiere einen Hilfsgraph, auf den wir Lemma 1 anwenden können.

In dem Beweis von Nikiforov nutzen wir folgende Definitionen:

Definition 3.3 (M überdeckt $K_r[t]$. $]FüreinenGraphen$GseiK$_r(G)$ die Menge der r-Kliquen von G, notiert als r-Tupel. Sei $M \subseteq K_r(G)$, dann sei $K_s(M)$ die Menge der s-Kliquen die in M enthalten sind.
Sei $K_r[t] \subseteq G$ ein t-Blowup vom K_r. Dann überdeckt $M \subseteq K_r(G)$ den Teilgraphen $K_r[t]$, falls $E(K_r[t]) \subseteq K_r(M)$ und $K_r[t]$ beinhaltet mindestens t disjunkte r-Tupel von M.

Definition 3.4. Für eine Menge $N \subseteq K_r(G)$ und eine $r-1$-Klique $R \in K_{r-1}(N)$ definiere $d_N(R)$ als die Anzahl an r-Tupel in N, die R enthalten.

4 Regularitätstheorie

Mit der Anwendung von Regularitätstheorie lässt sich der Satz von Fox-Lou-Widgerson zeigen:

Satz 4.1 ([J. Fox, S. Lou, Y. Wigderson, 2020]). *Seien G, H Graphen mit $G \to H$. Dann existieren Konstanten $a = a(G, H)$ und $b = b(H)$, so dass für alle t gilt*
$B(G \to H; t) \leq ab^t$.

Und auch das Theorem von Nikiforov verbessern:

Satz 4.2 ([J. Fox, S. Lou, Y. Wigderson, 2020], [V. Nikiforov, 2008])**.** *Sei H ein Graph mit $v(H) = r \geq 2$ Ecken, G ein Graph mit $v(G) = n$ Ecken, $\eta < exp(-1)$ und $\lambda = \eta^{1-(1/E(H))}/5log(1/\eta)$.*
Wenn G mindestens ηn^r Kopien von H enthält, dann enthält G eine Kopie von einem $H[t]$ mit $t = \lambda logn$.

Hierbei wird eine Variante von ε-Regularität verwendet:

Definition 4.3 (ε-regulärer Zylinder und ε-reguläre Zylinderpartition)**.** Sei F ein m-partiter Graph mit Partition $V = V_1 \bigsqcup ... \bigsqcup V_m$. Ein Zylinder K ist eine Menge der Form $W_1 \times ... \times W_m$ mit $V_i(K) = W_i$, also $W_i \subseteq V_i$ für alle $i \in [m]$.
Dabei sei K ϵ-regulär, falls die Paare (W_i, W_j) ϵ-regulär sind für alle $1 \leq i < j \leq m$.

Weiter sei eine Zylinderpartition $\mathcal{K}$ eine Partition von $V_1 \times ... \times V_m$ in Zylinder.
Wobei $\mathcal{K}$ ϵ-regulär sei, falls höchsten $\epsilon \prod_{i=1,...,m} |V_i|$ der m-Tupel $(v_1, ..., v_m) \in V_1 \times ... \times V_m$ nicht in ϵ-regulären Zylindern sind.

Dabei ist ein wichtiges Theorem das Schwache Regularitätslemma:

Satz 4.4 ([R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, 1995])**.** *Sei $0 < \varepsilon < 1/2$ ein Parameter und $\beta = \varepsilon^{m^2\varepsilon^{-5}}$. Weiter sei $F = (V, E)$ ein m-partiter Graph mit Partition $V = V_1 \cup ... \cup V_m$.*
Dann existiert eine Zylinderpartition $\mathcal{K}$ von $V_1 \times ... \times V_m$ in höchstens $4^{m^2\varepsilon^{-5}}$ Zylinder, so dass für alle $K \in \mathcal{K}$ und $i \in [m]$ gilt $|V_i(K)| \geq \beta|V_i|$.

Eine Verallgemeinerung vom schwachen Regularitätslemma bei 2-gefärbten Graphen:

Satz 4.5 ([J. Fox, R. Li, 2019])**.** *Sei $0 < \varepsilon < 1/2$ ein Parameter und $\beta = \varepsilon^{m^2\varepsilon^{-5}}$. Weiter sei $F = (V, E)$ ein m-partiter Graph mit Partition $V = V_1 \cup ... \cup V_m$ mit 2-Färbung $E = E(F_1) \cup E(F_2)$.*
Dann existiert eine Zylinderpartition $\mathcal{K}$ von $V_1 \times ... \times V_m$ in höchstens $4^{m^2\varepsilon^{-5}}$ Zylinder, die ε-regulär ist in den Graphen F_1 und F_2. Außerdem gilt für jeden Zylinder $K \in \mathcal{K}$ und $i \in [m]$, dass $|V_i(K)| \geq \beta|V_i|$.

5 Quellen

Hoffentlich konnte Euer Interesse an Blowup Ramseyzahlen etwas geweckt werden! Wenn dies der Fall ist, schaue doch gerne mal in eines der Paper hinein.

References

[R. A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, 1995] R.A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl (1995) A fast approximation algorithm for computing the frequencies of subgraphs in a given graph *SIAM J. Comput.* 24, 598-620.

[J. Fox, R. Li, 2019] J. Fox, R. Li (2019) On edge-ordered Ramsey numbers *Preprint* print available at: arXiv:1906.08234.

[J. Fox, S. Lou, Y. Wigderson, 2020] J. Fox, S. Lou, Y. Wigderson (2020) Extremal and Ramsey results on graph blowups *Preprint* print available: https://arxiv.org/abs/1912.08328.

[J.H Hattingh, M.A. Henning, 1998] J.H. Hattingh, M.A. Henning (1998) Bipartite Ramsey theory *Utilitas Math.* 53, 217-230.

[V. Nikiforov, 2008] V. Nikiforov (2008) Graphs with many copies of a given subgraph *Electron, J. Combin* 15, 1-6.

[V. Nikiforov, 2008] V. Nikiforov (2008) Graphs with many r-cliques have large r-partite subgraphs *Bull. Lond. Math. Soc.* 40, 23-25.

[V. Souza, 2019] V. Souza (2019) Blowup Ramsey numbers *Preprint*print available: arXiv:1910.13912.